Лекция 12

1.Интегрирование простейших рациональ

2. Интегрирование иррациональны

3. Интегрирование тригонометрическ

Интегрирование простейших рациональн

Класс рациональных функций можно представить в виде дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

где *P(x)* и *Q(x)* – многочлены.

Если степень числителя не меньше степени знаменателя, то дробь считается неправильной и делением в ней выделяется целая часть.

1

Интегралы вида:

$$\int \frac{1}{kx+b}\,dx$$

(степень знаменателя дроби равна 1).

Замена переменной:

$$t = kx + b$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{1-2x}dx$$

Решение:

$$\int \frac{1}{1-2x}dx = \left| \begin{array}{c} 1-2x=t \\ x=-\frac{1}{2}(t-1) \\ dx=-\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$$

2

Интегралы вида:

$$\int \frac{1}{(kx+b)^n}\,dx$$

(где n>1 – целое число).

Замена переменной:

$$t = kx + b$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{(2x-3)^4}\,dx$$

Решение:

$$\int \frac{1}{(2x-3)^4}\,dx = \left| \begin{array}{c} 2x-3=t \\ x=\dfrac{1}{2}(t+3) \\ dx=\dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^4}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3t^3}+C = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(2x-3)^3}+C$$

3

Интегралы вида:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$$

В знаменателе дроби выделяется полный квадрат и делается линейная замена переменной, так что интеграл сводится к виду:

$$\int \frac{Mx+N}{ex^2+f}dx = M\underbrace{\int \frac{x}{ex^2+f}dx}_{1} + N\underbrace{\int \frac{1}{ex^2+f}dx}_{2}$$

Для нахождения первого интеграла делается замена:

$$\boxed{t = ex^2 + f}$$

Тогда

$$\int \frac{x}{ex^2+f}dx = \left| \begin{matrix} ex^2 + f = t \\ dt = 2exdx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2e}\int \frac{1}{t}dt =$$

$$=\frac{1}{2e}\ln\left|t\right|+C=\frac{1}{2e}\ln\left|ex^2+f\right|+C$$

Второй интеграл при $e\cdot f>0$

сводится к табличному:

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$$

а при $e\cdot f<0$ **сводится к табличному:**

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

Примеры.

1

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx$$

Решение:

$$\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3}\,dx = \int \frac{x+1}{(2x+1)^2-4}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} 2x+1=t \\ dt = 2dx \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} + 1}{t^2-4} \cdot \frac{1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{t+1}{t^2-4}dt = \frac{1}{4}\int \frac{t}{t^2-4}dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2-4}dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} t^2-4=u \\ du = 2tdt \end{matrix} \right| = \frac{1}{8}\int \frac{1}{u}du + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| =$$

$$= \frac{1}{8}\ln|u| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln|t^2 - 4| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln|(2x+1)^2 - 4| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x+1-2}{2x+1+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln|4x^2 + 4x - 3| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C$$

2

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}dx$$

Решение:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+4}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ dt=dx \end{array} \right| = \int \frac{2t-2+1}{t^2+4}dt =$$

$$= \int \frac{2t-1}{t^2+4}dt = 2\int \frac{t}{t^2+4}dt - \int \frac{1}{t^2+4}dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t^2+4=u \\ du=2tdt \end{array} \right| = \int \frac{1}{u}du - \frac{1}{2}arctg\,\frac{t}{2} =$$

$$= \ln\left|t^2+4\right| - \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C =$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C =$$

$$= \ln\left|(x+1)^2+4\right| - \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C =$$

$$= \ln\left|x^2+2x+5\right| - \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C$$

4

Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотренный выше способ вычисления интегралов от рациональных дробей не обобщается на случай, если степень знаменателя больше двух.

В этом случае используется <u>метод неопределенных коэффициентов.</u>

Этот метод связан с представлением подынтегральной дроби в виде суммы простых дробей.

Для этого знаменатель дроби раскладывается на множители.

Каждому типу множителя в знаменателе отвечает в разложении простая дробь некоторого вида.

1

Каждому неповторяющемуся множителю вида (x-a) отвечает в разложении простая дробь вида

$$\frac{A}{x-a}$$

2

Каждому множителю вида $(x-a)^n$ отвечает в разложении сумма n простых дробей вида

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

3

Каждому неповторяющемуся множителю вида (x^2+px+q) отвечает в разложении простая дробь вида

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

4

Каждому множителю вида $(x^2+px+q)^k$ отвечает в разложении сумма k простых дробей вида

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-2)(x+4)}dx$$

Решение:

$$\frac{\boxed{x^2-2x+2}}{x(x-2)(x+4)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x+4}=$$

$$=\frac{\boxed{A_1(x-2)(x+4)+A_2x(x+4)+A_3x(x-2)}}{x(x-2)(x+4)}$$

$$A_1(x-2)(x+4)+A_2x(x+4)+A_3x(x-2)=$$
$$=x^2-2x+2$$

При $x=0$

$$A_1(-2)\cdot 4=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1=-\frac{1}{4}}$$

При $x=2$

$$A_2\cdot 2(2+4)=2^2-2\cdot 2+2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_2=\frac{1}{6}}$$

При $x=-4$

$$A_3(-4)(-6)=16-(-8)+2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_3=\frac{13}{12}}$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x(x-2)(x+4)} = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{6(x-2)} + \frac{13}{12(x+4)}$$

$$\int \frac{x^2-2x+2}{x(x-2)(x+4)}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{13}{12}\int \frac{1}{x+4}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{13}{12}\ln|x+4| + C$$