

Вероятностные аспекты ТПИ

Измерения как случайный процесс.

Эмпирические исследования больших рядов измерений –

- Число положительных погрешностей примерно равно числу отрицательных;
- Число малых по абсолютной величине погрешностей намного превышает число больших;
- Погрешности по абсолютной величине не превосходят какого-то известного предела;
- Погрешности группируются около определенного значения, к которому стремится среднее. Из первого свойства, это 0.

Вероятностные аспекты ТПИ

Выводы о виде функции плотности:

- функция *симметрична* (свойство 1),
 - функция имеет ярко выраженный *максимум* и симметрично *спадает* к краям (свойства 2),
 - функция *усечена* по какому-то уровню (свойство 3),
 - в качестве *центра группировки* (оценки математического ожидания) будет *ноль* (свойство 4).
- вероятность погрешности зависит от величины этой погрешности.*

Удовлетворяет масса длинных рядов погрешностей измерений.

Вероятностные аспекты ТПИ

Гаусс:

$$P = \varphi(\varepsilon_1) \cdot \varphi(\varepsilon_2) \cdot \dots \cdot \varphi(\varepsilon_n) = \max$$

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \qquad h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$$

$$D(\varepsilon) = m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{m^2}}$$

Вероятностные аспекты ТПИ

*Закон Гаусса –
основные характеристики: среднее
арифметическое и средняя
квадратическая погрешность.*

Дополнительные свойства:

-*независимость, т.е. средняя сумма попарных произведений
двух рядов $\varepsilon i'$ и $\varepsilon i''$ равно нулю*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\varepsilon' \cdot \varepsilon'']}{n} = 0$$

-*рассеивания, при измерениях в **одних** условиях, имеем*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \bar{m}^2 = D(\varepsilon)$$

Свойства *систематических погрешностей*:

$$|\theta| < \theta_{пред.}$$

- ограниченность,
- отсутствие компенсации,
- отсутствие независимости,
- отсутствие свойства рассеивания
- отсутствие симметричности и унимодальности.

Вероятностные аспекты ТПИ

Случайные погрешности:

- **НЕВОЗМОЖНО** устранить из единичных результатов наблюдений.
- влияние можно лишь **ослабить** оптимальной организацией измерений и обработки.
- основные свойства проявляются в массе.

Систематические погрешности:

- имеют физический закон образования и функционирования.
- устраняются в единичных результатах измерений, введением поправок или организацией процесса.

Вероятностные аспекты ТПИ

Меры точности результатов измерений — степень рассеивания измерений вокруг истинного значения.

Необходимость усреднения, виды:

$$\tilde{D}_1(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\tilde{D}_2(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

Первая — основа классической ТПИ.

Из т. Чебышева и Ляпунова —

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}$$

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}$$

Вероятностные аспекты ТПИ

Нет истинных погрешностей. Подход Бесселя на основе результатов измерений.

$$\Delta_i = x_i - a$$

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

$$\Delta_i = v_i + \bar{x} - a = v_i + \delta$$

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = m^2 = \frac{[v^2]}{n} + 2 \cdot \frac{[v]}{n} \cdot \delta + \frac{n\delta^2}{n} \quad \text{Лемма Гаусса: } [v] = 0$$

Лемма Гаусса: $[v] = 0$

[illegible]

$$[v] = [x] - n\bar{x} = [x] - n \frac{[x]}{n} = 0$$

$$\delta = \frac{m^2}{n} \quad m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{m^2}{n} \quad m^2 - \frac{m^2}{n} = m^2 \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right) = \frac{[v^2]}{n}$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Вероятностные аспекты ТПИ

Использование т. Чебышева и Ляпунова для второй гауссовской усредненной меры точности:

среднюю абсолютную погрешность (средняя погрешность)

$$\vartheta = M(|\varepsilon|) \approx \frac{\overline{|\varepsilon|}}{n}$$

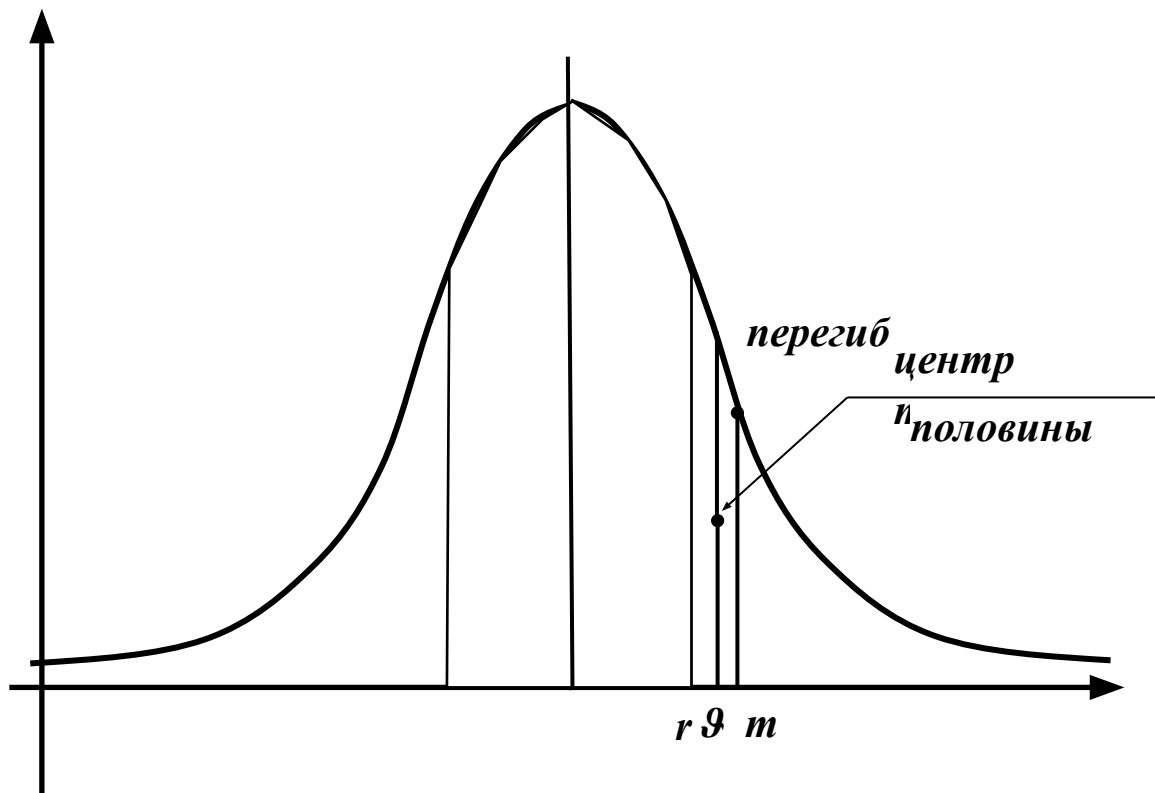
срединная (вероятная) погрешность r – такая величина, **большие** которой и **меньшие** которой по модулю погрешности в ряде измерений **равновозможные**:

$$P(|\Delta| \leq r) = 0.5$$

Вычисление по вариационному ряду.

Вероятностные аспекты ТПИ

Графическое выражение погрешностей:



Вероятностные аспекты ТПИ

Связь между погрешностями:

$$\frac{|\varepsilon|}{m} = t \qquad M\left(\frac{|\varepsilon|}{m}\right) = \frac{M(|\varepsilon|)}{m} = \frac{\vartheta}{m} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$m = \vartheta \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.2533... \cdot \vartheta$$

$$\Phi\left(\frac{r}{m}\right) = 0.5 \qquad \frac{r}{m} = 0.6745...$$

$$m = 1.4825... \cdot r$$

Вероятностные аспекты ТПИ

Другие меры точности:

- коэффициент вариации

$$V = \frac{m}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

- полуразмах

$$R = \frac{x_{\max.} - x_{\min.}}{2}$$

-относительные погрешности

$$\left\{ \frac{m}{x}, \frac{r}{x}, \frac{\vartheta}{x}, \frac{R}{x}, \frac{\Delta}{x} \right\} = \frac{1}{N}$$

-предельные погрешности, коэффициенты **2, 2.5, 3**, для вероятностей **0.95, 0.99 и 0.9973**