Обтекание тонких тел вращения

§ 1. Осесимметричное обтекание

Знание распределения коэффициента давления

$$\bar{p} = \left(p - p_\infty\right)/q_\infty, \quad \text{где} \quad q_\infty = kM_\infty^2 p_\infty/2$$

позволяет вычислить силу и коэффициент волнового сопротивления тела вращения, обтекаемого сверхзвуковым потоком при нулевом угле атаки. Для вычисления волнового коэффициента сопротивления используем формулу

$$X = q_\infty S_n \int\limits_{(S)} \left[\bar{p}\cos\left(\vec{p}_n, x\right) + c_{fx}\cos\left(\vec{p}_\tau, x\right)\right]\frac{dS}{S_n} \qquad (1)$$

где X – сила лобового сопротивления;

$q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$ – скоростной напор;

S_n – характерная площадь (например, площадь крыла в плане, площадь миделевого сечения корпуса и др.);

c_{fx} – аэродинамический коэффициент силы лобового сопротивления.

При этом учтем: $S_{мид} = \pi r_{мид}^2$; $dS = 2\pi r\, dl$; $dl = dx/\cos\beta$;

$$\cos\left(\vec{p}_n, x\right) = \sin\beta;\ \sin\beta/\cos\beta = dr/dx.$$

В результате получим:

$$c_в = \frac{X_в}{q_\infty S_{мид}} = \frac{2}{r_{мид}} \int_0^{x_к} \overline{p}\,\overline{r} \left(\frac{dr}{dx}\right) dx \quad (2)$$

или $$c_в = 4\lambda_{мид} \int_0^{\overline{x}_к} \overline{p}\,\overline{r}\, \mathrm{tg}\beta\, d\overline{x}, \quad (3)$$

где $x_к$ – длина тела вращения;

$$\overline{x} = x/x_{мид}\,; \quad \overline{x}_к = x_к/x_{мид}\,; \quad \overline{r} = r/r_{мид}\,;$$

$$\mathrm{tg}\beta = dr/dx\,; \; \lambda_{мид} = x_{мид}/2r_{мид}\,. \; (\text{см.рис. 1})$$

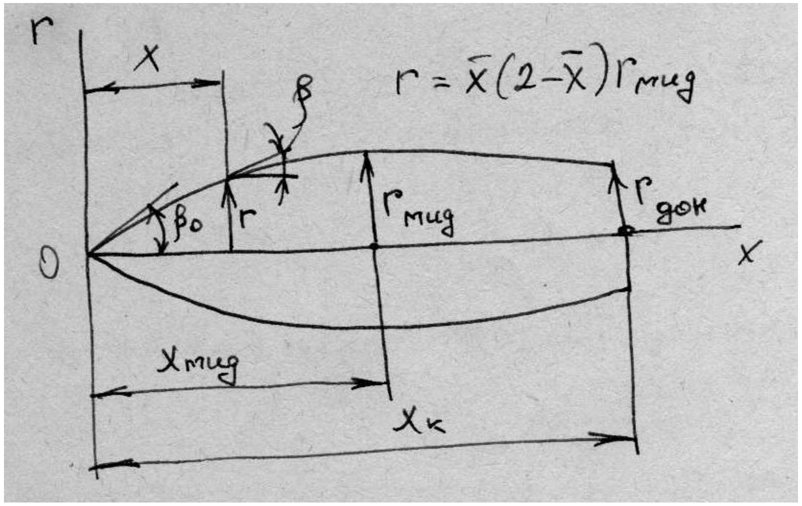

Рис. 1. Тело вращения с параболической образующей

Отдельные образцы летательных аппаратов выполняются в виде тонких заостренных тел вращения (некоторые типы ракет, артиллерийских снарядов и др.) или же имеют в качестве одного из конструктивных элементов корпус, представляющий собой по форме такое тело.

Рассмотрим задачу об установившемся обтекании тонких тел, установленных под малыми углами атаки. Возмущенное течение около таких тел мало отличается от невозмущенного. Такое течение может быть исследовано при помощи соответствующих *линеаризованных уравнений аэродинамики*.

Линеаризованные уравнения получаются из общих уравнений движения в цилиндрических координатах и уравнения неразрывности.

Уравнение для потенциальной функции имеет вид

$$\left(V_x^2 - a^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \left(V_r^2 - a^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left(V_\nu^2 - a^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial \nu^2} + 2V_x V_r\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r} +$$

$$+\frac{2}{r}V_x V_\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial \nu} + \frac{2}{r}V_r V_\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial \nu} - \frac{V_r\left(a^2 + V_\nu^2\right)}{r} = 0 \quad (4)$$

Уравнение (4) используют для определения параметров движения (уравнение потенциала скоростей).

В соответствии со свойством линеаризованного возмущенного течения

$$V_x = V_\infty + V_x{}'; \quad V_r = V_r{}'; \quad V_\nu = V_\nu{}', \tag{5}$$

где добавочные возмущенные составляющие скорости

$$V_x{}' \ll V_\infty; \quad V_r{}' \ll V_\infty; \quad V_\nu{}' \ll V_\infty.$$

Поэтому имеет место соотношение

$$a^2 = a_\infty^2 - \left(k-1\right) V_\infty u$$

для скорости звука, в котором принимаем $u = V_x{}'$.

Внеся в уравнение (4) это соотношение, а также значения (5) и величины

$$V_x^2 = V_\infty^2 + 2V_\infty V_x{}'; \; V_r^2 = \left(V_r{}'\right)^2; \; V_\nu^2 = \left(V_\nu{}'\right)^2; \; \varphi = \varphi_\infty + \varphi' \; \left(\varphi' - \text{потенциал возмущения}\right)$$

и учитывая, что вторые производные от φ' являются величинами второго порядка малости и можно пренебречь членами, содержащими произведения этих производных и возмущенных составляющих скорости $V_x{}'$, $V_r{}'$ или $V_\nu{}'$. В результате находим линеаризованное дифференциальное уравнение для добавочной величины потенциальной функции φ'

$$\left(V_\infty^2 - a_\infty^2\right)\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - a_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2} - \frac{a_\infty^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \nu^2} - \frac{a_\infty^2}{r}\cdot\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r} = 0. \tag{6}$$

Разделим все члены этого уравнения на $\left(-a_\infty^2\right)$:

$$\left(1 - M_\infty^2\right)\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \nu^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r} = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) используется для исследования потока около тонких тел вращения под *малым углом атаки*, т.е. *неосесимметричного маловозмущенного течения*. При *осесимметричном обтекании* (угол атаки равен нулю) уравнение упрощается, т.к. составляющая скорости

$$V_{\nu}{}' = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial \nu} = 0$$

и, следовательно

$$\left(1 - M_{\infty}^{2}\right)\frac{\partial^{2}\varphi'}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\varphi'}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = 0. \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) составляют *теоретическую основу аэродинамики стационарных линеаризованных течений около тонких тел вращения*. В результате решения этих уравнений определяют *потенциал возмущения* φ′. Решение уравнения для потенциала φ′ ведется при следующих граничных условиях. На границе возмущенной области потенциал φ′ должен быть равен нулю. В данном случае такой границей является поверхность слабой ударной волны, возникающей перед тонким заостренным телом и представляющей собой фактически линию слабого возмущения (простую волну сжатия) или линию Маха с углом наклона образующей к направлению вектора скорости $\overline{V}_{\infty}$, равным

$$\mu_{\infty} = \arcsin\left(1/M_{\infty}\right).$$

На поверхности обтекаемого тела потенциал φ′ должен удовлетворять условию безотрывного обтекания, в котором функцию, описывающую обтекаемую поверхность вращения, можно представить в виде

$$F = f\left(x\right) - r.$$

Тогда

$$\varphi_r / \varphi_x = dr/dx\,, \qquad (9)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varphi_r &= \partial\varphi/\partial r = \varphi_{\infty\, r} + \varphi'_r \\ \varphi_x &= \partial\varphi/\partial x = \varphi_{\infty\, x} + \varphi'_x \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Потенциал скоростей линеаризованного потока φ, обтекающего тело вращения под малым углом атаки (рис. 2), можно представить в виде суммы трех составляющих: потенциала невозмущенного потока φ_∞ , добавочного потенциала продольного возмущенного (осесимметричного) течения $\varphi_1{}'\,(x,\ r)$ и второго добавочного потенциала $\varphi_2{}'\,(x, r, \nu)$, возникающего от поперечного обтекания:

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi'_1(x,r) + \varphi'_2(x,r,\nu) \qquad (11)$$

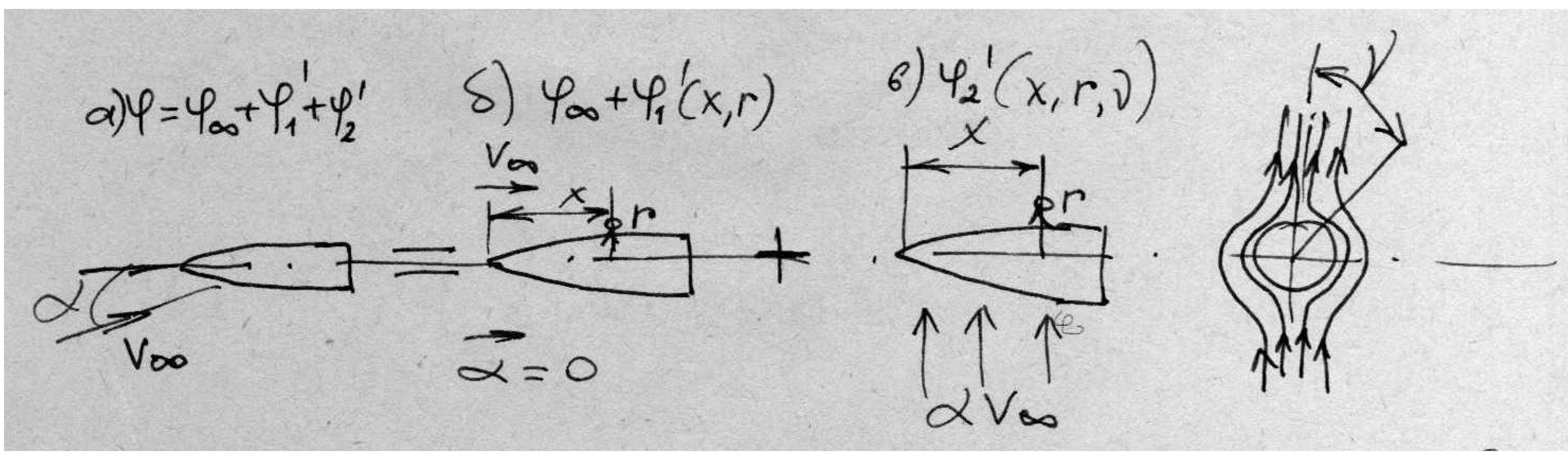

Рис. 2. Тонкое тело вращения в линеаризованном потоке под малым углом атаки:
а – неосесимметричное обтекание; б – осесимметричное обтекание;
в – добавочное поперечное обтекание

В теории линеаризованных течений $\varphi_1{}'$ и $\varphi_2{}'$ рассматриваются как функции, которые, являясь решениями уравнений движения, определяют независимые друг от друга потоки.

Добавочный потенциал от поперечного обтекания должен быть таким, чтобы на поверхности тела исчезла радиальная составляющая набегающего потока

$$V_{r\,\infty} = \alpha\; V_\infty \cos\nu.$$

Эта составляющая скорости может быть как сверхзвуковой, так и дозвуковой.

Коэффициент давления определяется по формуле

$$\overline{p} = \frac{2\left(p - p_\infty\right)}{k\,M_\infty^2\,p_\infty} = -2\left(\frac{V_x'}{V_\infty} + \frac{\left(V_r'\right)^2}{2V_\infty^2} + \frac{\left(V_\nu'\right)^2}{2V_\infty^2} - \frac{\alpha^2}{2}\right) \qquad (12)$$

Эту величину коэффициента давления можно представить в виде суммы двух составляющих, т.е.

$$\overline{p} = \overline{p}_1 + \overline{p}_2.$$

$\overline{p}_1$ определяется условиями осесимметричного обтекания:

$$\overline{p}_1 = \frac{-2}{V_\infty^2}\left[V_\infty \varphi'_{1x} + \frac{V_\infty^2}{2}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right], \qquad (13)$$

а другая $\overline{p}_2$ - поперечным обтеканием, зависящим от угла атаки:

$$\overline{p}_2 = \frac{-2}{V_\infty^2}\left[V_\infty \varphi'_{2\,x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'_{2\,\nu}}{r} - \alpha\; V_\infty \sin\nu\right)^2 - \frac{\alpha^2 V_\infty^2}{2}\right]. \qquad (14)$$

§ 2. Расчет осесимметричного обтекания

Задача о линеаризованном осесимметричном обтекании тонкого тела вращения будет решена, если найти добавочный потенциал $\varphi_1{}'$, удовлетворяющий линеаризованному уравнению (8):

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi'}{\partial r}=0.$$

Представим теперь, что в некоторой точке *x = ε* на оси тела находится источник жидкости с расходом (интенсивностью) *q*. Потенциал скоростей, индуцируемый этим источником в точке с координатами (*x, ρ*), расположенной на шаровой поверхности радиуса $\rho=\sqrt{\left(x-\varepsilon\right)^2+r^2}$,

будет определяться в виде $\varphi_1'=-\dfrac{q}{4\pi\sqrt{\left(x-\varepsilon\right)^2+r^2}}$.

Если теперь представить, что вдоль оси тела на участке от *ε = 0* до *ε = x – α´r* расположена система источников с переменной интенсивностью *q = – 4π f*(*ε*), отнесенной к единице длины, то суммарный потенциал в рассматриваемой точке (*x, r*) от действия всех источников выразится формулой

$$\varphi_1'=\int\limits_0^{x-\alpha' r}\frac{f\left(\varepsilon\right)}{\sqrt{\left(x-\varepsilon\right)^2+r^2}}d\varepsilon. \qquad (15)$$

Решение (15) представляет собой потенциальную функцию от источников, непрерывно распределенных вдоль оси тела. Найденное решение отражает содержание *метода источников*, согласно которому обтекаемое тело заменяется системой непрерывно распределенных вдоль его оси как источников, так и стоков.

Закон распределения источников (стоков), т.е. вид функции $f(\varepsilon)$, должен быть таким, чтобы в результате наложения невозмущенного потока на течение от этих источников одна из линий тока суммарного потока совпадала с образующей тела вращения, т.е. $\varphi_1{}'$ должна удовлетворять условию безотрывного обтекания.

Воспользовавшись условием безотрывного обтекания, получим зависимость для определения функции $f(x)$:

$$f(x) = -r\,(dr/dx)\,V_\infty . \qquad (16)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$f\left(x\right) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{dS\left(x\right)}{dx}V_\infty = -\frac{V_\infty}{2\pi}S'\left(x\right), \qquad (17)$$

где $S(x) = \pi r^2$ – текущее значение площади поперечного сечения тонкого тела.

Выражение (17) для функции f(x), определяющей закон распределения источников вдоль оси в предельном случае при $r \to 0$, можно использовать для расчета составляющей скорости, необходимой при вычислении давления на поверхности тонких реальных тел вращения. В результате

$$V'_{x1} = \varphi'_{1x} = -\frac{V_\infty}{2\pi}\int_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} S''\left(x - \alpha' r\cdot\operatorname{ch} z\right)dz. \qquad (18)$$

Таким образом для расчета скорости по формуле (18) необходимо знать форму тела вращения и распределение площади вдоль оси, т.е. вид функции S(x).

Пусть, например, имеем тело вращения с параболической образующей (рис. 1), уравнение которой задано в виде

$$\bar{r} = \bar{x}\left(2 - \bar{x}\right), \qquad (19)$$

где $\bar{r} = r/r_{мид}$, $\bar{x} = x/x_{мид}$ ($x_{мид}$ – расстояние от носка до места миделева сечения тела вращения с радиусом $r_{мид}$).

В соответствии с уравнением (19) площадь поперечного сечения

$$S(x) = \pi r^2 = \frac{\pi x^2}{4\lambda_{мид}^2}\left(2 - \frac{x}{x_{мид}}\right)^2. \qquad (20)$$

Найдем отсюда вторую производную:

$$S''(x) = \frac{d^2 S(x)}{dx^2} = \frac{\pi}{\lambda_{мид}^2}\left(2 - \frac{6x}{x_{мид}} + \frac{3x^2}{x_{мид}^2}\right). \qquad (21)$$

Произведя замену *x* на *ε = x – α´r ch z* , найдем

$$S''(x - \alpha' r \cdot \mathrm{ch}\, z) = \frac{\pi}{\lambda_{мид}^2}\left[2 - \frac{6}{x_{мид}}(x - \alpha' r \cdot \mathrm{ch}\, z) + \frac{3}{x_{мид}^2}(x - \alpha' r \cdot \mathrm{ch}\, z)^2\right]. \qquad (22)$$

После подстановки (22) в (18), получим

$$V'_{x1} = -\frac{V_\infty}{2\lambda^2_{мид}} \int\limits_0^{\operatorname{arch} u} \left[2 - \frac{6\bar{x}}{u}\left(u - \operatorname{ch} z\right) + \frac{3\bar{x}^2}{u^2}\left(u - \operatorname{ch} z\right)^2 \right] dz, \qquad (23)$$

где $\bar{x} = x/x_{мид}\,; \qquad u = x/\left(\alpha' r\right).$ (24)

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} i_x^0 &= I_0\,; \\ i_x^1 &= u\,I_0 - I_1\,; \\ i_x^2 &= u^2 I_0 - 2u\,I_1 + I_2\,, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

где величины I_n определяются в виде интегралов

$$I_n = \int\limits_0^{\operatorname{arch} u} \left(\operatorname{ch} z\right)^n \, dz, \qquad \left(n = 1, 2, 3\right). \qquad (26)$$

В соответствии с обозначением (25)

$$V'_{x1} = -\frac{V_\infty}{2\lambda^2_{мид}} \left(2\,i_x^0 - \frac{6\bar{x}}{u} \cdot i_x^1 + \frac{3\bar{x}^2}{u^2} \cdot i_x^2 \right). \qquad (27)$$

В случае более общего задания функции S´´(x) в виде многочлена

$$S''(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \qquad (28)$$

выражение, аналогичное (27), можно представить следующим образом:

$$V'_{x1} = -\sum_{n=0}^{k} b_n i_x^n . \qquad (29)$$

Коэффициенты a_n зависят от вида образующей тела вращения, а b_n также от скорости V_∞. Значения функции i_x^n для $n = 0,1,2$, представленные в виде (25), соответствуют заданию образующей тела по уравнению параболы второй степени.

Для тела вращения с уравнением образующей более высокой степени необходимо вычислять значения i_x^n для $n = 3,4$, и т.д. В частности, если уравнение образующей таково, что производная S´´(x) (см. (28)) определяется по уравнению

$$S''(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n x^n , \qquad (28´)$$

то в соответствии с (29) составляющая скорости

$$V'_{x1} = -\sum_{n=0}^{3} b_n i_x^n . \qquad (29´)$$

где i_x^n вычисляется для значений $n = 0,1,2$, по формулам (25), а для $n = 3$ из выражения

$$i_x^3 = u^3 I_0 - 3u^2 I_1 + 3u I_2 - I_3 . \qquad (30)$$

Как частный случай, из соотношения (27) можно получить выражение для составляющей скорости на тонком конусе. Для этого надо заменить 1 / $\lambda_{мид}$ на $\beta_0 = \beta_к$ (угол заострения параболического тела вращения у острия) и принять

$$\bar{x} = 0.$$

Тогда

$$V'_{x1} = -V_\infty \left(i^0_x\right)_к \beta^2_к. \qquad (31)$$

Имея в виду, что в соответствии с (25) и (26) для конуса $i^0_к = I_0 = \operatorname{arch} u_к$,

где

$$u_к = \left(\frac{x}{\alpha' r}\right)_к = \frac{1}{\alpha'\beta_к},$$

напишем для составляющей скорости

$$V'_{x1} = -V_\infty \beta^2_к \operatorname{arch} u_к = -V_\infty \beta^2_к \ln\left(u_к + \sqrt{u^2_к - 1}\right). \qquad (31')$$

По найденным значениям V_{x1}' можно найти по формуле (13) коэффициент давления на поверхности тела вращения в соответствующей точке. В частности на конической поверхности, где добавочная составляющая скорости определяется по (31´), коэффициент давления

$$\bar{p}_{1к} = \beta^2_к \left[2 \cdot \ln\left(u_к + \sqrt{u^2_к - 1}\right) - 1\right]. \qquad (32)$$

В соответствии с тем, что $c_{xк} = \bar{p}_к$, зависимость (32) определяет коэффициент волнового сопротивления тонкого конуса, т.е.

$$c_{x\,к} = \bar{p}_{1к} = \beta^2_к \left[2 \cdot \ln\left(u_к + \sqrt{u^2_к - 1}\right) - 1\right]. \qquad (32')$$

Для тонкого тела вращения произвольной формы расчет коэффициента волнового сопротивления следует вести по формуле

$$c_{x в} = \frac{X_в}{q_\infty S_{мид}} = \frac{2}{r_{мид}} \int_0^{x_к} \overline{p}\ \overline{r} \left(\frac{dr}{dx}\right) dx,$$

в которой коэффициент давления в соответствии с (18) и (13)

$$\overline{p}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\operatorname{arch} u} S''\left(x - \alpha' r \cdot \operatorname{ch} z\right) dz - \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 . \quad (33)$$

Полагая *dr / dx = tg ≈ β*, найдем формулу для коэффициента волнового сопротивления

$$c_{x в} = 2 \int_0^{\tilde{x}_к} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\operatorname{arch} u} S''\left(x - \alpha' r \cdot \operatorname{ch} z\right) dz - \beta^2\right] \overline{r}\ \beta\ d\tilde{x}, \quad (34)$$

где $\tilde{x} = x / r_{мид}$.

Для параболической образующей с уравнением $r = (r_{мид} / x_{мид}) \cdot x \cdot (2 - x / x_{мид})$ производная

$$\frac{dr}{dx} = \frac{2 \cdot r_{мид}}{x_{мид}}\left(1 - \overline{x}\right) = \frac{1}{\lambda_{мид}}\left(1 - \overline{x}\right) = \beta_0\left(1 - \overline{x}\right), \quad (35)$$

где $\overline{x} = x / x_{мид}$.

Интеграл в (33) может быть выражен в соответствии с (22) в виде

$$\int_0^{\operatorname{arch} u} S''\left(x-\alpha' r\cdot \operatorname{ch} z\right)dz = \beta_0^2 N_1\left(u,\bar{x}\right). \qquad (36)$$

Здесь N_1 – некоторая функция безразмерной координаты $\bar{x}$ и параметра u, определяемого из условия

$$u = \frac{x}{\alpha' r} = \frac{x_{мид}}{\alpha' r_{мид}} \frac{1}{2 - x/x_{мид}} = \frac{u_0}{2-\bar{x}}, \qquad (37)$$

где $u_0 = 1 / (\alpha' \beta_0)$. Принимая во внимание (35) – (37), зависимость (33) можно представить в следующем общем виде

$$\bar{p}_1 = \beta_0^2\, N\left(u_0,\bar{x}\right), \qquad (38)$$

где N – некоторая функция параметра u_0 и безразмерной координаты $\bar{x}$.

С учетом (38) коэффициент волнового сопротивления (34)

$$c_{в} = \beta_0^2\, D\left(u_0\right), \qquad (39)$$

где D – некоторая функция только параметра u_0.

Общие формулы (38) и (39) позволяют сделать следующий вывод об аэродинамическом подобии потоков около параболических тел вращения: Если эти потоки характеризуются одним и тем же значением параметра u_0, то в соответственных точках с одинаковыми безразмерными координатами $\bar{x}$ будут одинаковы отношения $\bar{p}_1/\beta_0^2$.

В аэродинамически подобных потоках тела вращения испытывают такие осевые усилия, что отношения $c_{x\,в} / \beta_0^{\,2}$ для них будут одинаковыми. Таким образом, критерием подобия в данном случае является параметр

$$u_0 = \frac{1}{\alpha'\beta_0} = \frac{1}{\beta_0\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{\lambda_{мид}}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \qquad (40)$$

Для чисел $M_\infty >> 1$ параметр u_0 можно представить в виде

$$u_0 = 1/K_1, \qquad (41)$$

где $K_1 = \beta_0 M_\infty = M_\infty / \lambda_{мид}$.

Умножая обе части (38) на $M_\infty^{\,2}$ и учитывая зависимость (41), найдем

$$p_1/p_\infty - 1 = N_2\left(K_1, \bar{x}\right), \qquad (42)$$

где N_2 – некоторая функция аргументов K_1 и $\bar{x}$. В соответствии с выражением (42) в данной точке $\bar{x}$ функция давления $(p_1 / p_\infty - 1)$ зависит только от параметра K_1. Закон подобия по этому параметру подтверждается также результатами расчета по методу характеристик.

Из выражения $u_0 = (\alpha' \beta_0)^{-1}$ следует, что если тело вращения тонкое, т.е. удлинение велико, то для сохранения неравенства $u_0 > 1$ необходимо выполнить условие $M_\infty \to 1$. Если же число $M_\infty \to 1$, то, как следует из формулы (31´), возмущенная скорость по абсолютной величине достигает бесконечно большого значения, что физически невозможно.

Таким образом, теория линеаризованных течений и законы их подобия пригодны при одновременном соблюдении двух неравенств:

$$\lambda_{мид} > \sqrt{M_\infty^2 - 1} \qquad \text{и} \qquad M_\infty > 1. \qquad (43)$$

Сравнение с экспериментальными данными показывает, что расчеты по линеаризованной теории и применение критериев подобия возможны для удлинений $\lambda_{мид} \geq 2$ и чисел $M_\infty \geq 1,4 \div 1,5$.