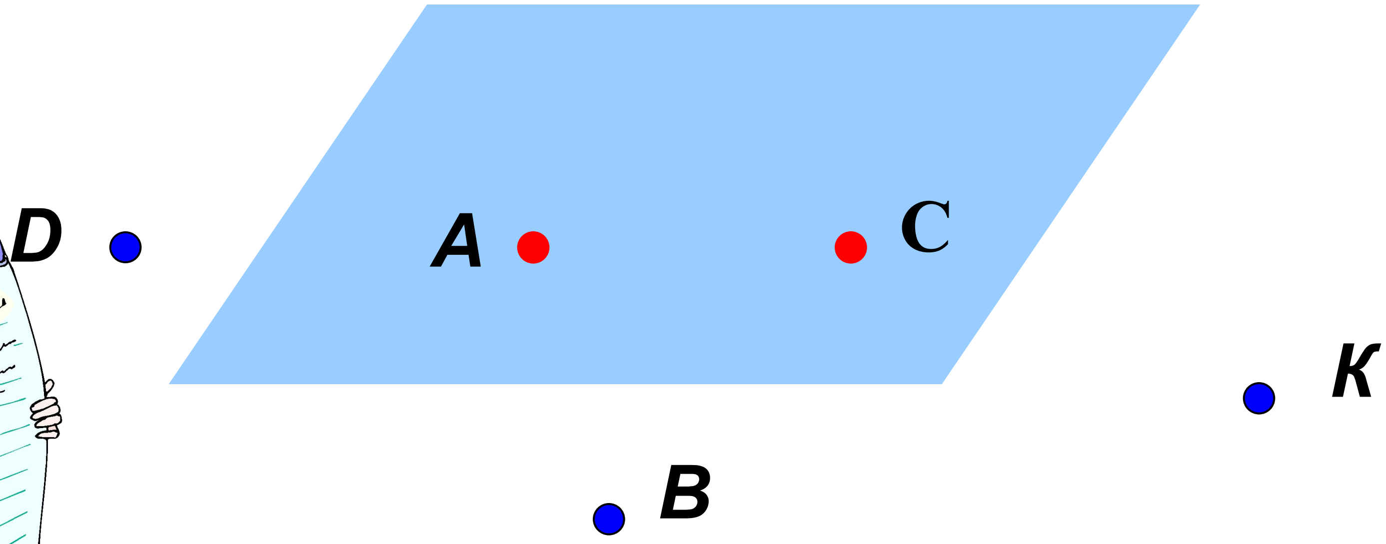
2.2. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

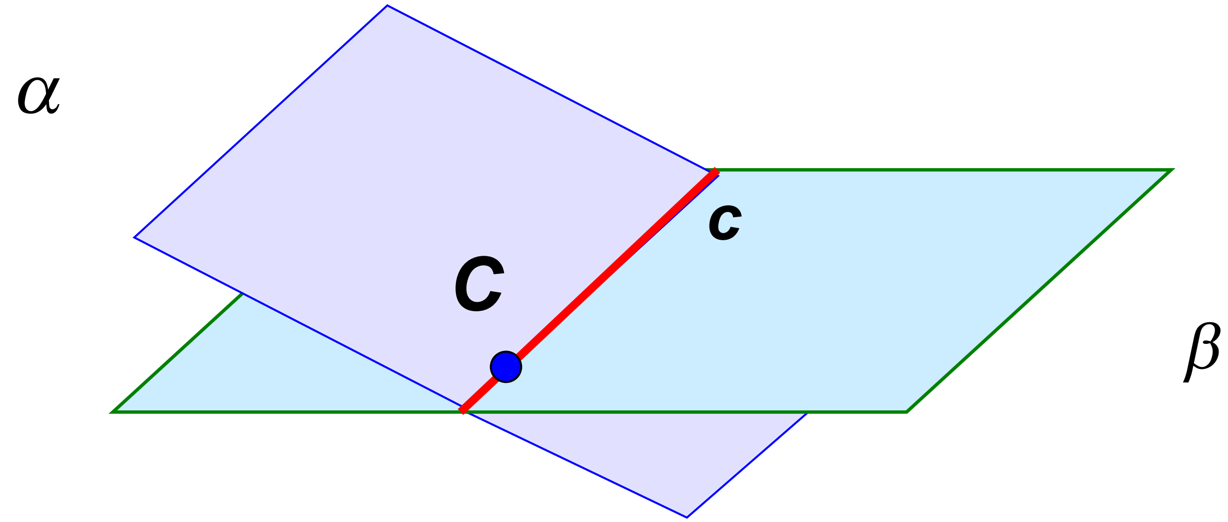
Аксиомы группы С

Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей



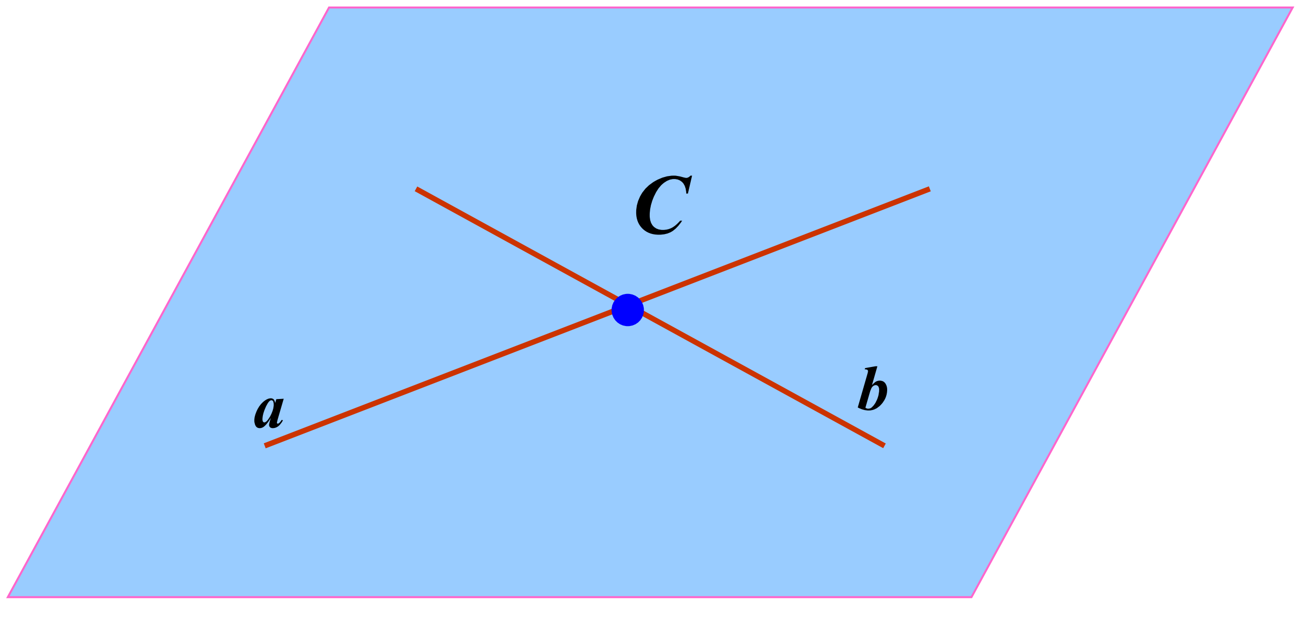
Аксиомы группы С

Если две различные плоскости имеют общую точку,
то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.



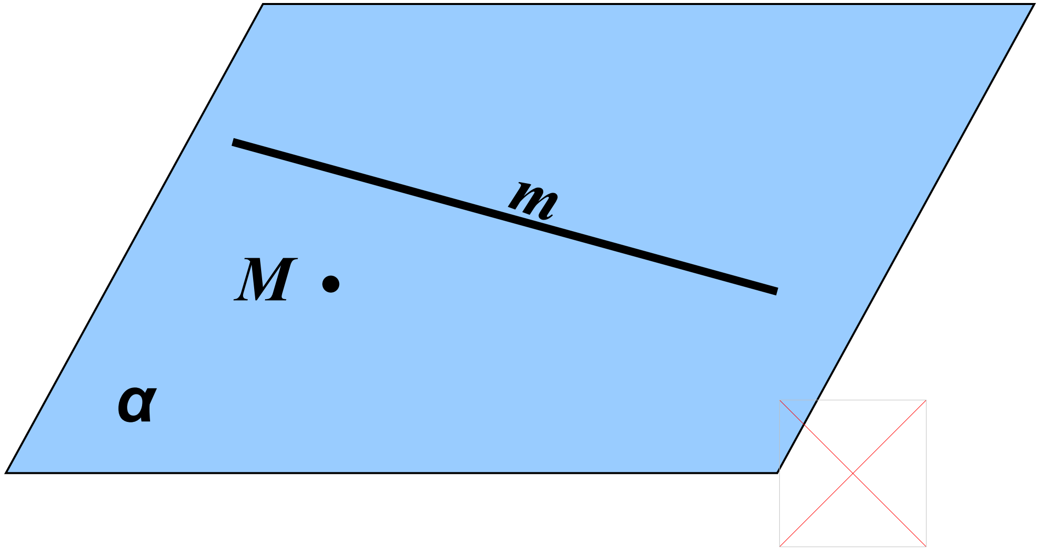
Аксиомы группы С

Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.



γ

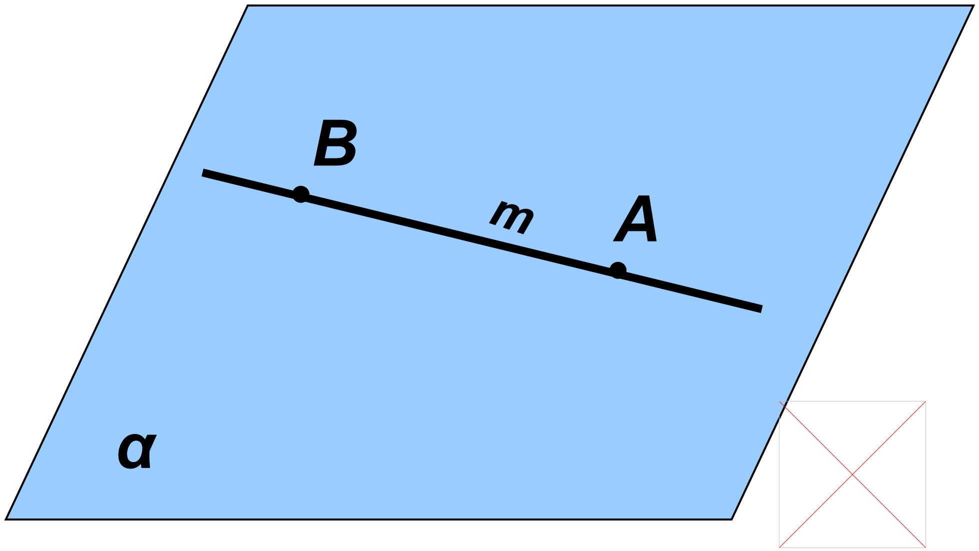
Следствия из аксиом



**Через любую прямую
и не принадлежащую ей точку
можно провести плоскость,
и притом только одну.**

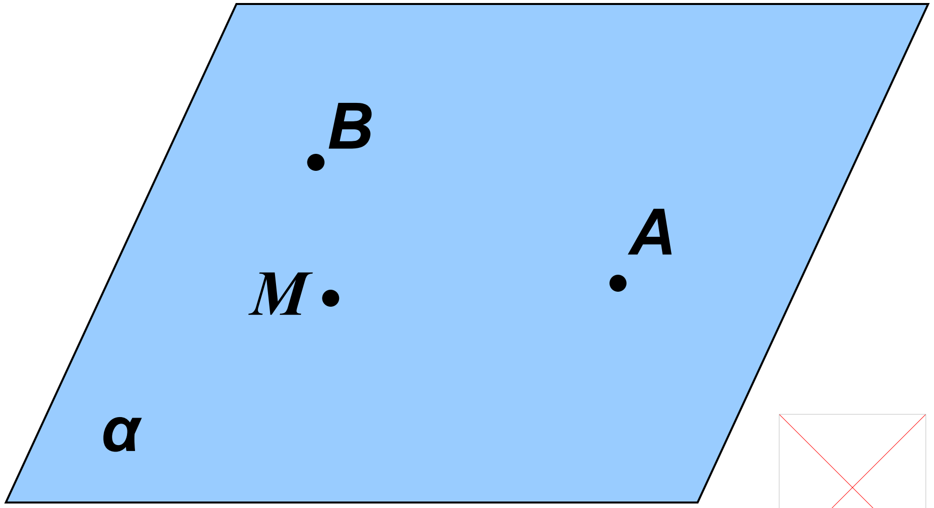
T_1

Следствия из аксиом



Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости

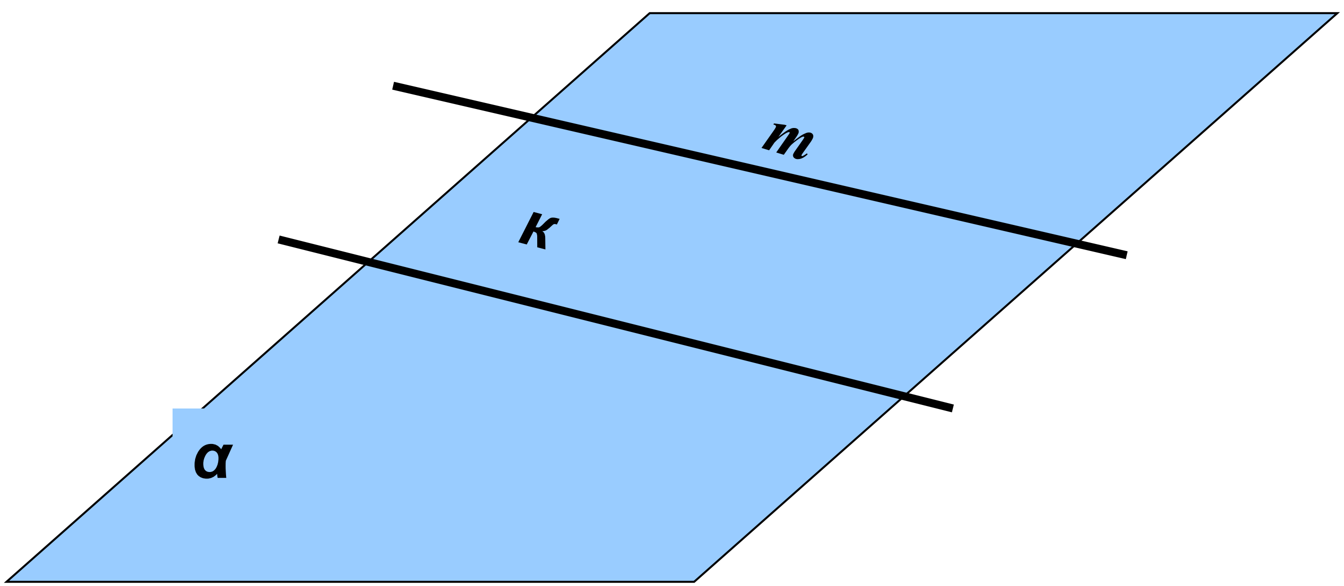
Следствия из аксиом



Через 3 точки,
не лежащие на одной прямой,
можно провести плоскость,
и притом только одну

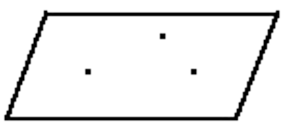
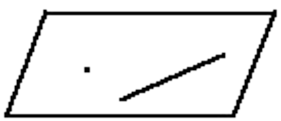
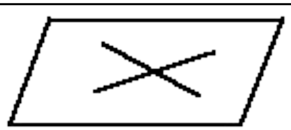
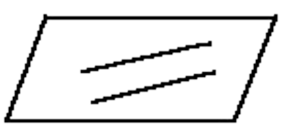
Следствие из T_1

Через две ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ прямые проходит плоскость, и притом только одна.



Вывод

в пространстве можно однозначно задать плоскость …

Способы задания плоскостей	*Рисунок*
1. По трем точкам	
2. По прямой и не принадлежащей ей точке.	
3. По двум пересекающимся прямым.	
4. По двум параллельным прямым.	

Определите: верно, ли утверждение?

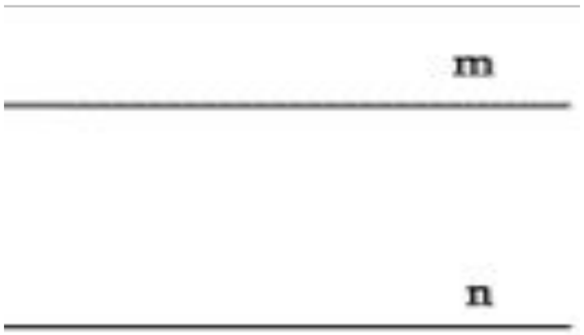
1. Любые три точки лежат в одной плоскости.	Д а
2. Любые четыре точки лежат в одной плоскости.	Нет
3. Любые четыре точки не лежат в одной плоскости.	Нет
4. Если прямая пересекает 2 стороны треугольника, то она лежит в плоскости треугольника.	Да
5. 5 точек не лежат в одной плоскости. Могут ли какие–нибудь 4 из них лежать на одной прямой?	Нет
6. Через середины сторон квадрата проведена плоскость. Совпадает ли она с плоскостью квадрата?	Да

Взаимное расположение Прямых и Плоскостей в пространстве

- Взаимное расположение Прямых в пространстве
- Взаимное расположение Плоскостей в пространстве
- Взаимное расположение Прямых и Плоскостей в пространстве

1. Параллельные Прямые

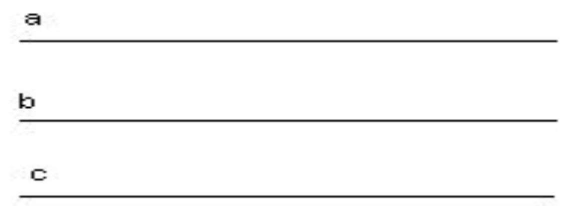
1) Параллельными прямыми называются прямые, которые лежат в одной плоскости и либо совпадают, либо не пересекаются.



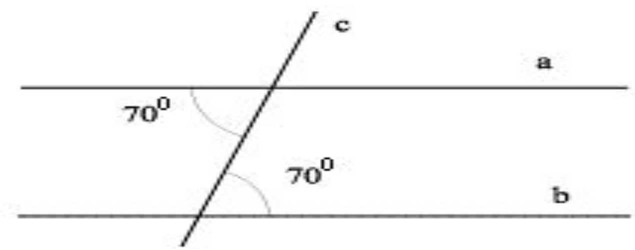
1. Параллельные Прямые

2) Признаки Параллельности:

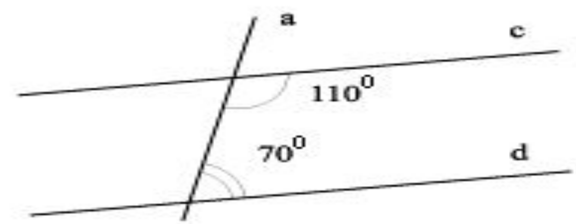
I. Две прямые, параллельные третьей - параллельны.



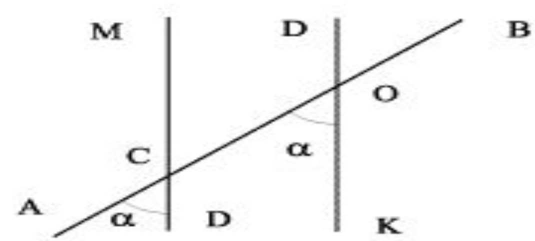
II. Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны



III. Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

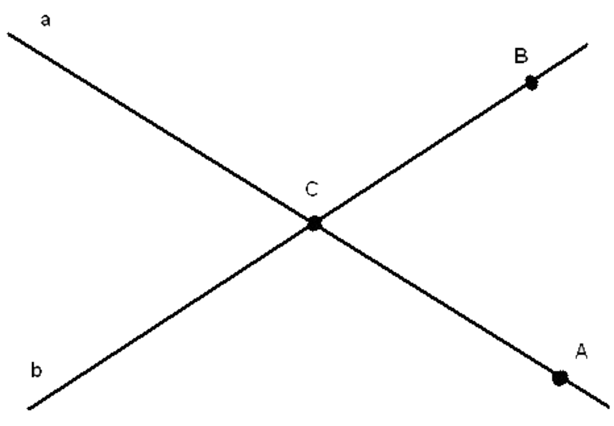


IV. Если соответственные углы равны, то прямые параллельны.



2. Пересекающиеся прямые

Две прямые называются **пересекающимися** если они имеют общую точку.

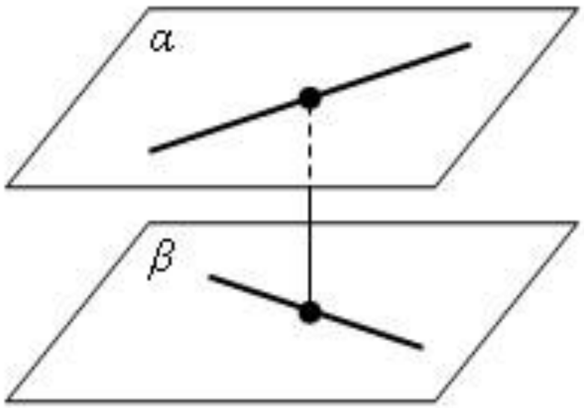


3. Скрещивающиеся прямые

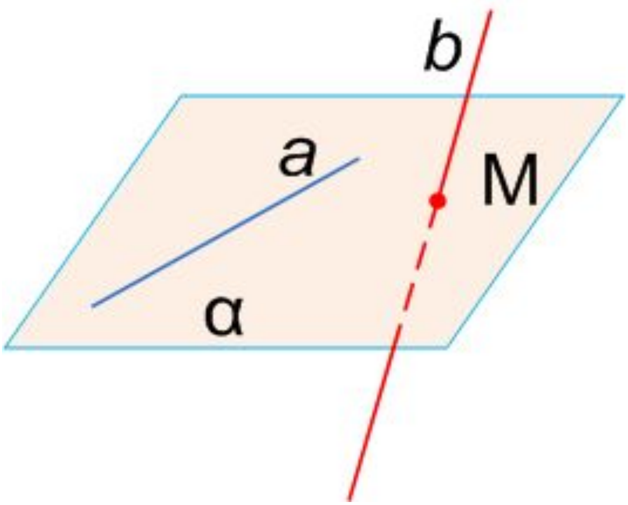
Прямые называются скрещивающимися,

если одна из прямых лежит в плоскости, а другая эту плоскость пересекает

в точке не принадлежащей первой прямой



Признак скрещивающихся прямых



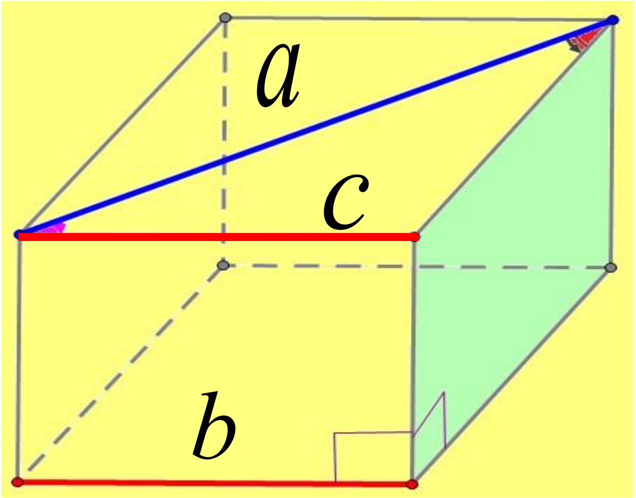
$a \in \alpha$

$b \cap \alpha = M$

$a\ b$ скрещивающиеся пр.

$M \notin a$

Угол между скрещивающимися прямыми



$Найти: \angle(a;b)$

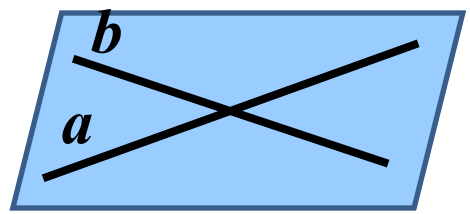
$\angle(a,b) = \angle(a,c),$

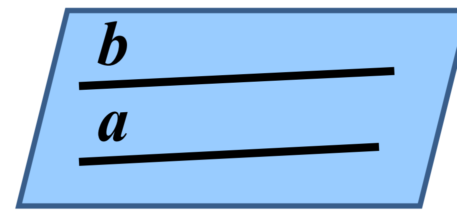
$где\ \ c \,||\, b$

Взаимное расположение прямых в пространстве

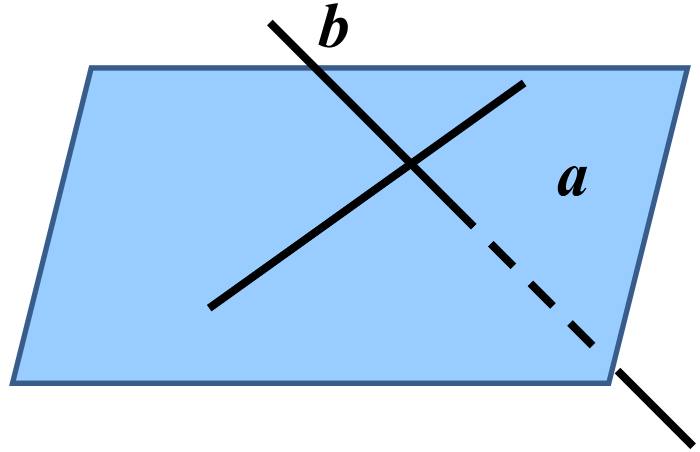
пересекаются **параллельны**

Лежат в одной плоскости





Не лежат в одной плоскости



скрещиваются

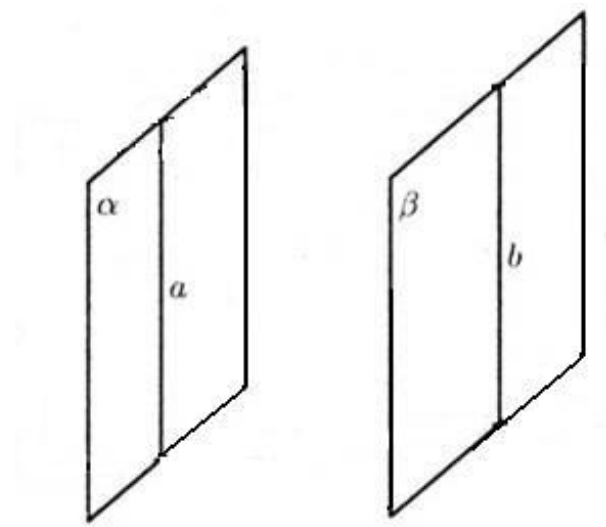
Взаимное расположение Плоскостей в пространстве

1) Параллельные плоскости
2) Пересекающиеся плоскости

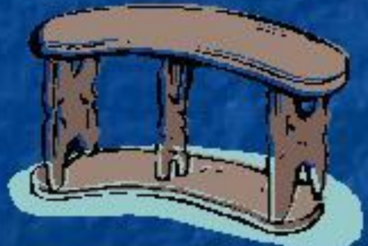
1. Параллельные плоскости

Плоскости,

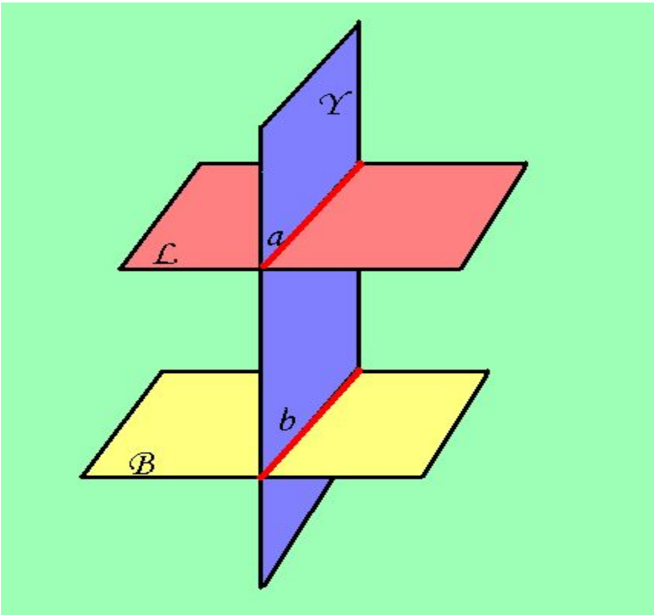
не имеющие общих точек, называются **Параллельными**



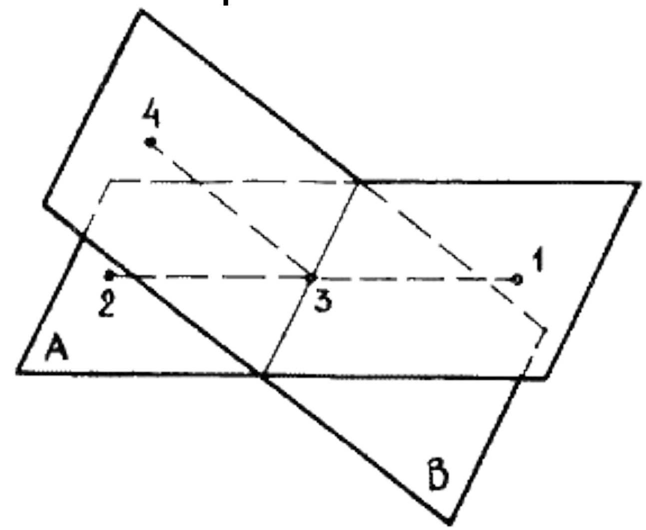
Примеры параллельных плоскостей

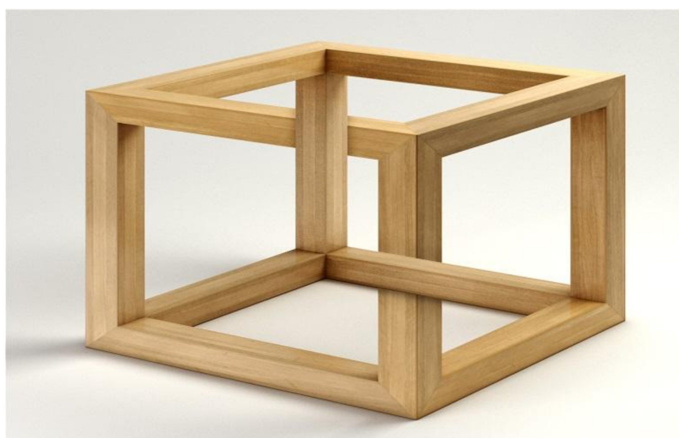


2. Пересекающиеся плоскости

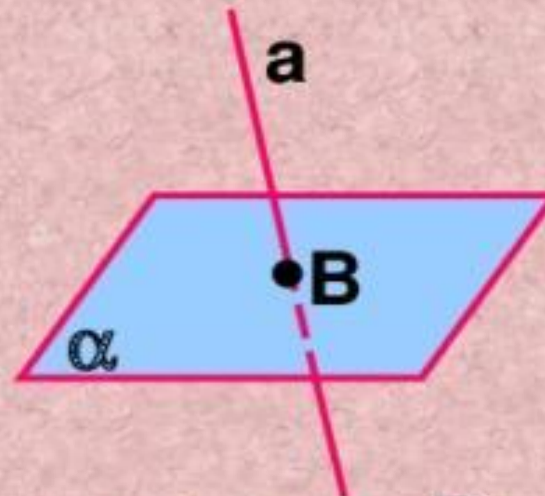


Плоскости называются **пересекающимися,** если они имеют общие точки

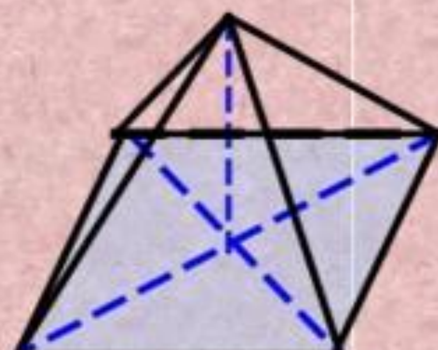




Прямая и плоскость называются *пересекающимися*, если у них есть одна общая точка.



$$a \cap \alpha = B$$

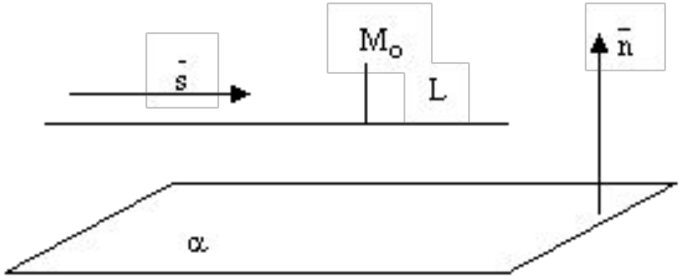


Взаимное расположение Прямых и Плоскостей в пространстве

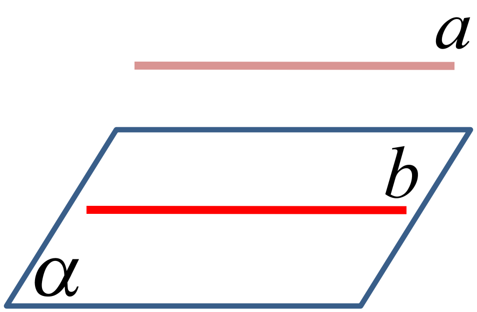
1. Параллельность плоскости и прямой
2. Пересечение плоскости и прямой
3. Перпендикулярность плоскости и прямой

1. Параллельность плоскости и прямой

- Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются и не имеют общих точек

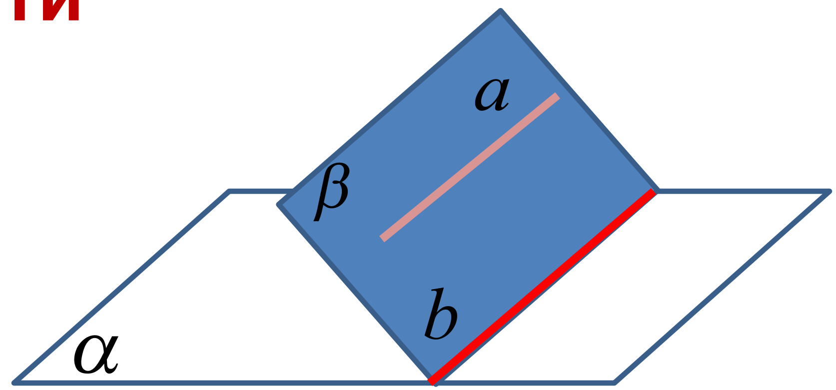


Параллельность прямой и плоскости



$$\left.\begin{array}{l} a \notin \alpha \\ a \parallel b \\ b \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel \alpha$$

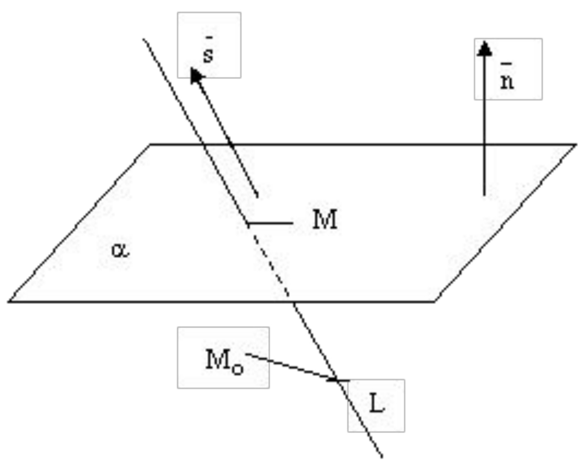
Важное следствие



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = b \\ a \parallel \alpha \\ a \in \beta \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel b$$

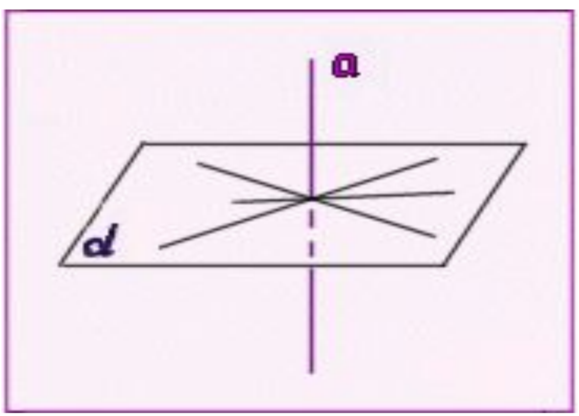
2. Пересечение плоскости и прямой

Плоскость и прямая называются **пересекающимися,** если они имеют общую точку **пересечения**



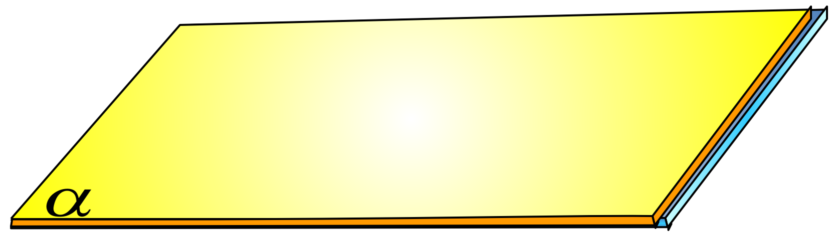
3. Перпендикулярность Плоскости и прямой

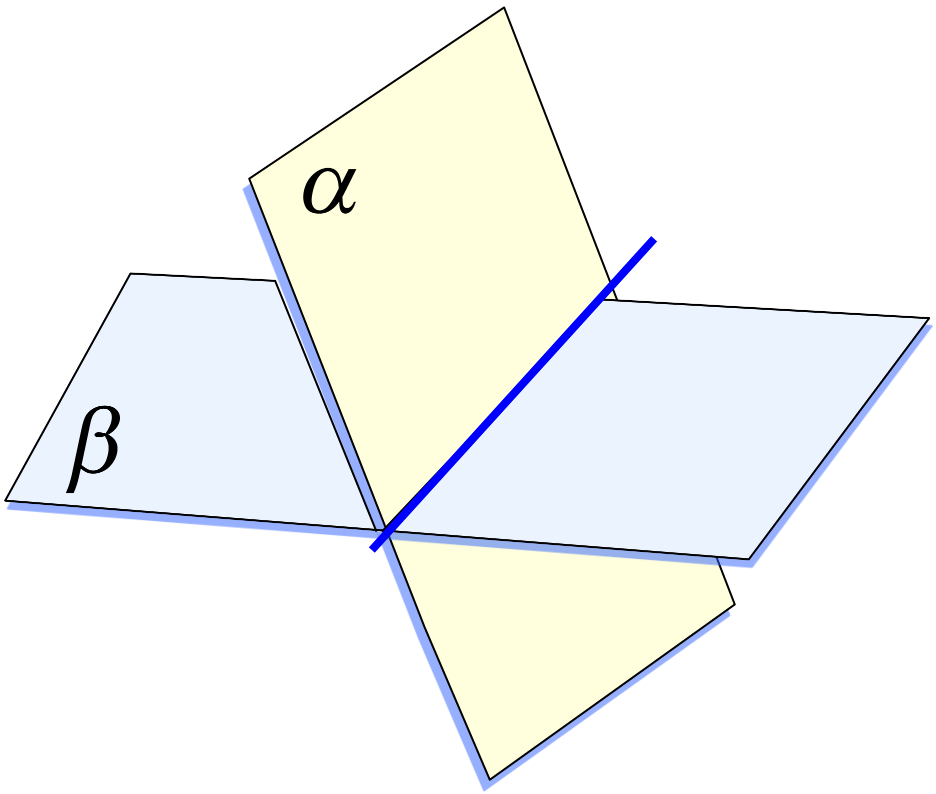
Прямая, пересекающая плоскость,
называется перпендикулярной этой плоскости,
если она перпендикулярна каждой прямой,
которая лежит в данной плоскости
и проходит через точку пересечения



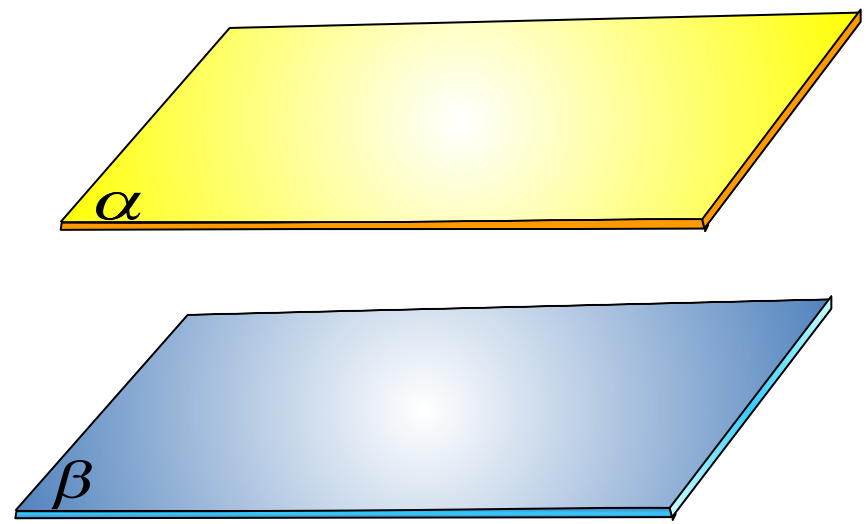
Расположение плоскостей в пространстве.

α *и* β *совпадают*





α ∩ β



α || β

Ответьте на вопросы:

- *Могут ли прямая и плоскость не иметь общих точек?* **Да**
- *Верно ли, что если две прямые не пересекаются, то они параллельны?* **Нет**
- *Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Верно ли, что прямая m параллельна плоскости β?* **Да**
- *Верно ли, что если прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей, то с другой плоскостью прямая a имеет одну общую точку?* **Нет**
- *Верно ли, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости?* **Нет**

Задание 1 Вставьте пропущенные слова

1) Единственную плоскость можно задать через три точки, при этом они *не лежат* на одной прямой.

2) Если *две* точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.

3) Две различные плоскости могут иметь только одну общую *прямую*

4) Прямые являются *параллельными* в пространстве, если они не пересекаются и *лежат* в одной плоскости.

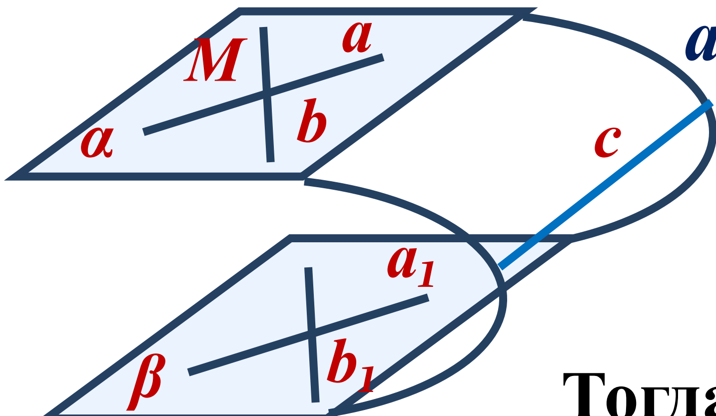
5) Если прямая a лежит в плоскости α, прямая b не лежит в плоскости α, но пересекает ее в точке B $\notin$ α, то прямые a и b скрещивающиеся

Задание 2 **Определите: верно, ли утверждение?**

1. Если прямая проходит через вершину треугольника, то она лежит в плоскости треугольника.	Нет
2. Если прямые не пересекаются, то они параллельны.	Нет
3. Прямая m параллельна прямой n, прямая m параллельна плоскости α. Прямая n параллельна плоскости α.	Да
4. Все прямые пересекающие стороны треугольника лежат в одной плоскости.	Да
5. Прямая AB и точки C, D не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые AB и CD пересекаться?	Нет

Признак параллельности двух плоскостей.

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Дано: $a \cap b = M$, $a \in \alpha$, $b \in \alpha$.

$a_1 \cap b_1$, $a_1 \in \beta$, $b_1 \in \beta$. $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$.

Доказать: $\alpha \parallel \beta$

Доказательство:

1. Пусть $\alpha \cap \beta = c$.

Тогда $a \parallel \beta$, $a \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = c$, значит $a \parallel c$.

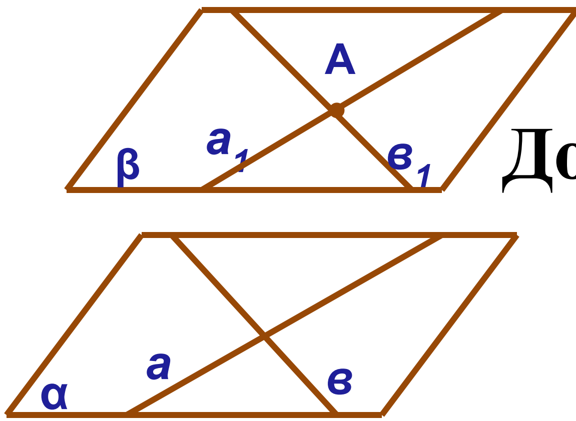
2. $b \parallel \beta$, $b \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = c$, значит $b \parallel c$.

3. Имеем, что через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c, чего быть на может.

Значит $\alpha \parallel \beta$.

Теорема

Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, причём единственную.



Дано: плоскость α, точка A вне плоскости α.

Доказать: существует плоскость β ∥ α, проходящая через точку A

Доказательство.

1. В плоскости α проведём прямые $a \cap в$.

Через точку A проведём $a_1 \parallel a$ и $в_1 \parallel в$.

По признаку параллельности плоскостей прямые a_1 и $в_1$ задают плоскость β ∥ α.

Существование плоскости β доказано.

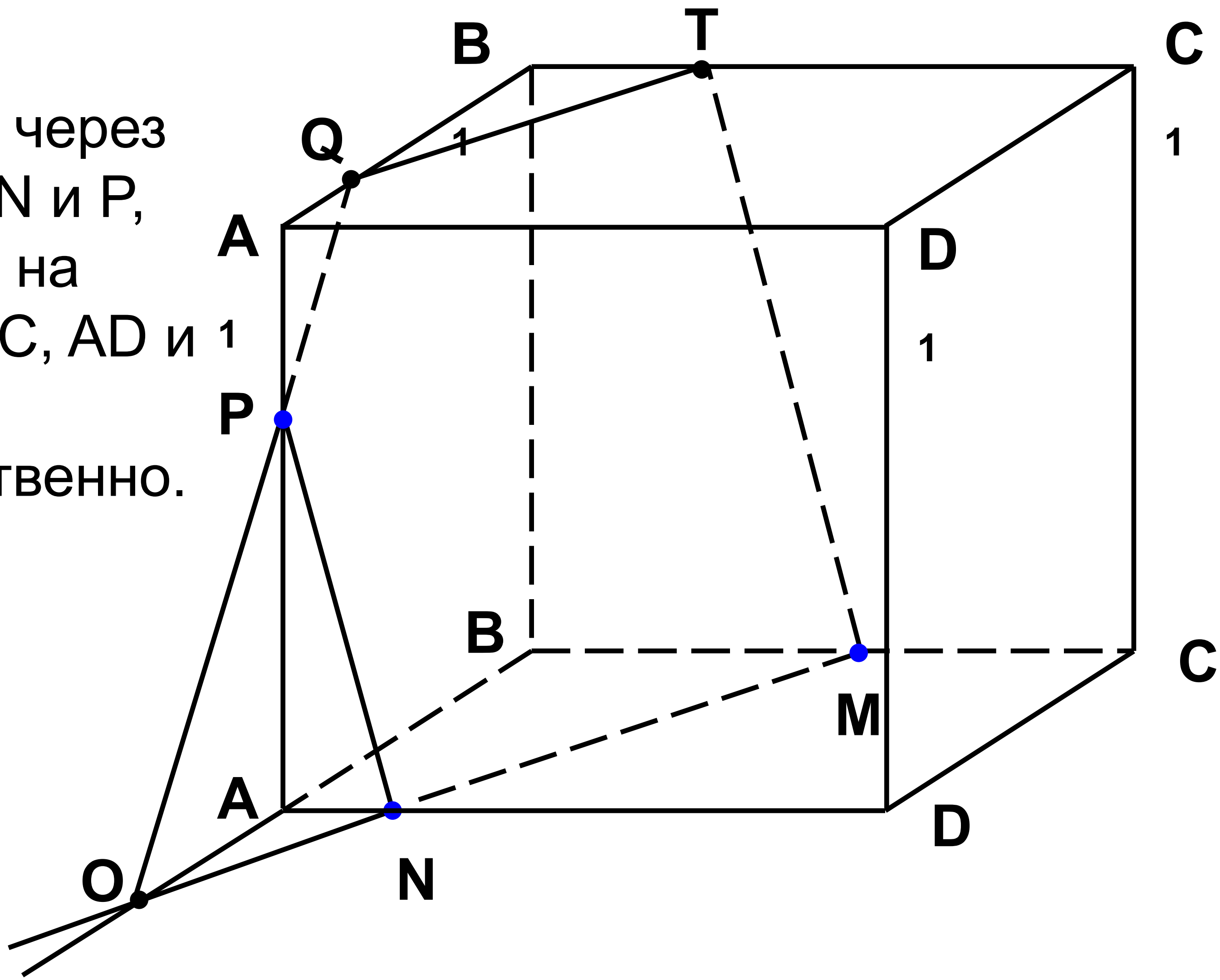
Определите: верно, ли утверждение?

1. если плоскости не пересекаются, то они параллельны. ДА
2. плоскости параллельны, если прямая лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости? НЕТ
3. если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны? НЕТ
4. если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости. ДА
5. прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны. ДА
6. Если прямая пересекает одну из двух плоскостей, то она пересекает и другую. НЕТ
7. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны. ДА
8. Отрезки прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны. НЕТ

№6

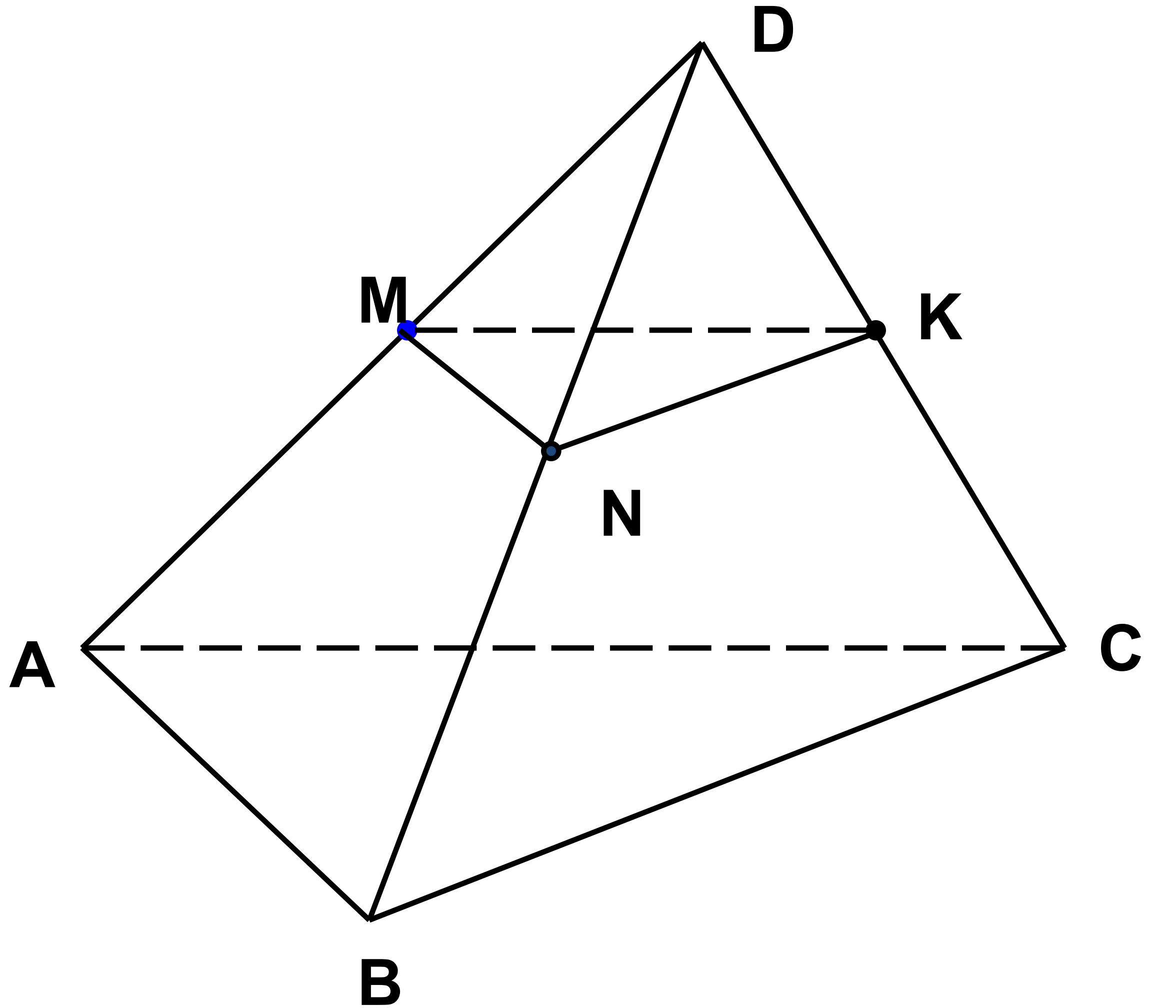
Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Сечение проходит через точки M, N и P, лежащие на рёбрах BC, AD и AA_1 соответственно.



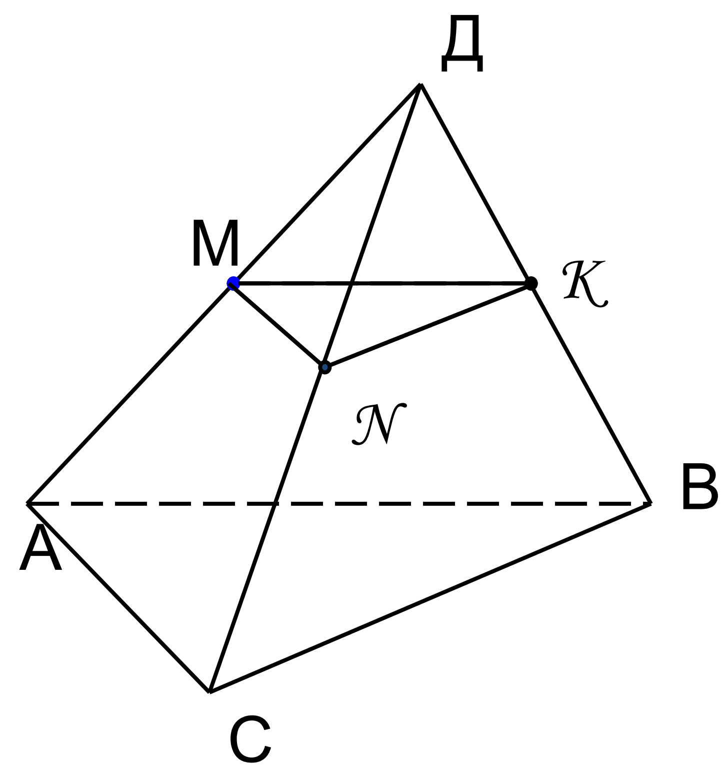
№2

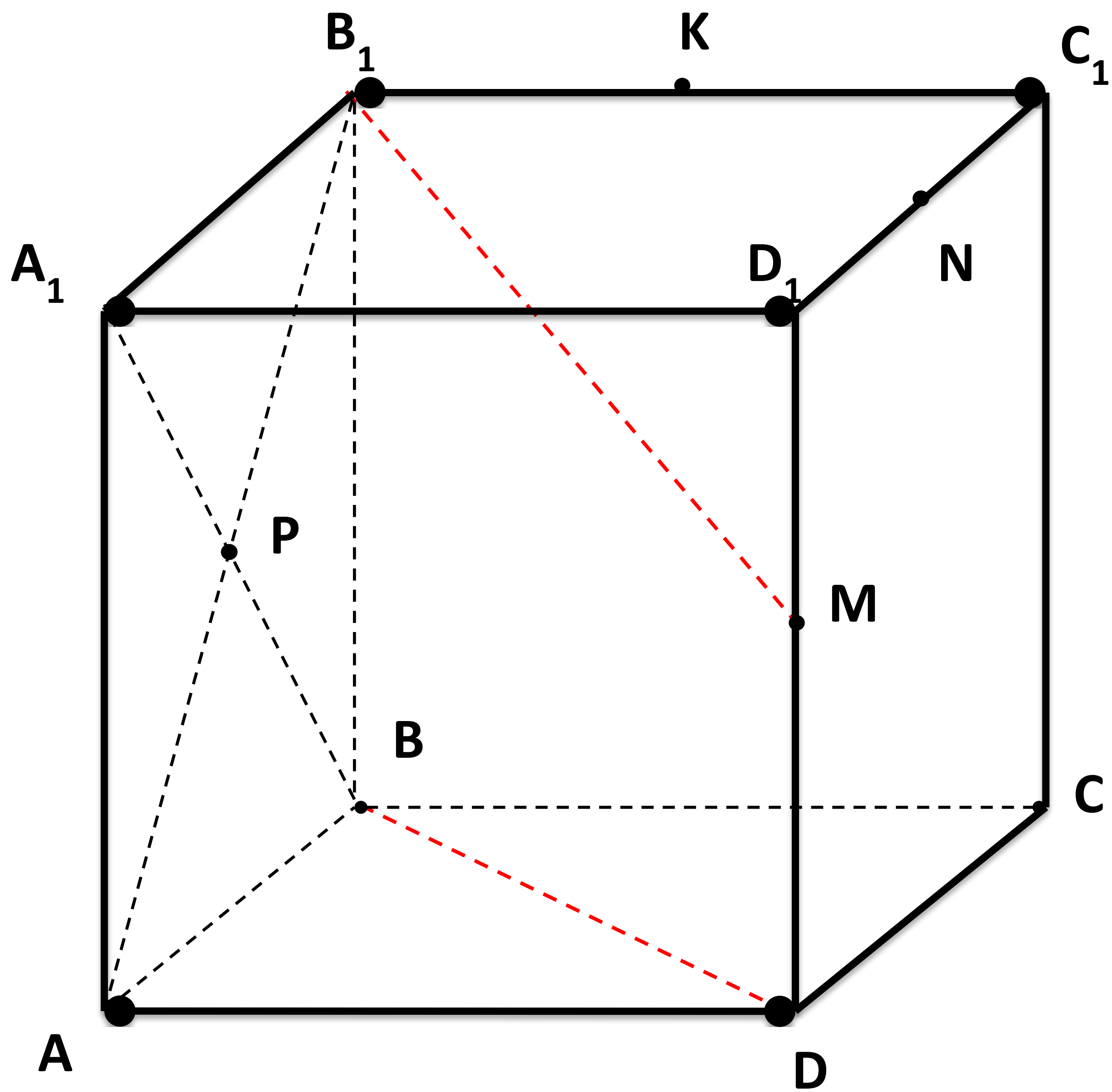
Тетраэдр DABC



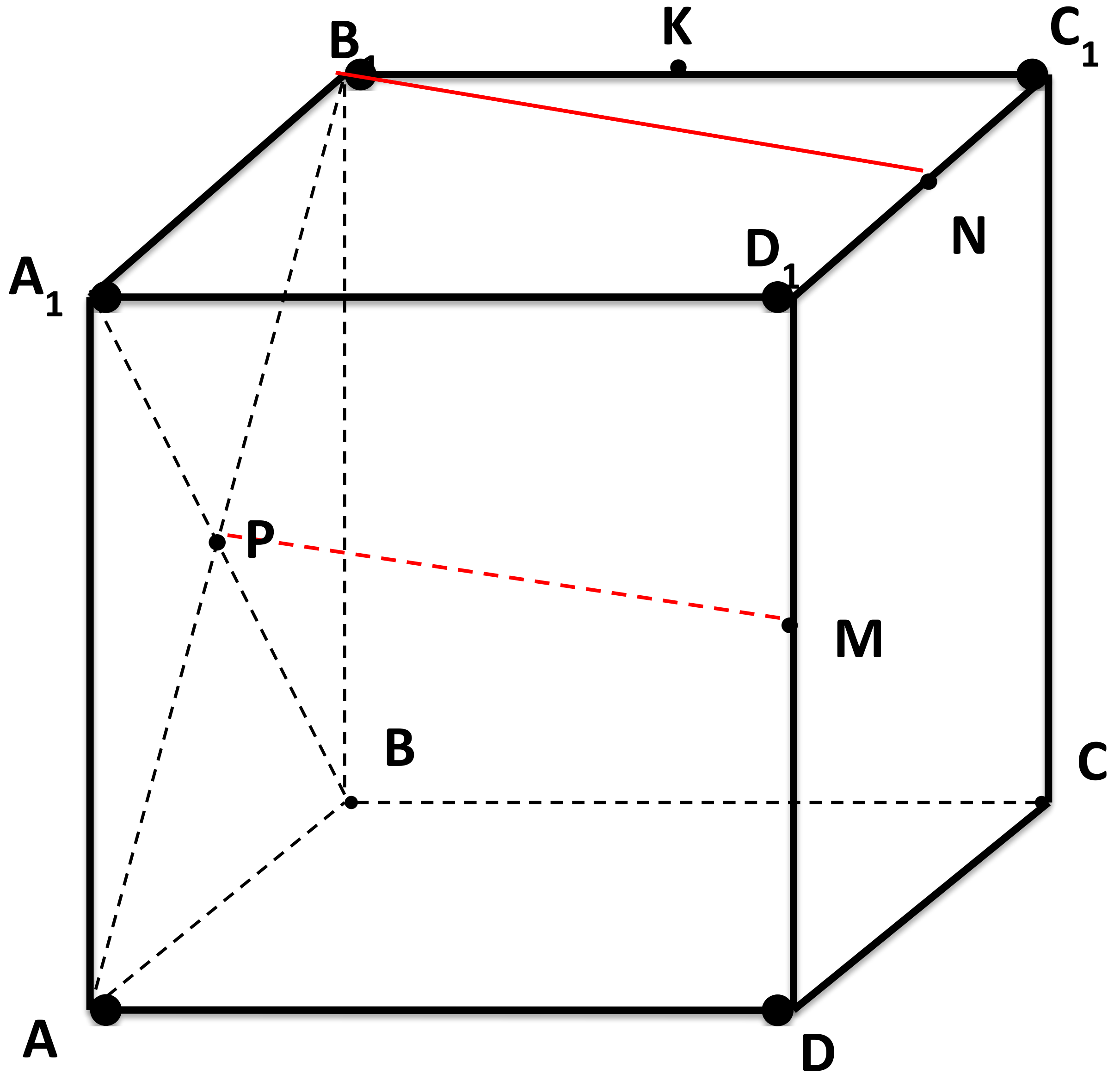
Сечение проходит через точку M, лежащую на ребре DA, параллельно грани ABC.

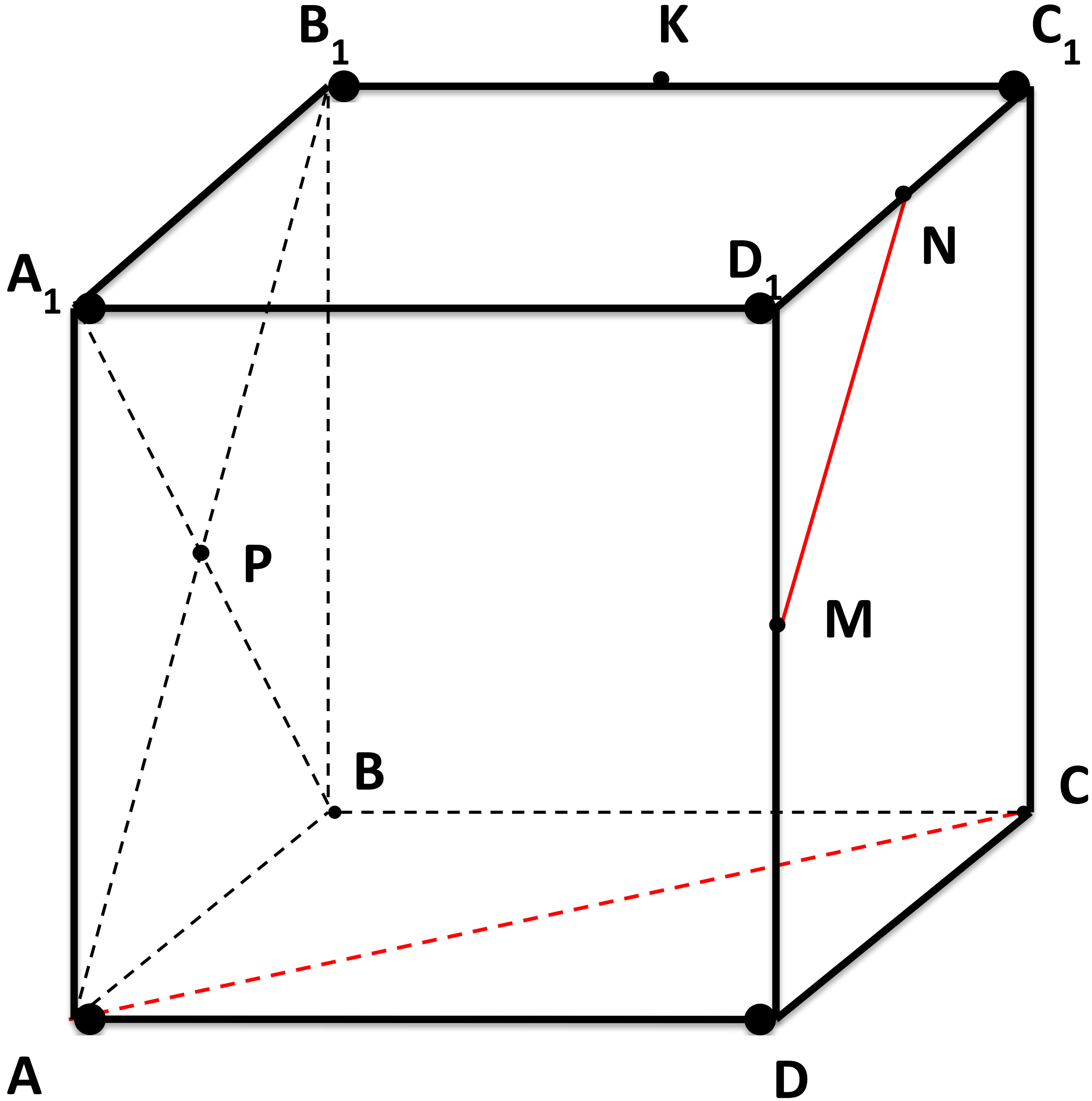
Найти: площадь сечения, тетраэдра с ребром равным 3 см, если точка М – середина ребра ДА.



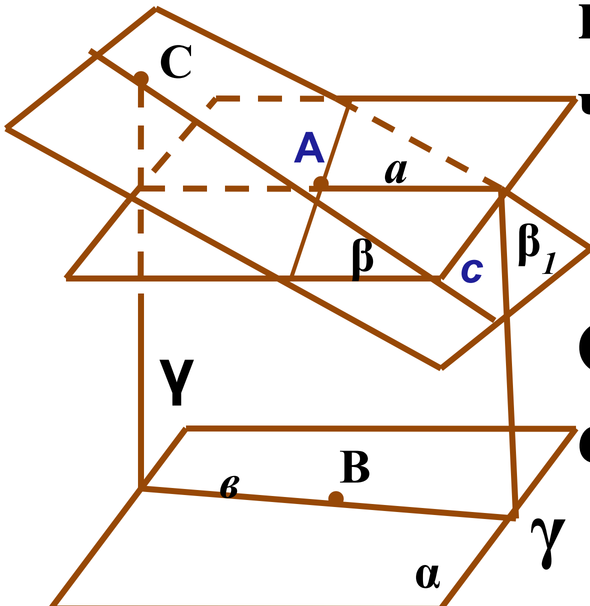


B1
K
C1
A1
D1
N
P
M
B
C
A
D


B
K
C
1
N
A
1
D
1
P
M
B
C
A
D


B$_1$
K
C$_1$
A$_1$
D$_1$
N
P
M
B
C
A
D

Докажем единственность плоскости β методом от противного.



Допустим, что существует плоскость β_1, которая проходит через т. A и β1 || α.

Отметим в плоскости β_1 т. C∉ β.

Отметим произвольную т. B ∈ α.

Через точки A, B и C проведем γ.

$\gamma \cap \alpha = в$, $\gamma \cap \beta = a$, $\gamma \cap \beta_1 = c$.

a* и *c* не пересекают плоскость α, значит они не пересекают прямую *в*, ⇒ a || *в* и c || *в

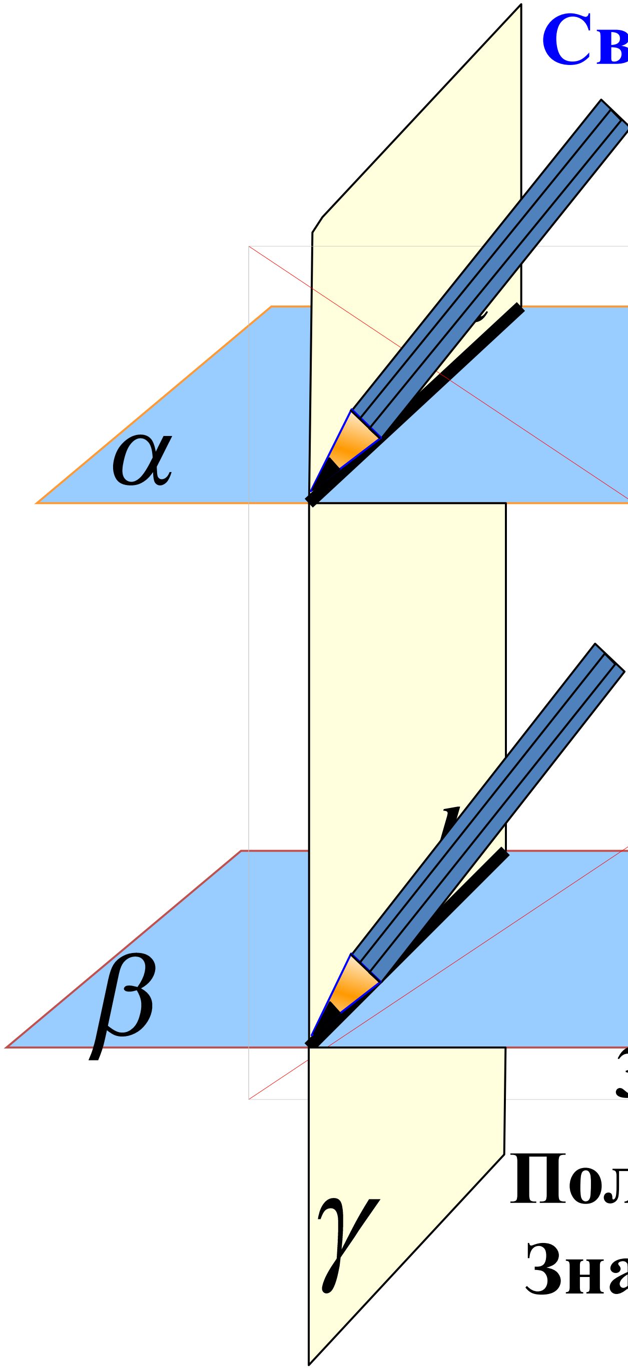
Получили, что через т. A проходят две прямые, параллельные прямой *в*, чего быть не может.

⇒ наше предположение ложное.

Единственность β доказана.

Свойство параллельных плоскостей.

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.



Дано:

$\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$

$\beta \cap \gamma = b$

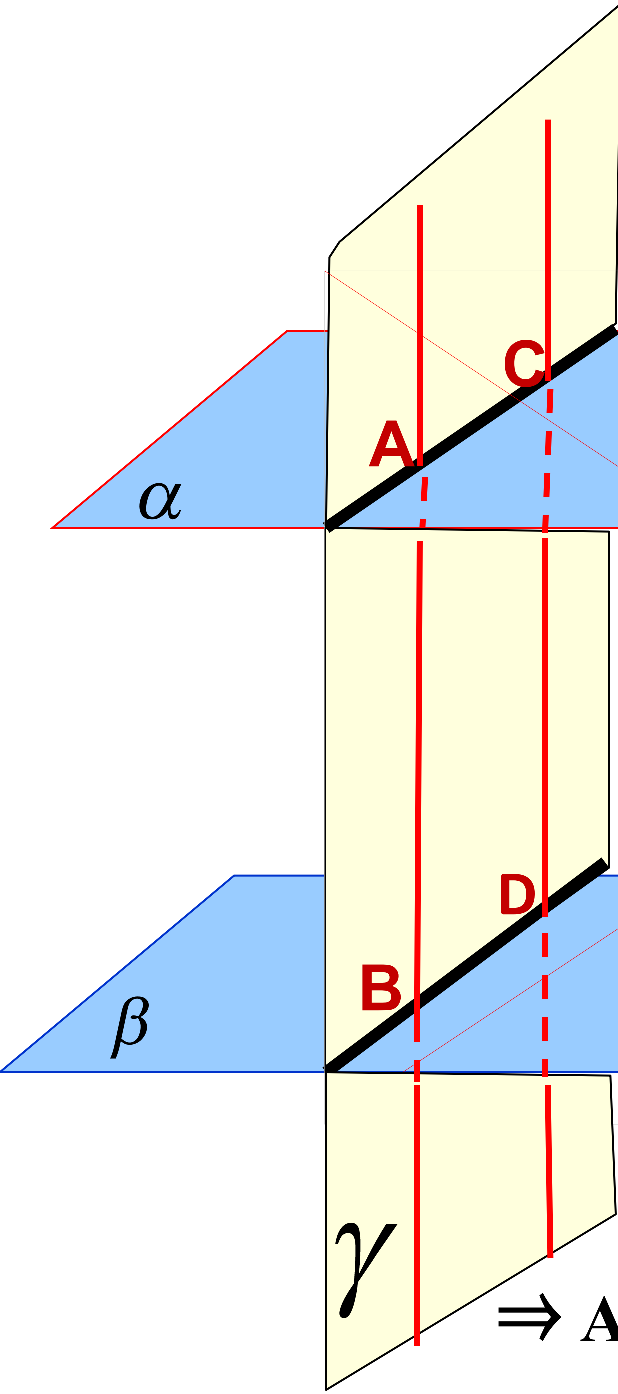
Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:

1. $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$
2. Пусть $a \nparallel b$, тогда $a \cap b = M$
3. $M \in \alpha$, $M \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = c$ (A_2)

Получили противоречие с условием.

Значит $a \parallel b$ **ч. т.д.**



Свойство параллельных плоскостей.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Дано:

α || β, AB || CD

AB ∩ α = A, AB ∩ β = B,

CD ∩ α = C, CD ∩ β = D

Доказать: AB = CD

Доказательство:

1. Через AB || CD проведем γ

2. α || β, α ∩ γ = *a*, β ∩ γ = *b*

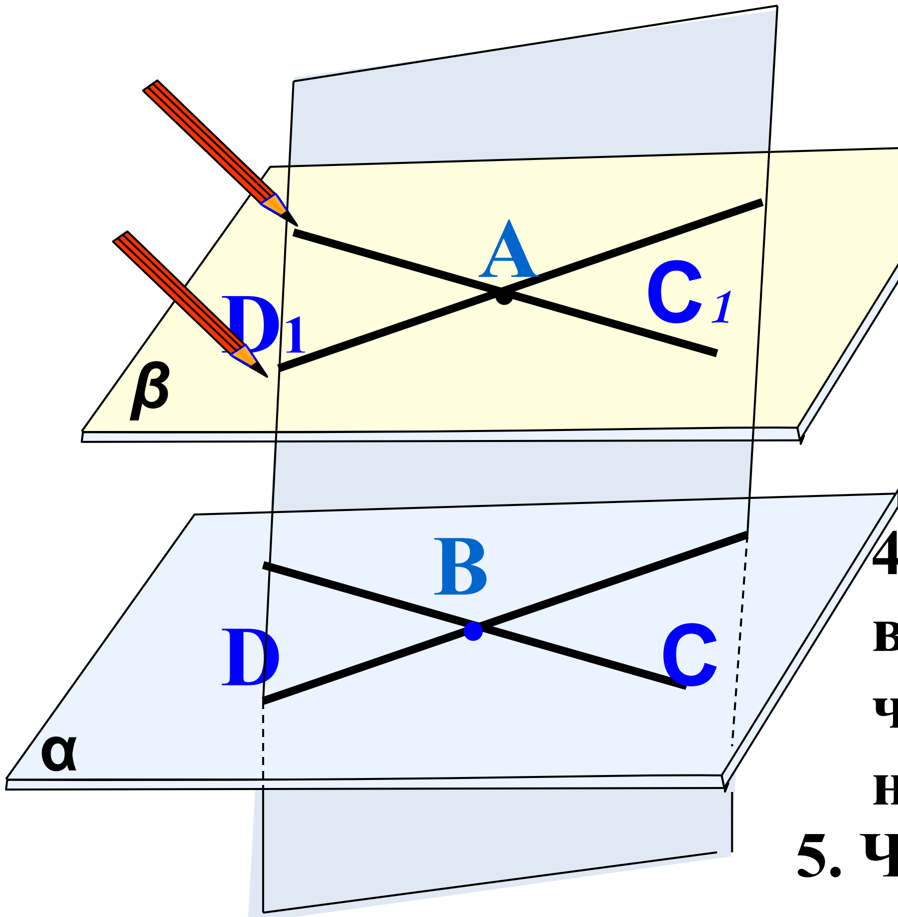
3. ⇒ AC || B D,

4. AB || CD (как отрезки парал. прямых)

5. ⇒ ABCД – параллелограмм (по опр.)

⇒ AB = CD (по свойству параллелограмма)

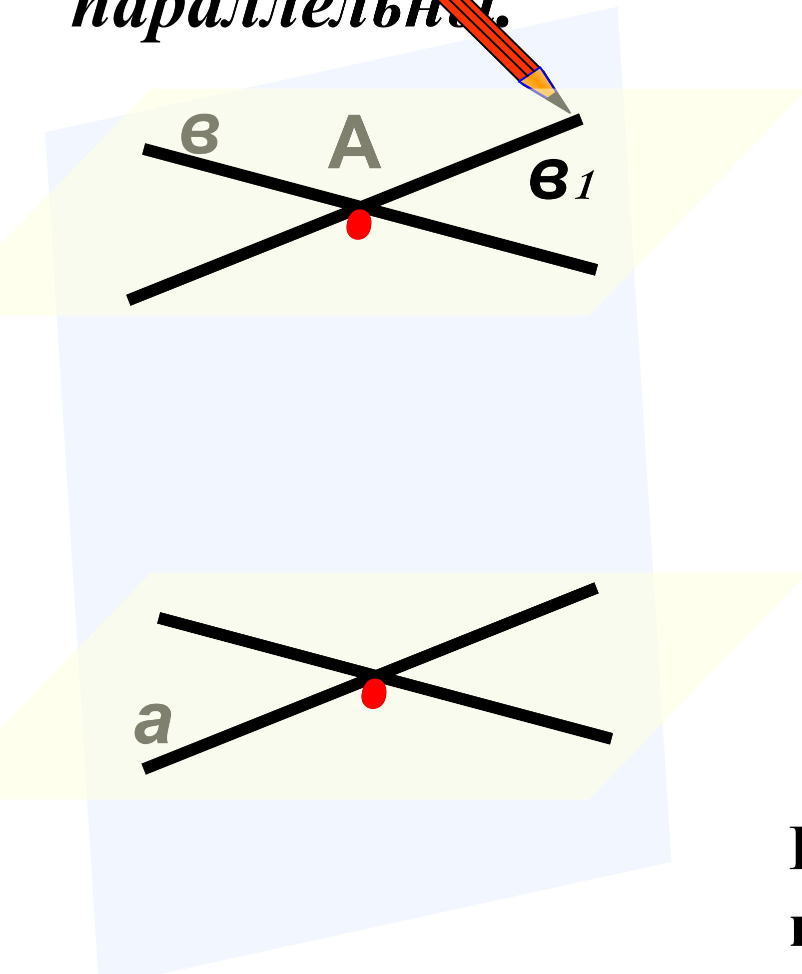
Через данную точку А провести плоскость, параллельную данной плоскости α, не проходящей через точку.



Решение.

1. В плоскости α возьмем т. В.
2. Проведем прямые ВС и ВD.
3. Построим вспомогательную плоскость через точку А и прямую ВD, в ней проведем прямую $AD_1 \parallel BD$.
4. Аналогично построим вспомогательную плоскость через точку А и прямую ВС, в ней проведем прямую $AC_1 \parallel BC$.
5. Через прямые AD_1 и AC_1 проведем плоскость β

Задача 2. ***Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.***



Доказательство:

Пусть *а* скрещивается с *в*.

На прямой *в* возьмем т. А, через прямую *а* и т. А проведем плоскость,

в этой плоскости через т. А проведем прямую $в_1$, $в_1 \parallel в$.

Через $в_1 \cap в$ проведем плоскость α.

Аналогично строим плоскость β.

По признаку параллельности плоскостей α || β.