ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть имеется *n* переменных величин, и каждому набору их значений

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

из некоторого множества *X* соответствует определенное значение величины *z*.

Тогда говорят, что задана функция нескольких переменных

$$\boxed{z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

ПРИМЕР.

Функция

$$z = \pi \cdot x_1^2 \cdot x_2$$

задает объем цилиндра *z* как функцию двух переменных:

x_1 **– радиус основания,**

x_2 **– высота цилиндра.**

Переменные $x_1 \ldots x_n$ называются независимыми переменными.

Z называется зависимой переменной.

Множество X называется областью определения функции.

ПРИМЕРЫ.

1

Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

РЕШЕНИЕ.

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

Поэтому областью определения является круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

2

Найти область определения функции:

$$z = \frac{1}{x_1 \cdot x_2}$$

РЕШЕНИЕ.

$$x_1 \cdot x_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \end{array}\right.$$

Поэтому областью определения является плоскость OX_1X_2, за исключением координатных прямых OX_1 и OX_2.

Рассмотрим примеры функций нескольких переменных.

1

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b$$

$$a_1, \ldots, a_2, b = const$$

Линейная функция

2

$$z = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

$$b_{ij} = const$$

Квадратическая функ

3

$$z = b_0 \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$$

$$b_1, b_2 = const$$

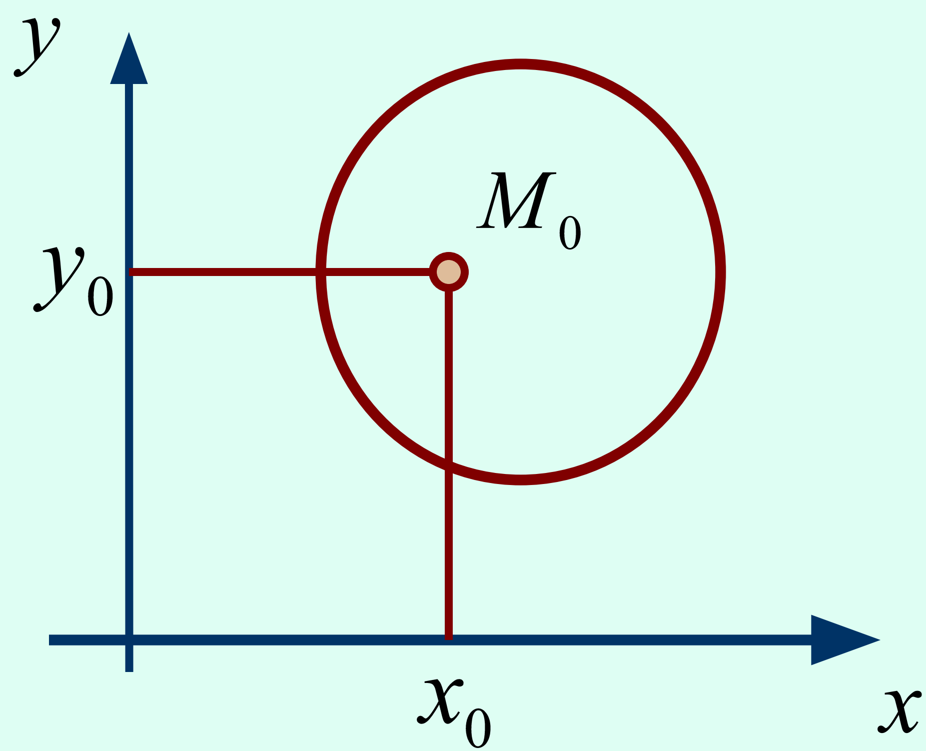
Функция Кобба-Дугл

В дальнейшем мы будем рассматривать частный случай функции нескольких переменных - функцию двух переменных, которая обозначается как

$$z = f(x, y)$$

Ее областью определения X является подмножество координатной плоскости XOY.

Окрестностью точки M_0 (x_0, y_0), принадлежащей множеству X, называется круг, содержащий точку M_0.



Круг на плоскости есть двумерный аналог интервала на прямой.

Любой функции *$f(x,y)$* можно поставить в соответствие пару функций одной переменной:

- **при фиксированном значении *$x=x_0$* функцию *$z=f(x_0,y)$***
- **при фиксированном значении *$y=y_0$* функцию *$z=f(x,y_0)$***

$$x = x_0 \Rightarrow z = f(x_0, y)$$

$$y = y_0 \Rightarrow z = f(x, y_0)$$

Хотя функции

$$z = f(x_0, y) \qquad z = f(x, y_0)$$

имеют одинаковое происхождение, их вид может существенно отличаться.

Например, функция

$$z = (1 + x)^y$$

является степенной по переменной *x*, и показательной по переменной *y*.

Графиком функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x,y,z), аппликата которых связана с абсциссой и ординатой соотношением $z=f(x,y)$.

Для построение графика функции *f(x,y)* полезно рассмотреть функции одной переменной:

$$z=f(x_0,y) \text{ и } z=f(x,y_0)$$

которые есть сечения графика z=*f(x,y)* плоскостями, параллельными координатным плоскостям *XOZ* и *YOZ*, т.е. плоскостями

$$y=y_0 \quad \text{и} \quad x=x_0$$

ПРИМЕР.

Построить график функции:

$$z = x^2 + y^2 - 2y$$

РЕШЕНИЕ.

Найдем сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Для этого преобразуем функцию к виду:

$$z = x^2 + y^2 - 2y = x^2 + (y-1)^2 - 1$$

При *y=0* (сечение плоскостью XOZ):

$$z = x^2$$ **- парабола**

При *x=0* (сечение плоскостью YOZ):

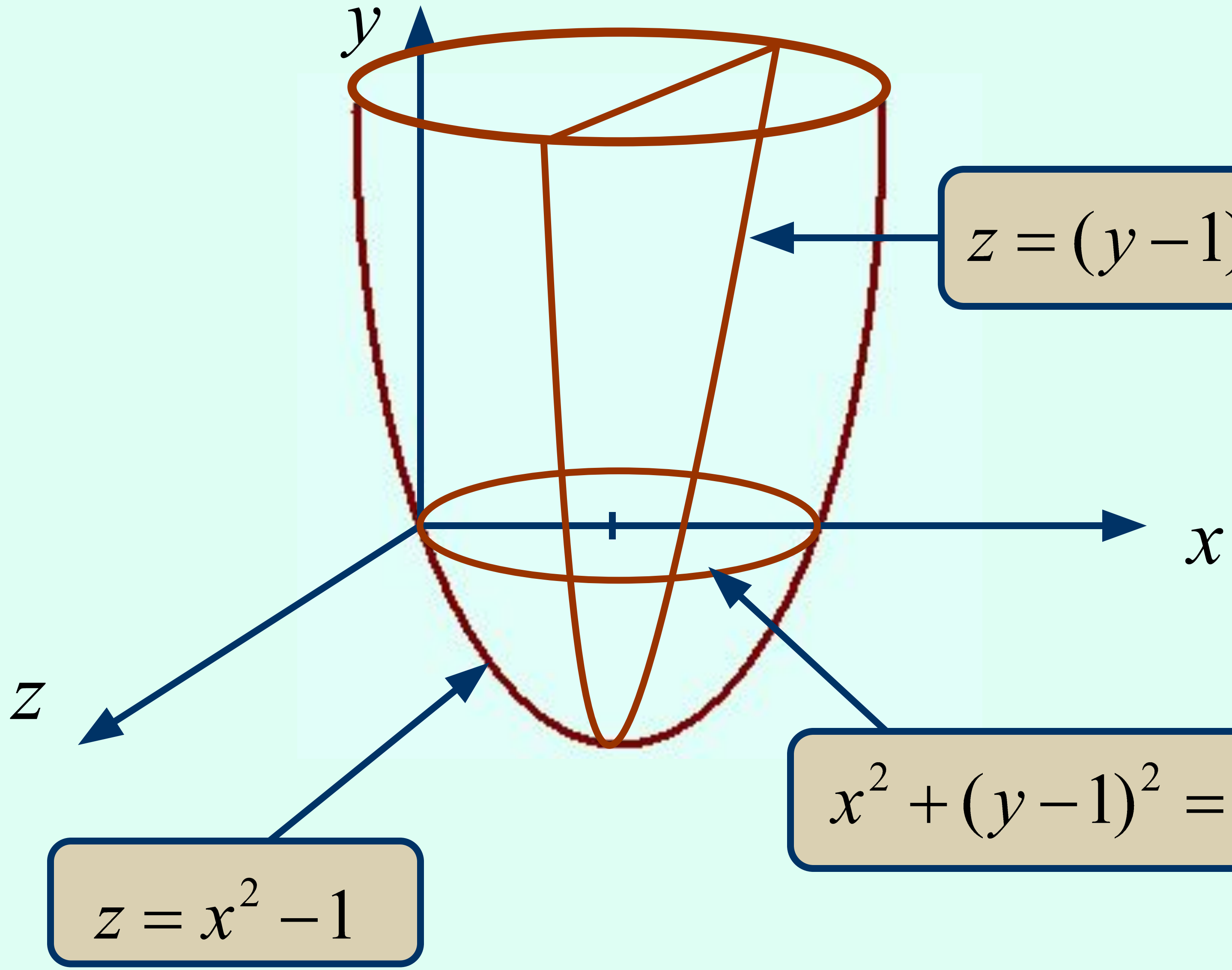
$$z = (y-1)^2 - 1$$ **- парабола**

При *z=0* (сечение плоскостью XOY):

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

- окружность с центром в точке (0, 1)

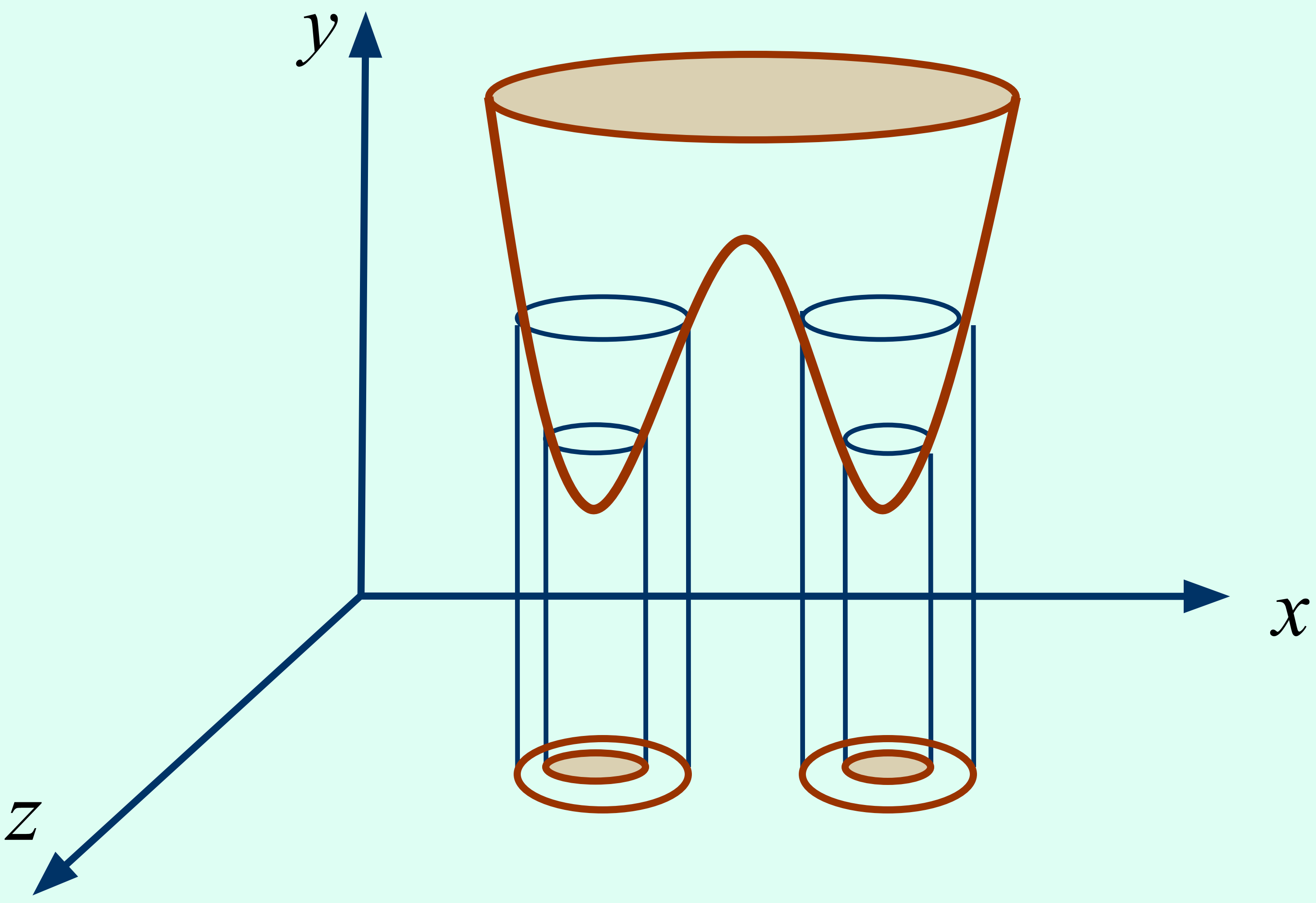
Эта поверхность называется параболоидом.



y
x
z
$z=(y-1)^2-1$
$x^2+(y-1)^2=1$
$z=x^2-1$

Линией уровня функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется множество точек на плоскости, таких что во всех этих точках значение функции одно и то же и равно С.

Число С называется уровнем.


y
x
z

ПРИМЕР.

Построить линии уровня функции:

$$z = x^2 + y^2 - 2y$$

РЕШЕНИЕ.

Линия уровня *z*=*C* – это кривая на плоскости XOY, которая задается уравнением

$$C = x^2 + y^2 - 2y$$

или

$$C = x^2 + (y-1)^2 - 1$$

$$x^2 + (y-1)^2 = C + 1$$

Это будет окружность с центром в точке (0,1) и радиусом $R=\sqrt{C+1}$

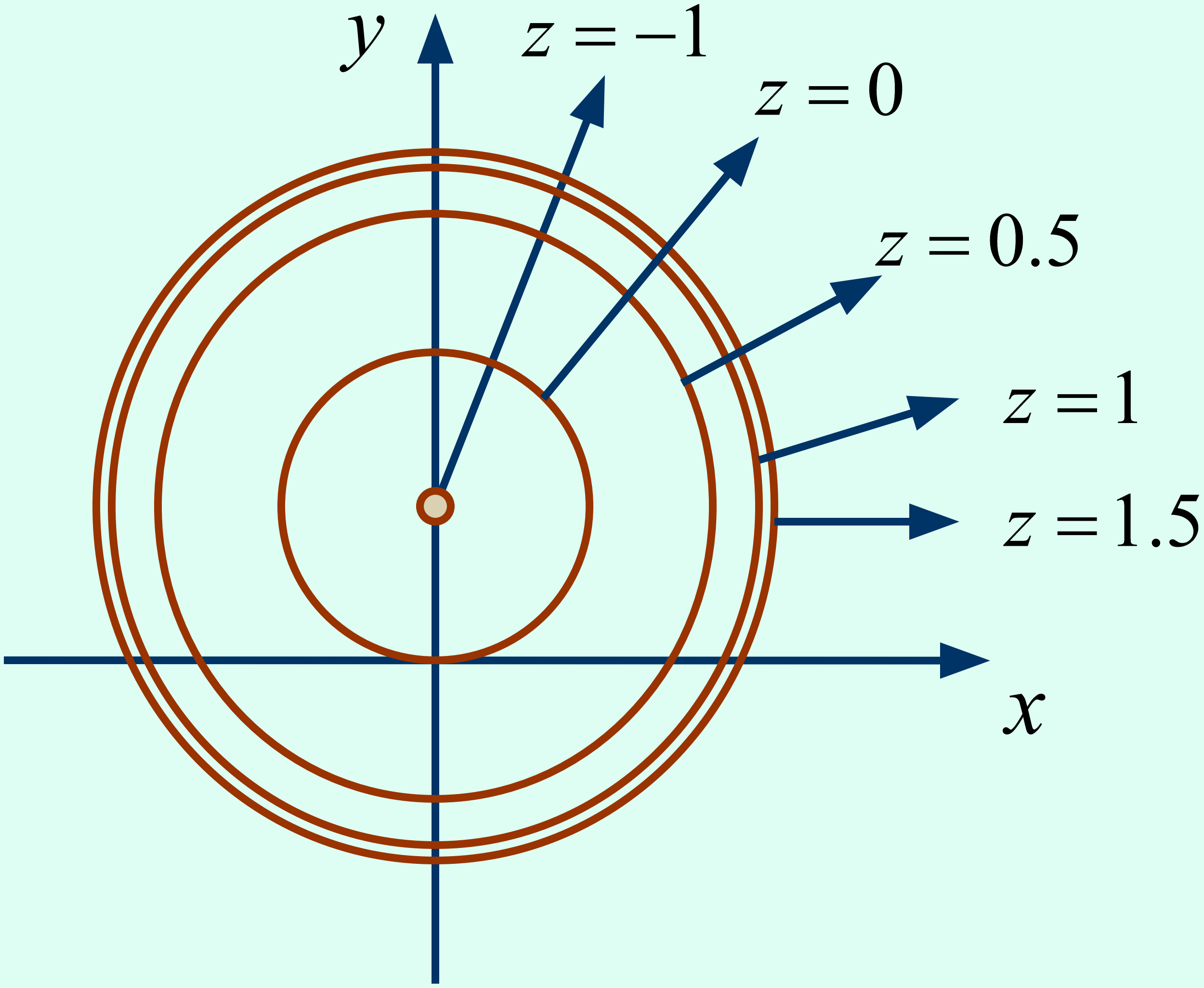
При *C=-1* имеем точку (0,1).

При С=0 имеем окружность с $R=1$

При С=0.5 имеем окружность с $R=\sqrt{1.5}$

При С=1 имеем окружность с $R=\sqrt{2}$

И так далее.



y
$z=-1$
$z=0$
$z=0.5$
$z=1$
$z=1.5$
x

Линия уровня позволяют представить график данной функции.

Расстояния между линиями с одинаковым шагом уровня уменьшаются при удалении от центра.

2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Число А называется пределом функции z=f(x,y) при $x \to x_0$ *и* $y \to y_0$

если для любого,даже сколь угодно малого числа ε>0, найдется такое положительное число δ, что для всех точек (x,y), отстоящих от точки (x_0, y_0) ***на расстояние ρ>δ, выполняется неравенство:***

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

ПРИМЕР.

Вычислить предел функции, когда оба аргумента стремятся к нулю.

$$f(x,y)=\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left| \begin{array}{ll} при & \sqrt{x^2+y^2} \\ & x\to 0\ y\to 0 \\ & \rho\to 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\ln(1-\rho^2)}{\rho} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\rho\to 0}\left(-\frac{1}{1-\rho^2}\cdot 2\rho\right) = 0$$

Вычисление пределов функции одной переменной является менее сложной задачей, чем вычисление пределов функции двух переменных.

Это происходит потому, что на прямой всего два направления, по которым аргумент может стремиться к предельной точке (справа и слева), а на плоскости таких направлений бесконечно много и пределы функций по разным направлениям могут не совпадать.

Функция z=f(x,y) называется непрерывной в точке (x_0,y_0), если она

1 **Определена в точке (x_0,y_0)**

2 **Имеет конечный предел при**

$$x \to x_0 \quad и \quad y \to y_0$$

3 **Этот предел равен значению функции в точке (x_0,y_0)**

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$