ЭЛЕКТОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Лекция 8

Тема занятий

1 Электрические колебания

2 Квазистационарные токи

3 Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

4 Затухающие электрические колебания

5 Вынужденные электрические колебания. Резонанс

6 Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

7 Сложение электрических колебаний (фигуры Лиссажу,)

Общие сведения о колебаниях

Колебаниями называются процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени

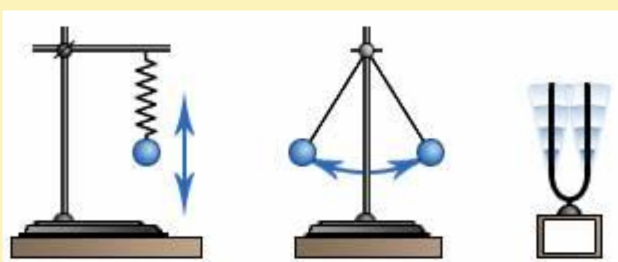
В зависимости от природы различают:

- Механические колебания
- Электрические колебания

Механические и электрические колебания

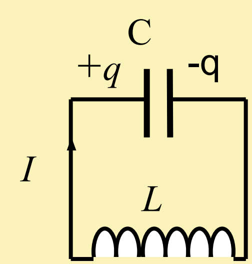
Механические колебания

– это *механическое* движение тела или системы тел которое обладает повторяемостью во времени



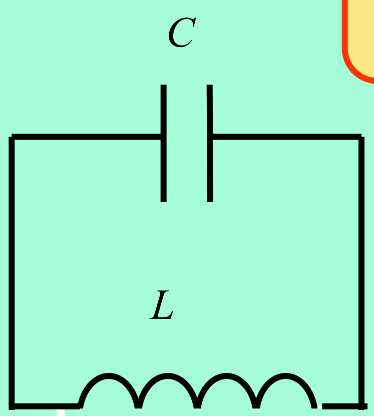
Электрические колебания

– это колебания *электрических и магнитных полей* которые сопровождаются периодическим изменением заряда тока и напряжения



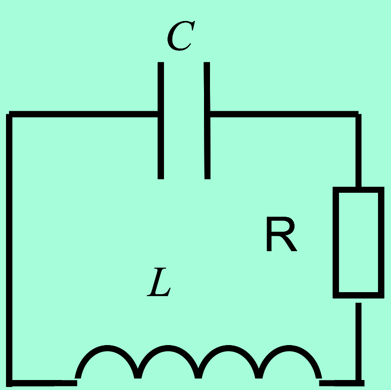
Колебательный контур

Колебательный контур



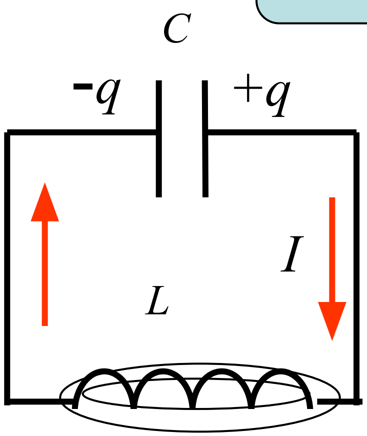
Простейшей системой где могут возникать и существовать электрические колебания является колебательный контур.

Колебательный контур – цепь состоящая из последовательно включенных катушки индуктивности L и конденсатора C (идеальный контур).



Реальный колебательный контур кроме катушки индуктивности и конденсатора содержит активное сопротивление R а также сопротивление проводов катушки и соединительных проводов.

Возбуждение электрических колебаний



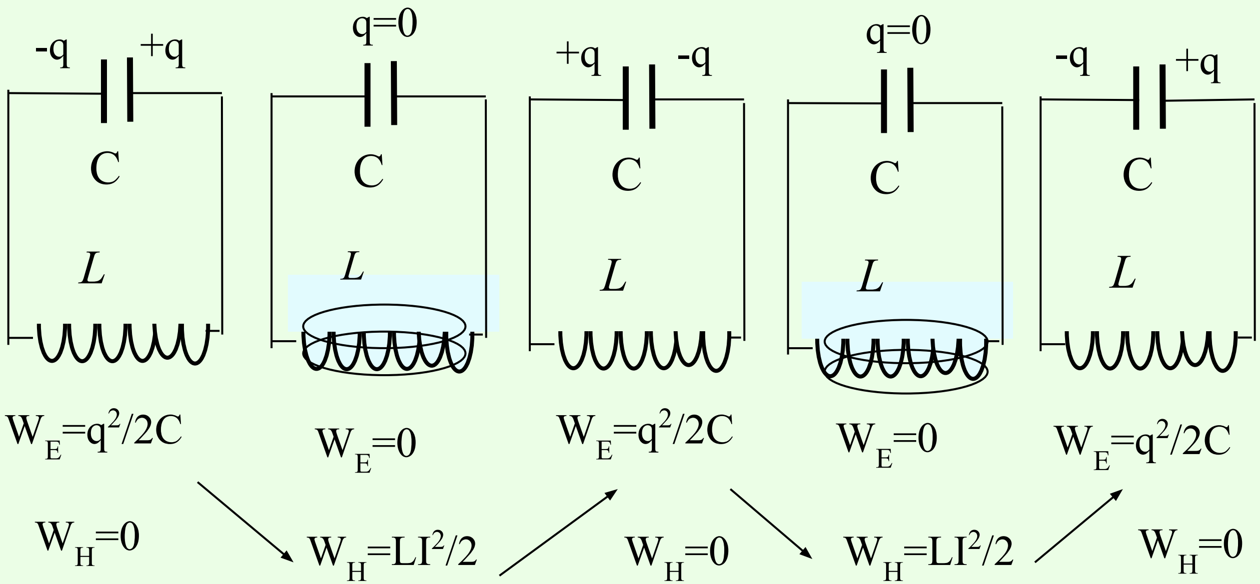
Если зарядить конденсатор и замкнуть на катушку, то по катушке потечет ток.

$$\varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt}$$

Когда конденсатор разрядится ток в цепи не прекратится из – за самоиндукции в катушке. Индукционный ток, в соответствии с правилом Ленца, будет течь в ту же сторону и перезарядит конденсатор.

Ток в данном направлении прекратится, и процесс повторится в обратном направлении. Таким образом, *в колебательном контуре будут происходить электрические колебания.*

Работа колебательного контура



$$W_K = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow W_П = \frac{m\upsilon^2}{2} \Rightarrow W_K = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow W_П = \frac{m\upsilon^2}{2} \Rightarrow W_K = \frac{kx^2}{2}$$

Происходит превращение энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки и наоборот.

Характеристики колебательного контура

Электрические колебания в контуре – гармонические.

Это означает, что заряд , напряжение на конденсаторе, сила тока в цепи, энергия изменяются по закону :

$$\boxed{q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)}$$ или $$\boxed{q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

где q_m - *амплитуда колебаний, максимальное значение заряда;*

ω_0 - *круговая или циклическая частота колебаний; (рад/с)*

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$$

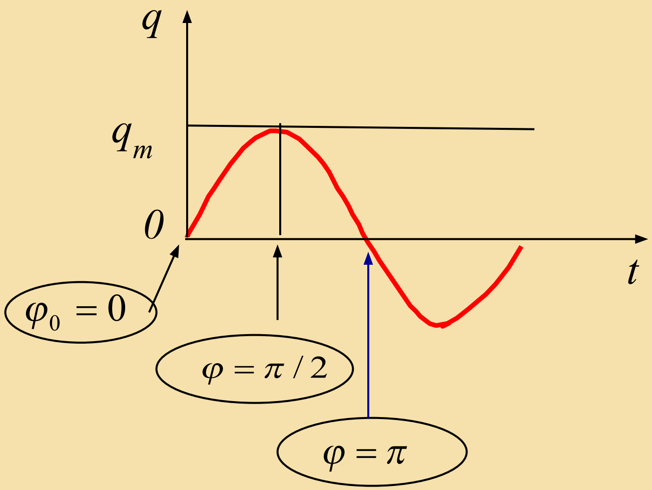
ν - *частота колебаний (число колебаний в ед. времени)*

T - *период колебаний*

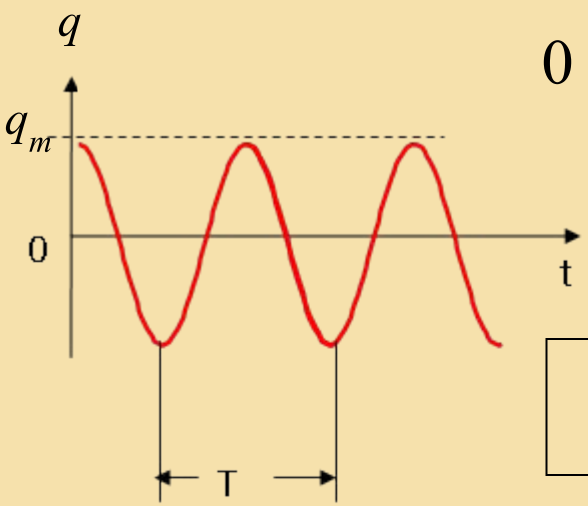
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$$

Формула Томсона

Характеристики колебательного контура



$(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний (состояние колеблющейся величины в данный момент времени)



0

φ_0 – начальная фаза колебаний (определяет смещение колеблющейся величины в момент начала отсчета времени).

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$\varphi_0 = \pi / 2$

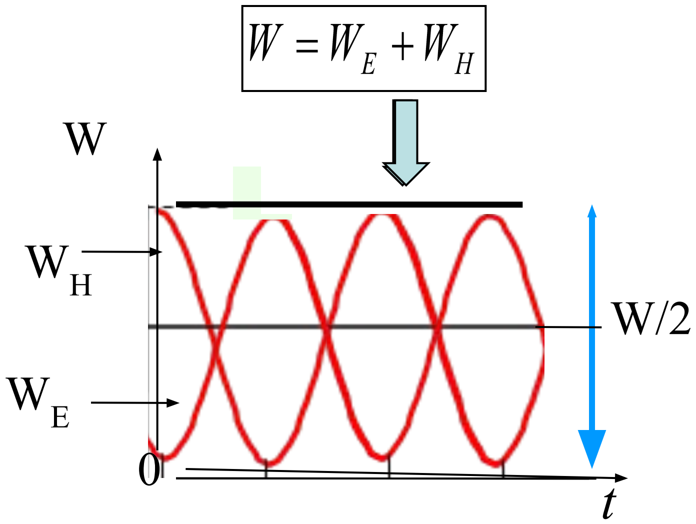
Энергия электромагнитных колебаний в контуре

Энергия электрического поля конденсатора

$$W_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C}\cdot\sin^2\omega t = \frac{q_m^2}{2C}(1-\cos 2\omega t)$$

Энергия электрического поля катушки

$$W_H = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}\cos^2\omega t = \frac{LI_m^2}{2}(1+\cos 2\omega t)$$



Колебания энергий происходят с частотой в 2 раза превышающей частоту колебаний заряда и силы тока и со сдвигом фаз, равным π

Квазистационарный ток

При выводе дифференциального уравнения механических колебаний применяются законы механики.

Для получения дифференциального уравнения электромагнитных колебаний в контуре необходимо применить законы электродинамики.

Но закон Ома и правила Кирхгофа установлены для постоянного тока, а электромагнитные колебания совершаются с большой частотой.

Квазистационарный ток

Закон Ома и правила Кирхгофа установлены для постоянного тока. Электромагнитные колебания совершаются с большой частотой.

При определенных условиях мгновенные значения изменяющегося тока можно считать постоянными.

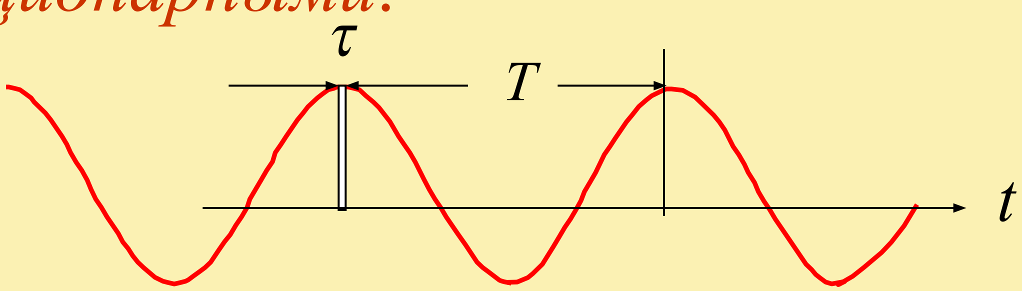
$\boxed{\tau \langle\langle T}$ Условие квазистационарности (1)

*Токи, удовлетворяющие такому условию, называются **квазистационарными**.*

Пример:

Длина цепи $l = 3$

Скорость распространения сигнала $c = 3 \cdot 10^8$ м/с



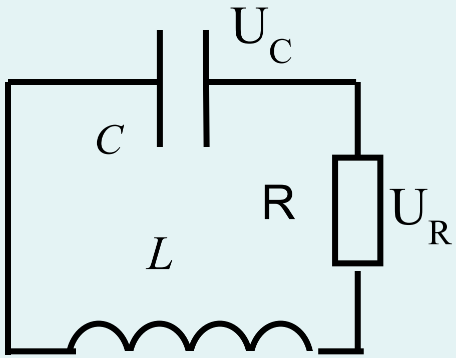
Время прохождения сигналом цепи

$$\tau = \frac{l}{c} = \frac{3}{3 \cdot 10^8} = 10^{-8}\,c \quad \text{для} \quad \tau = 0{,}01T$$

Условие (1) выполняется для частот $\nu = 100\,МГЦ$

Свободные электрические колебания

Свободные электрические колебания – это периодически повторяющиеся изменения электромагнитных величин (заряда, тока в катушке, напряжения на конденсаторе), происходящие без потребления энергии от внешних источников.



$$I = \frac{dq}{dt}$$

В соответствии со вторым правилом Кирхгофа (и законом сохранения энергии)

$$U_R + U_C = \varepsilon_S$$

$$IR + \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний контура

Уравнение свободных электрических колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

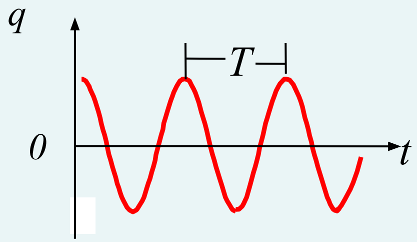
Собственная частота колебаний (рад/с)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

Коэффициент затухания

Для идеального контура R = 0



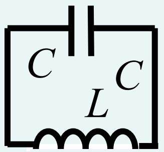
$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Решение уравнения

В колебательном контуре без активного сопротивления происходят незатухающие гармонические колебания с собственной частотой w_0

Незатухающие электрические колебания



R=0

Дифференционное уравнение незатухаюших колебаний

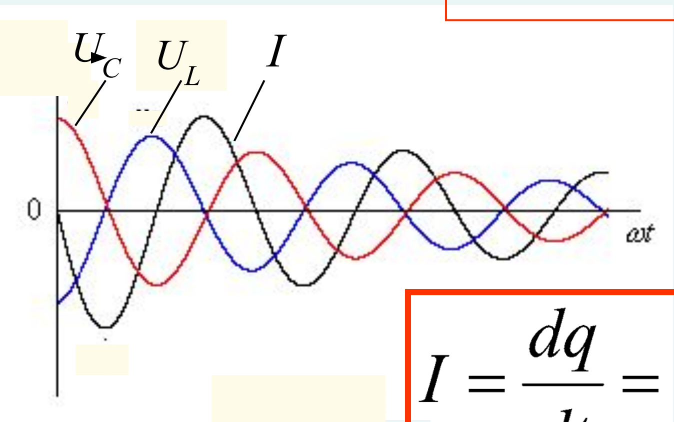
$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0{}^2q=0$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$(\omega_0 t+\varphi)=\pi$$

Фаза колебаний в момент времени t_1

$$q=q_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$$



$$U=\frac{q}{C}=\frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t+\varphi)=U_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$I=\frac{dq}{dt}=-\omega_0 q_m\sin(\omega_0 t+\varphi)=I_m\cos\left(\omega_0 t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

Колебания тока I опережают по фазе колебания заряда q на **π/2**

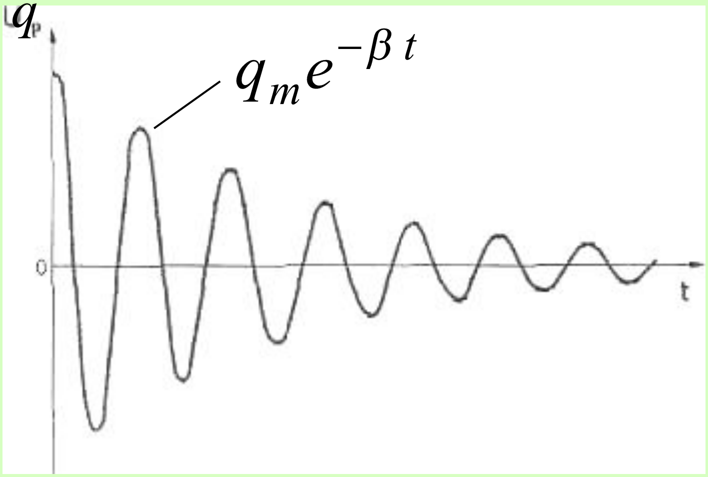
t

Затухающие электрические колебания

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0{}^2\, q = 0$$

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$



0

Коэффициент затухания

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}}$$

Частота затухающих колебаний

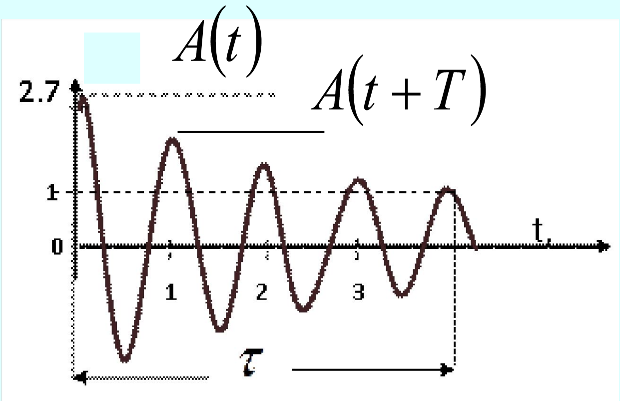
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Экспоненциальный характер убывания амплитуды колебаний

$$\omega \langle \omega_0$$

Затухающие электрические колебания

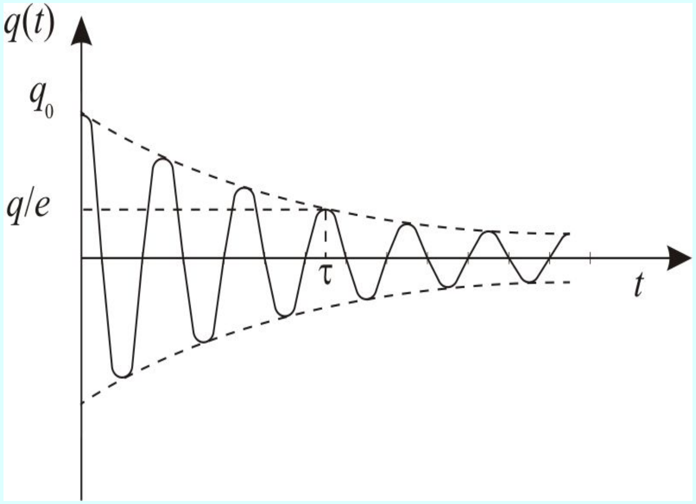
Логарифмический декремент затухания –



$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T,$$

где $A(t)$ - амплитудные значения соответствующей величины q, U, I .

Время релаксации



τ ***- время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в е-раз***

Физический смысл β и θ

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta \cdot \tau} = e^{1} \Rightarrow \beta T = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{\tau}}$$

Коэффициент затухания β – есть физическая величина, обратная времени , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в е раз.

Пусть N - число колебаний, после которых амплитуда уменьшилась в е раз. Тогда $\tau = NT$

$$\theta = \beta T = \frac{1}{\tau}\frac{\tau}{N} = \frac{1}{N} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{1}{N}}$$

Логарифмический декремент затухания – есть величина, обратная числу полных колебаний по истечению которых амплитуда колебаний уменьшается в е раз

Добротность колебательного контура

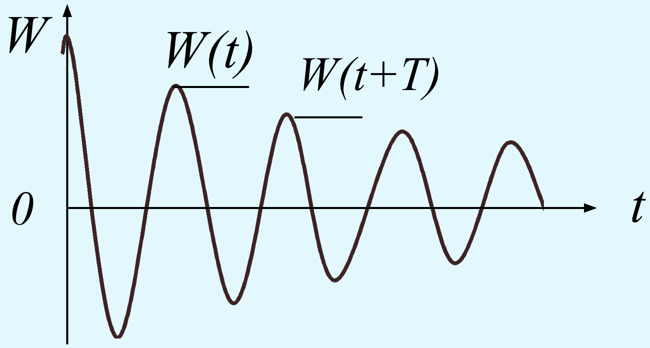
Добротность контура – физическая величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N$$

В случае слабого затухания

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Добротность колебательной системы с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли этой энергии за один период колебаний



$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{\Delta W(t+T)}$$

Апериодический процесс

Апериодический процесс – процесс, происходящий при очень сильном затухании.

Частота собственных колебаний системы становится мнимой при $\omega_0 < \beta$.

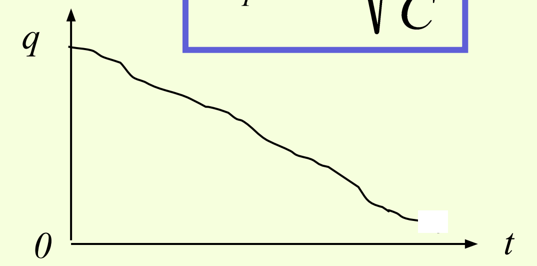
$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}$$

При увеличении коэффициента затухания период затухающих колебаний растет и при $\omega_0 = \beta$ обращается в бесконечность, т.е. процесс перестает быть периодическим.

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}}$$

$$\boxed{R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

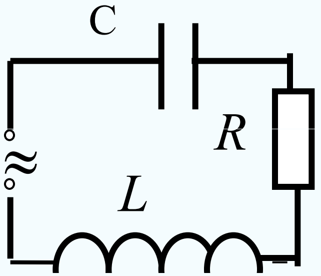
Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется критическим сопротивлением.



Вынужденные электрические колебания

Незатухающие колебания в цепи, содержащей индуктивность и емкость, под действием внешней ***периодически*** *изменяющейся ЭДС, называются вынужденными электромагнитными колебаниями*

$$\boxed{U = U_m \cos \omega t}$$



$$\boxed{\beta = \frac{R}{2L}}$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0 q = \frac{U_m}{L}\cos \omega t}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

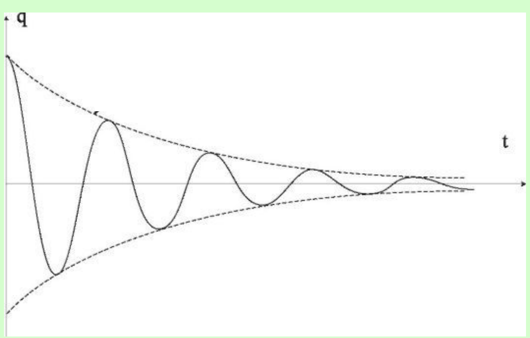
Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний

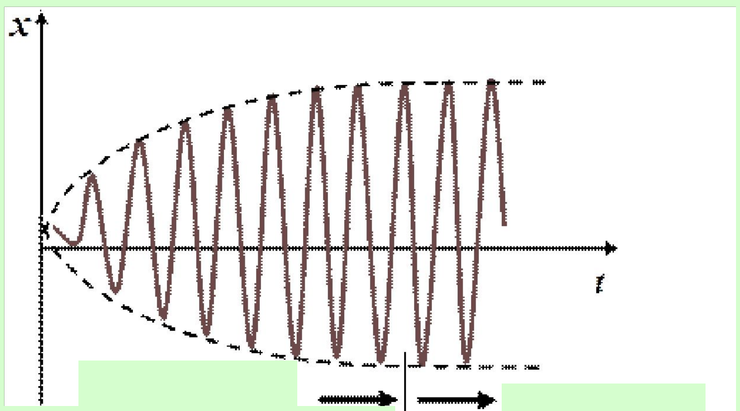
Вынужденные электрические колебания

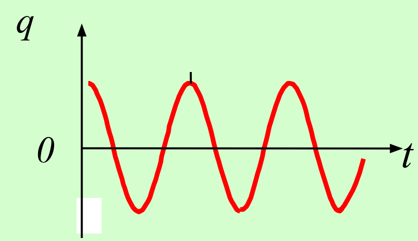
$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнений, равно сумме общего решения, соответствующего однородного уравнения q_1 и частного решения неоднородного уравнения q_2

$$\boxed{q_1 = q_{m1}e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \varphi)} \qquad \boxed{q = q_1 + q_2} \qquad \boxed{q_2 = q_m\cos(\omega t - \varphi)}$$







Установление колебаний   Установившиеся колебания

Вынужденные колебания совершаются с частотой вынуждающей ЭДС

Вынужденные электрические колебания

Явление резонанса

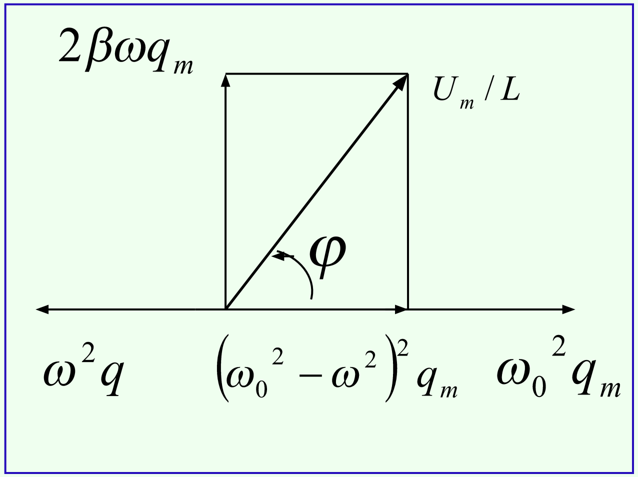
При вынужденных колебаниях ведичина заряда зависит от частоты вынуждаюшей ЭДС

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t$$

$$q = q_m\cos(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\omega q_m\sin(\omega t - \varphi) = \omega q_m\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q_m\cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 q_m\cos(\omega t - \varphi + \pi)$$



$$\boxed{\omega^2 q_m\cos(\omega t - \varphi + \pi)} + \boxed{2\beta\omega q_m\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} + \boxed{\omega_0^2 q_m\cos(\omega t - \varphi)} = \boxed{\frac{U_m}{L}\cos\omega t}$$

Чтобы уравнение выполнялось, сумма трех этих векторов должна совпадать с вектором, изображающим функцию $\frac{U_m}{L}\cos\omega t$

Явление резонанса

Резонанс – это резкое возрастание амплитуды колебаний при частоте вынуждающей силы равной или близкой собственной частоте системы.

$$\boxed{q_m = \frac{U_m / L}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

Чтобы найти резонансную частоту $\omega_{рез}$ - частоту, при которой амплитуда заряда достигает максимума – нужно найти максимум этой функции

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = \frac{d}{d\omega}\left[\omega_0{}^4 - 2\omega_0{}^2\omega^2 + \omega^4 = 4\beta^2\omega^2\right] = 0$$

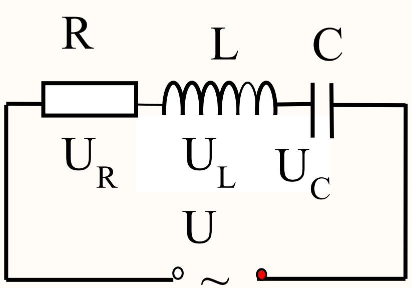
$$-4\omega_0{}^2\omega^2 + 4\omega^3 + 8\beta^2\omega = -4\omega\left(\omega_0{}^2 - \omega^2 - 2\beta^2\right) = 0$$

$$\boxed{\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}}$$

Резонансная частота при R = 0 равна собственной частоте контура ω_0

Резонанс напряжений

Резонанс напряжений возникает в цепи последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора и сопротивления при совпадении частоты колебаний внешней ЭДС с собственной частотой контура

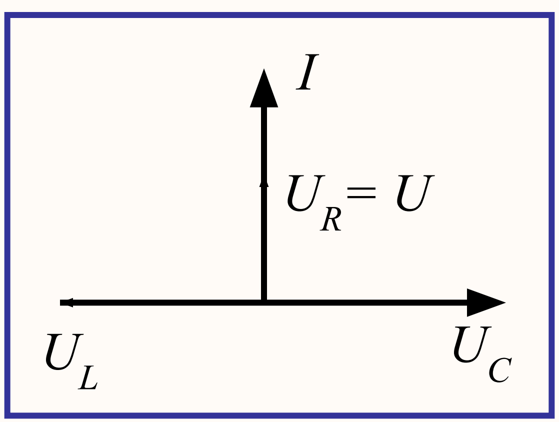


$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Полное сопротивление контура

$$\boxed{X_L = L\omega} \qquad \boxed{X_C = \frac{1}{C\omega}}$$

Реактивные сопротивления индуктивности и емкости



При $\omega = \omega_0$ реактивные сопротивления равны

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

$$\boxed{\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

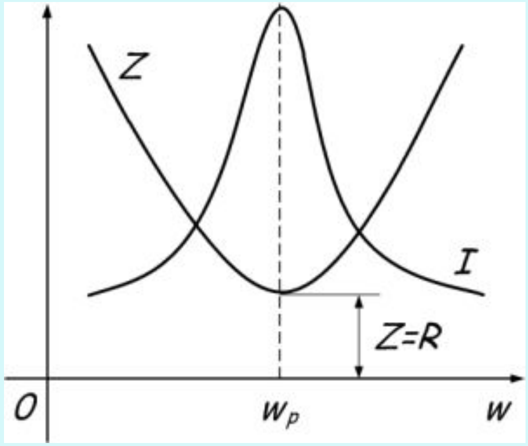
Векторная диаграмма резонанса напряжений

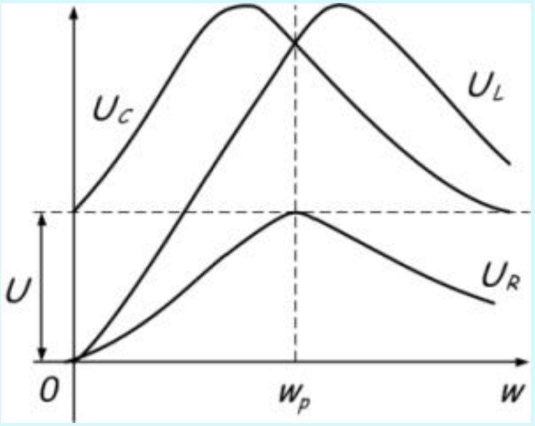
Резонансная частота

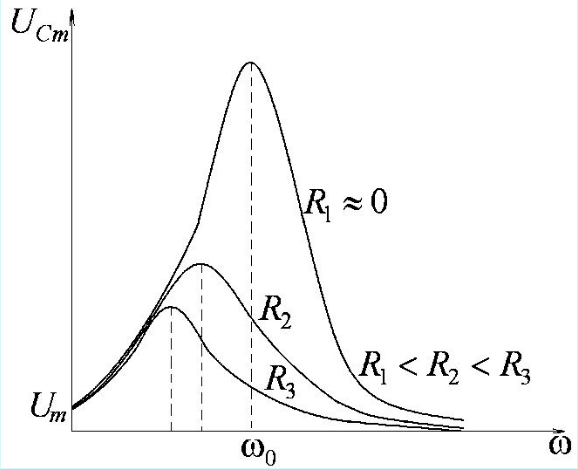
Резонанс напряжений

Напряжения на катушке и на конденсаторе противоположны по фазе и компенсируют друг друга. Полное сопротивление при этом будет равно активному сопротивлению Z = R, что вызовет увеличение тока в цепи, а, следовательно, и напряжения на индуктивности и емкости.

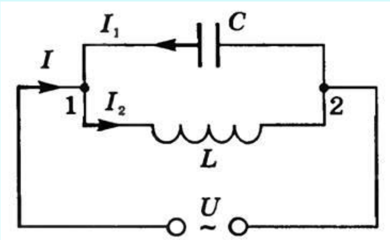
Резонанс напряжений выражается в том, что полное сопротивление контура становится наименьшим и равным активному сопротивлению, а ток становится максимальным.







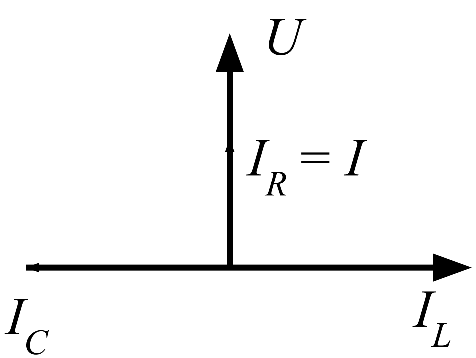
Резонанс токов

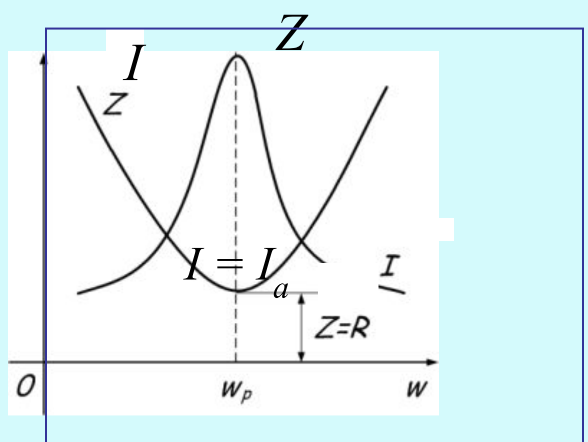


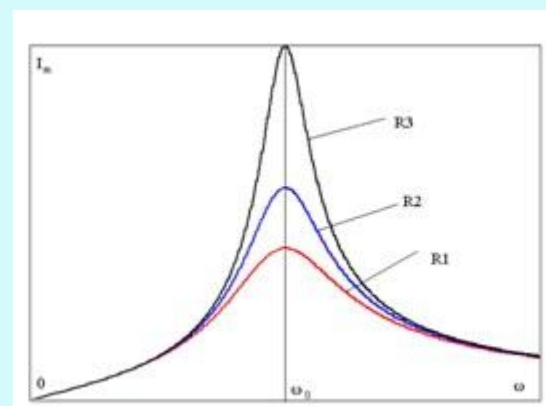
Резонанс токов наблюдается в цепи, содержащей параллельно соединенные индуктивность и емкость

Условия получения резонанса токов такие же, как и для резонанса напряжений $\omega = \omega_0$ и $X_L = X_C$. Однако в этом случае на катушке и на конденсаторе напряжение такое же, как у генератора.

Резонанс тока проявляется в уменьшении амплитуды тока во внешней цепи и при этом резкого увеличения тока в катушке индуктивности, при приближении частоты приложенного напряжения ω к ω_p,







Мощность, передаваемая в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

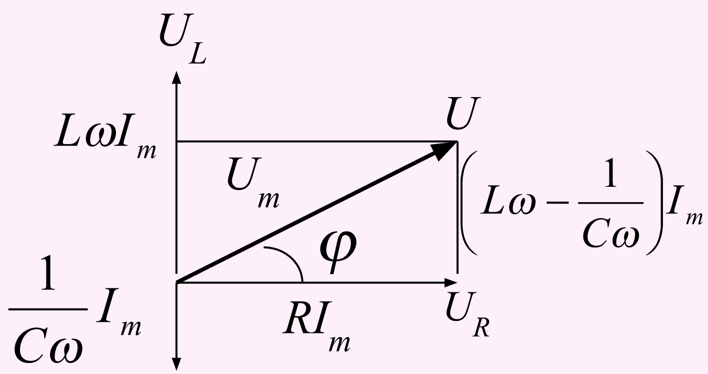
$$P(t) = U(t)I(t)$$

$$P(t) = U_m \cos\omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$P(t) = I_m U_m \left(\cos^2 \omega t \cos\varphi + \sin\omega t \cos\omega t \sin\varphi\right)$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее *среднее значение за период колебания*

Учитывая, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \dfrac{1}{2}$ а также $\langle \sin\omega t \cdot \cos\omega t \rangle = 0$



$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi}$$

$\cos\varphi$ - Коэффициент мощности

Из диаграммы → $U_m \cos\varphi = RI_m$

Мощность, передаваемая в цепи переменного тока

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2$$

Такую же мощность рассеивает постоянный ток $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Действующие (эффективные) значения тока и напряжения

Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

$$\langle P \rangle = IU \cos\varphi$$

Допустимое значение $\cos\varphi$ для промышленных установок примерно 0,85.
Для првышения коэффициента мощности существуют разные способы.

Основной способ – включение параллельно приемнику электрической энергии специальных устройств, называемых компенсаторами (батарея конденсаторов).

При включении компенсатора по нему проходит ток, опережающий напряжение на 90^0. Угол сдвига фаз уменьшается.

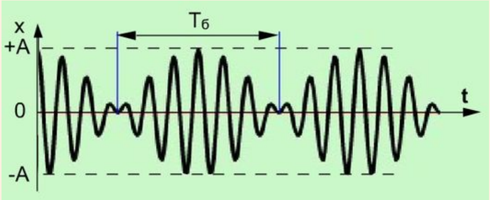
Сложение гармонических колебаний

1) Одинаковой частоты

Вид результирующего колебания определяется соотношением фаз складываемых колебаний

2) Близкие частоты

$\omega \langle\langle \omega$ Возникают биения

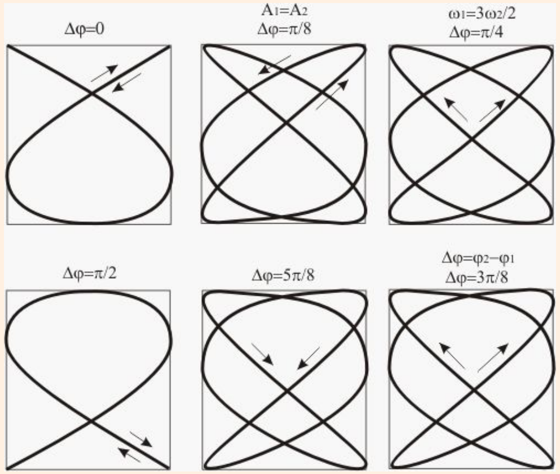


3) Взаимно перпендикулярные одинаковой частоты

Эллипс, окружность, прямые (зависит от соотношения амплитуд и фаз)

4) Взаимно перпендикулярные с кратными частотами $\omega_1 / \omega_2 = m / n$

Фигуры Лиссажу



Спасибо за внимание

Задача 1

Электрические колебания

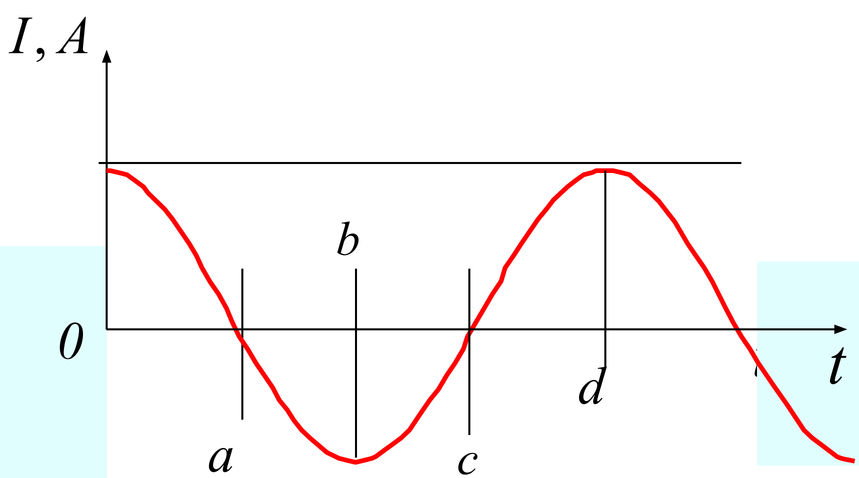
В колебательном контуре сила тока изменяется согласно графику, представленному на рисунке. Заряд конденсатора возрастает в интервале времени…?

1) от 0 до a; от b до c.

3) от 0 до a; от c до d.

2) от a до b; от c до d.

4) от a до b; от b до c.



5) от 0 до a; от a до b.

6) от b до b; сот b до d.

Задача 2

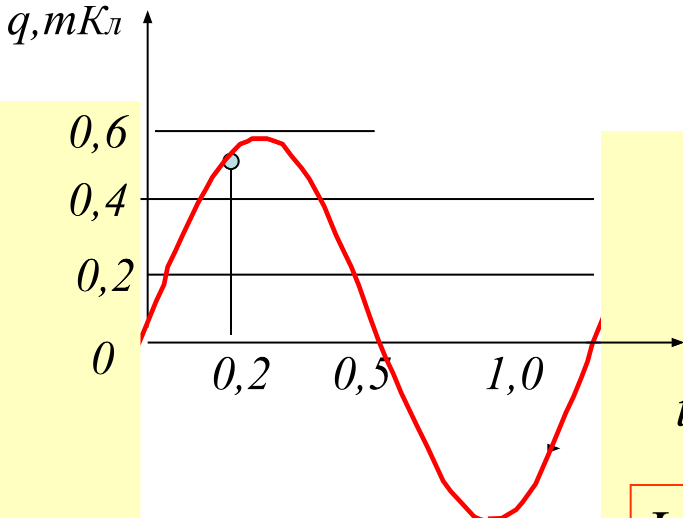
Электрические колебания

В колебательном контуре заряд конденсатора изменяется со временем согласно графику на рисунке. Определить силу тока в катушке индуктивности в моменгт времени $t = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ *с.*

$$q = q_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$q_m = 6 \ mКл$$



$t \cdot 10^{-3} c$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}0 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^3 \pi \left(c^{-1}\right)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_m \cos\left(\omega_0 t\right)$$

$$I = 0{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 10^3 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}\right)$$

Ответ: $\boxed{I = 1{,}16 A}$

$$I = 1{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot \cdot \cos\left(0.4\pi\right) = 1{,}16 A$$

Задача 3

Электрические колебания

Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону q = 0,2cos(4πt+π/3), мКл. Определите: амплитуду колебаний заряда на обкладках конденсатора, циклическую частоту, частоту, период и начальную фазу колебаний заряда, амплитуду силы тока в контуре через 1 с.

Дано: q = 0,2cos(4πt+π/3), мКл.

Найти: q_m; ω_0; ν_0 T; φ; I_m.

Решение

Из заданного закона изменения электрического заряда на обкладках конденсатора $q = q_m \cos(4\pi t+\pi/3)$, следует:

амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора q_m=0,2мКл

циклическая частота $\omega_0 = 4\pi\ c^{-1}$;начальная фаза колебаний заряда $\varphi_0 = \pi/3$ рад.

Искомые частота и период колебаний соответственно равны:

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$$

Откуда искомая амплитуда силы тока в контуре

$$I_m = \omega_0 q_m$$

Ответ: q_m= 0,2 мКл; $\omega_0 = 4\pi\ c^{-1}$; $\varphi_0 = \pi/3$ рад; ν_0 = 2 Гц; T = 0,5 с; $I_m = 0{,}8\pi$ мА.

Задача 4

Затухающие колебания

Контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 2\cdot10^{-2}$ Гн, активного сопротивления $R = 8$ Ом и конденсатора емкостью $C = 6{,}6\cdot10^{-9}$ Ф. Найти логарифмический декремент затухания колебаний в контуре.

Дано: $L = 2\cdot10^{-2}$ Гн; $R = 8$ Ом; $C = 6{,}6\cdot10^{-9}$ Ф.

Найти: θ

Решение

Логарифмический декремент затухания $\theta = \beta T$

Коэффициент затухания $\beta = \dfrac{R}{2L}$

Период затухающих колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}}$

Подставляем числовые данные

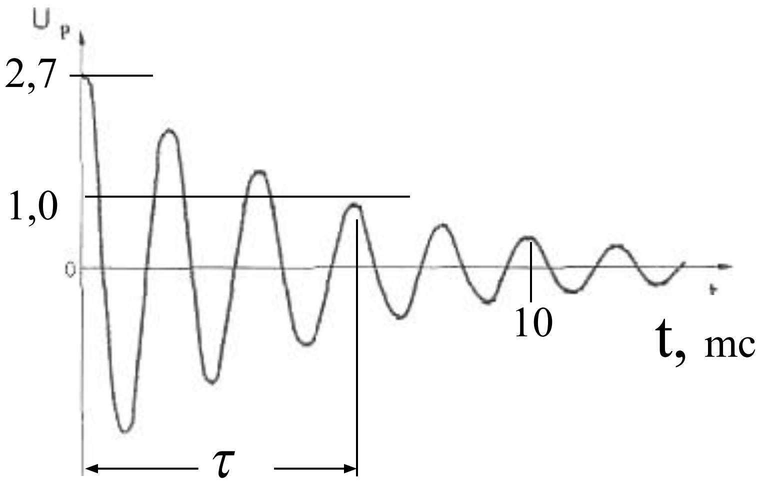
$$\theta = \frac{8\cdot 3{,}14}{2\cdot10^{-2}\sqrt{1/2\cdot10^{-2}\cdot 6{,}6\cdot10^{-9} - 8^2/(4\cdot 2\cdot10^{-2})^2}} \cdot = 1{,}4\cdot10^{-2}$$

Ответ: $\theta = 1{,}4\cdot10^{-2}$

Задача 5

Затухающие колебания

На рисунке приведен график зависимости амплитуды колебаний в контуре от времени. Определить по графику: 1) время релаксации ; 2) коэффициент затухания; 3) логарифмический декремент затухания



1) Время релаксации (время, за которое амплитуда уменьшится в *e* раз (*e* = 2,72). находим по графику τ = 6 mc.

2) Коэффициент затухания

$$\beta = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{6\cdot 10^{-3}} = 170c^{-1}$$

3) Логарифмический декремент затухания равен обратному числу полных колебаний за время релаксации. По графику число колебаний N = 3, следовательно, θ = 0.51

Ответ: τ = 6 mc; $\beta = 170c^{-1}$;

Добротность колебательного контура

Задача 6

Добротность колебательного контура Q = 0.7. Определить, на сколько процентов отличается частота затухающих колебаний контура от частоты собственных колебаний.

Дано: Q = 0.7.

Найти: $\dfrac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$

Решение

1) Добротность колебательного контура $\boxed{Q = \dfrac{\pi}{\theta}}$

2) Логарифмический декремент затухания $\theta = \beta T$

3) $Q = \dfrac{\pi}{\beta T} = \dfrac{\pi\omega}{\beta 2\pi} = \dfrac{\omega}{2\beta} \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{2Q}$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^{\,2} - \beta^2}$$

Разделим обе части на ω^2

$$\boxed{\frac{\omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^{\,2}}{\omega^2} - \frac{\beta^2}{\omega^2}}$$

или

$$\boxed{\frac{\omega_0^{\,2}}{\omega^2} = 1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_0^{\,2}}{\omega^2} = 1 + \frac{1}{4Q^2} = \frac{4Q^2+1}{4Q^2}}$$

и

л

и

4) Окончательно

$$\boxed{\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2+1}}} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2\cdot 0{,}707}{\sqrt{4\cdot 0{,}5+1}} = \frac{1{,}414}{\sqrt{3}} = 0{,}82}$$

Частота затухающих колебаний $\omega = 0.82\omega_0$, что составляет 18% от ω_0

Задача 7

Апериодический процесс

Колебательный контур содержит конденсатор емкостью C = 450мкФ, катушку индуктивностью L = 0,66 Гн и активное сопротивление R =100 Ом. Возникнут ли в контуре электрические колебания? Если возникнут, то какова будет частота колебаний?

Дано: C = 450мкФ; L = 0,66 Гн ; R =100 Ом

Найти: ω

Решение Рассчитаем величину критического сопротивления

$$\boxed{R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}} \qquad R_{кр} = 2\sqrt{\frac{0{,}66}{450 \cdot 10^{-6}}} = 76\,Ом$$

Критическое сопротивление равно 76 Ом, а в контуре активное сопротивление 100 Ом, т.е. больше критического. Следовательно, в контуре, содержащем указанные значения R, L и C, колебания не возникнут.

Ответ: Колебания не возникнут.

Задача 8

Мощность, передаваемая в цепи переменного тока

Контур состоит из катушки индуктивностью 25 мкГн, резистора сопротивлением 2 Ом и конденсатора емкостью 3000 пФ. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе равно 5 В?

Дано: L = 2,5·10^{-5} Гн; C = 3·10$^{-9;}$ R = 2 Ом; U_m = 5 В.

Найти: P.

Решение

Средняя мощность, передаваемая в цепи переменного тока

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^{\ 2} \Rightarrow I = \frac{dq}{dt} = q_m \omega \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow I_m = q_m \omega = \frac{q_m}{\sqrt{LC}}$$

$$q_m = U_m C \Rightarrow I_m = \frac{U_m C}{\sqrt{LC}} = U_m \sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow P = \frac{U_m^{\ 2} C R}{2L}$$

Подставляем числовые данные

$$P = \frac{5^2 \cdot 3 \cdot 10^{-9} \ 2}{2 \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-5}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \ Bm$$

Ответ: $P = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \ Bm$