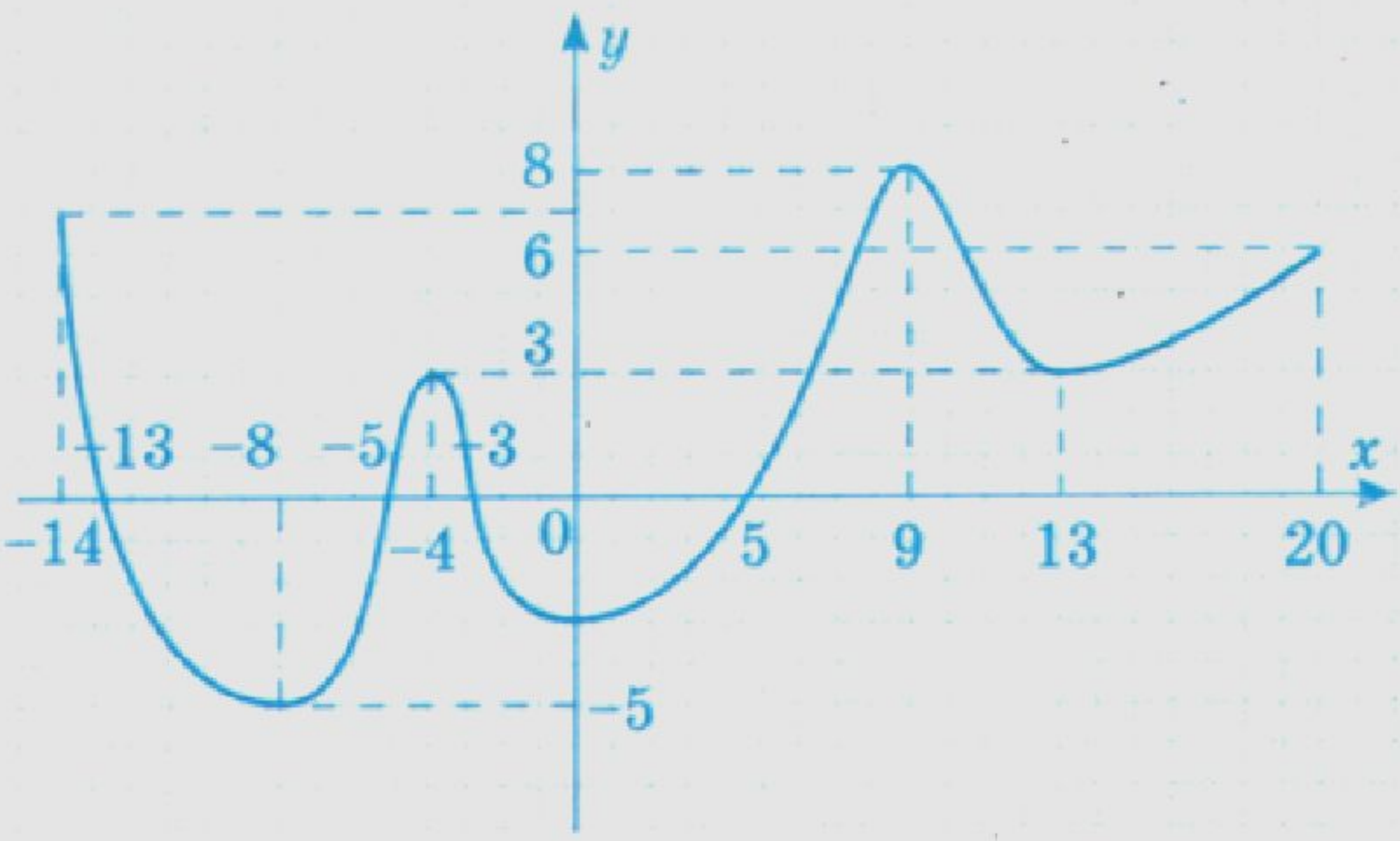
Тема:

«Преобразование графиков функции»

Актуализация опорных знаний – чтение графиков функции



Цели:

1) Систематизировать приемы построения графиков.

2) Показать их применение при построении графиков сложных функций;

Основные элементарные функции :

1) Степенная функция $y = x^{\alpha}, x \in D_f, \alpha \in R;$

2) Показательная функция $y = a^x, \ a > 0, \ ;$

3) Логарифмическая функция

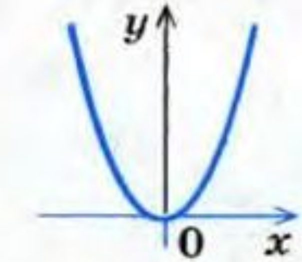
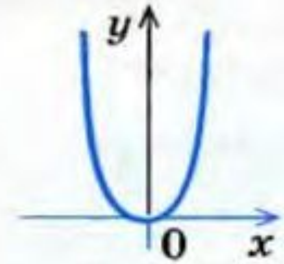
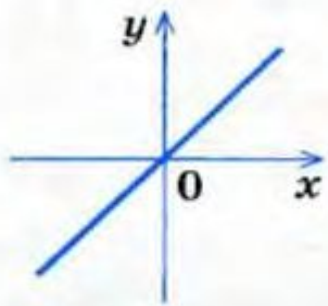
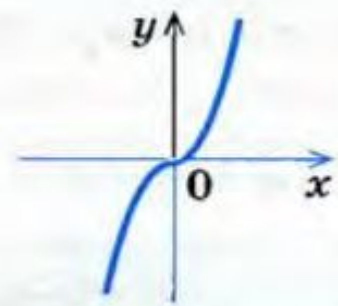
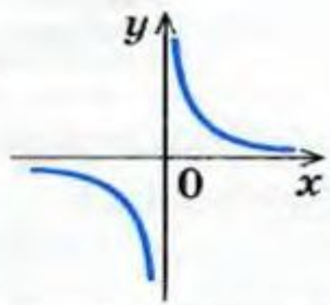
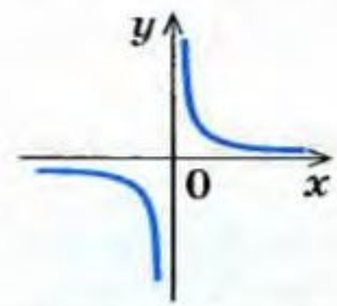
$$y = \log_a x, \ a > 0, \ a \neq 1;$$

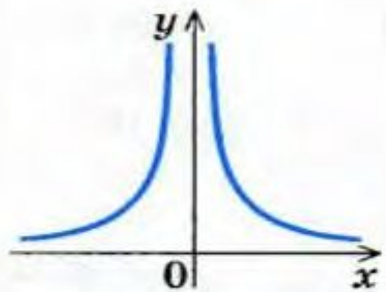
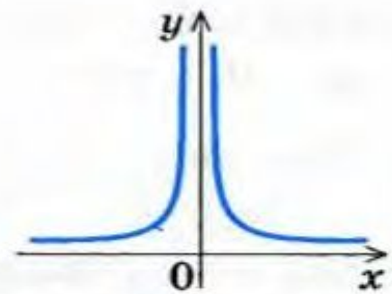
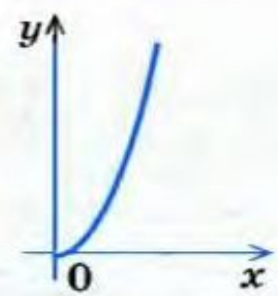
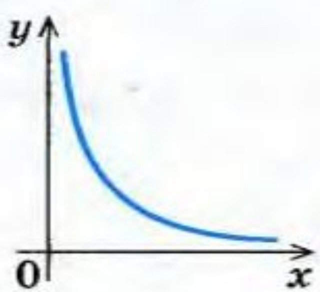
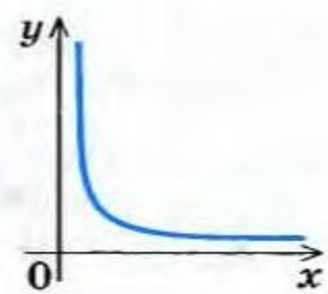
4) Тригонометрические функции

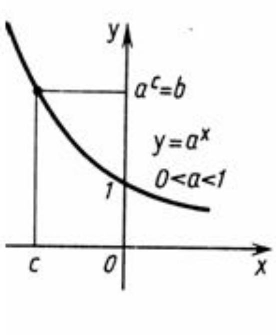
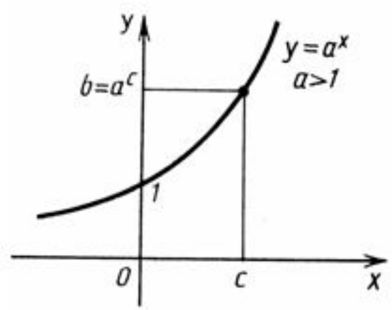
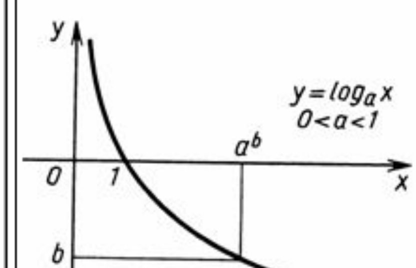
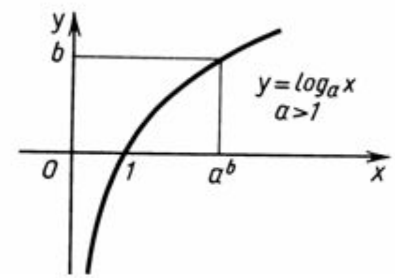
$$y = \sin x, \ y = \cos x, \ y = \operatorname{tg} x, \ y = \operatorname{ctg} x, x \in D_f$$

5) Обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x, \ y = \arccos x, \ y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x.$$

	Графики степенной функции ($y = x^\alpha$)	
α — четное натуральное число	$y = x^2$ 	$y = x^4$ 
α — нечетное натуральное число	$y = x^1$ 	$y = x^3$ 
α — нечетное отрицательное число	$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 	$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ 

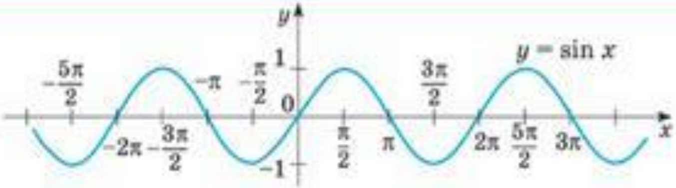
α — четное отрицательное число	$y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$ 
α — нецелое положительное число	$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 
α — нецелое отрицательное число	$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 

<table>
<tr><td colspan="2">Показательная функция</td><td colspan="2">Логарифмическая функция</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = a^x$</td><td colspan="2">$y = \log_a x$</td></tr>
<tr><td>$0 < a < 1$</td><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td><td>$a > 1$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$x \in (-\infty; +\infty)$
$y \in (0; +\infty)$</td><td colspan="2">$x \in (0; +\infty)$
$y \in (-\infty; +\infty)$</td></tr>
</table>

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

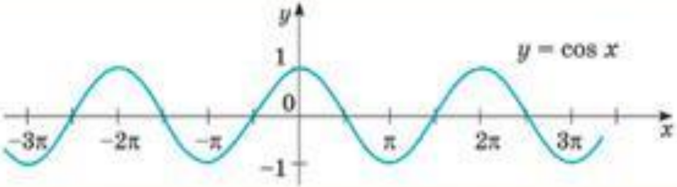
$y = \sin x$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$
$E(y) = [-1; 1]$
Период $T = 2\pi$.
Нечетная функция.



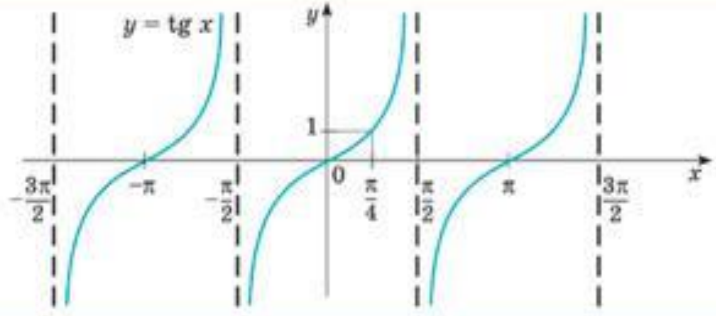
$y = \cos x$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$
$E(y) = [-1; 1]$
Период $T = 2\pi$.
Четная функция.



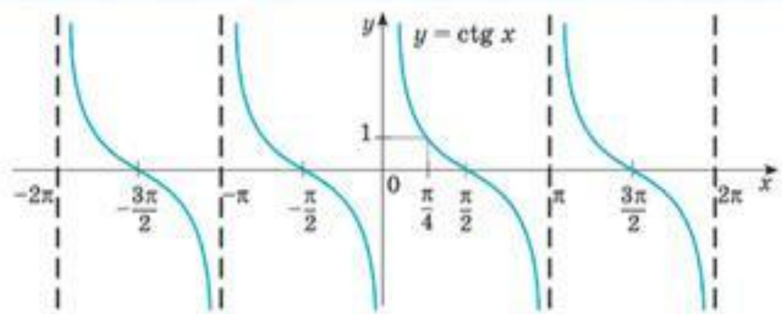
$y = \operatorname{tg} x$

$D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
$E(y) = (-\infty; +\infty)$
Период $T = \pi$.
Нечетная функция.
Возрастает на всей области определения.
Асимптоты $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.



$y = \operatorname{ctg} x$

$D(y) = (\pi k; 2\pi k)$
$E(y) = (-\infty; +\infty)$
Период $T = \pi$.
Убывает на всей области определения.
Асимптоты $x = \pi k$.



дрофа

Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin x$

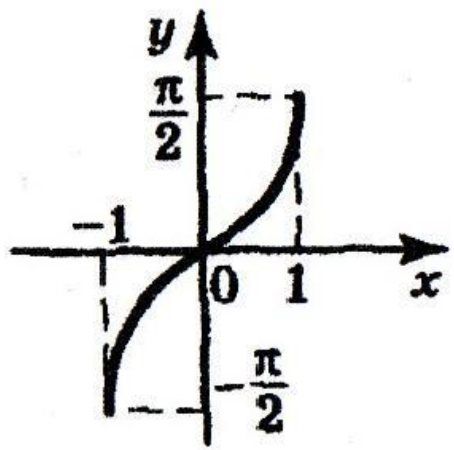


Рис. 15

$y = \arccos x$

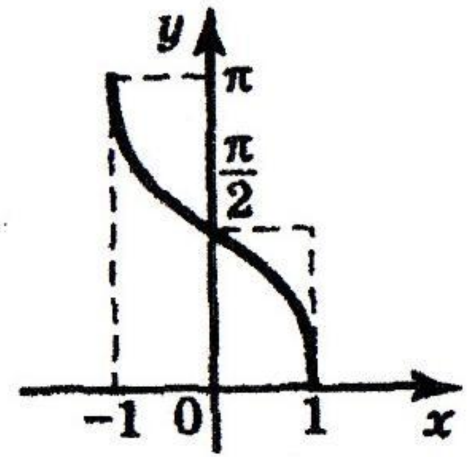


Рис. 16

$y = \operatorname{arctg} x$

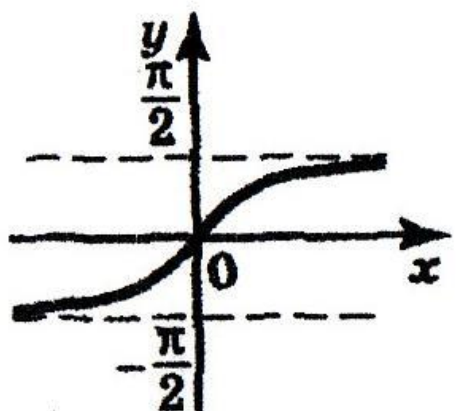


Рис. 17

$y = \operatorname{arcctg} x$

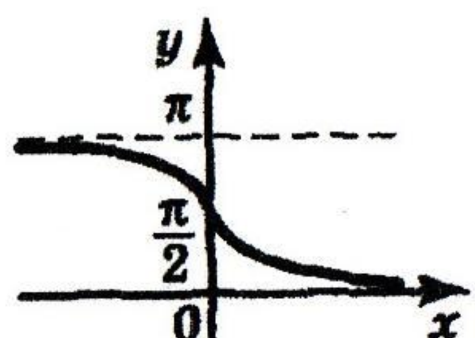
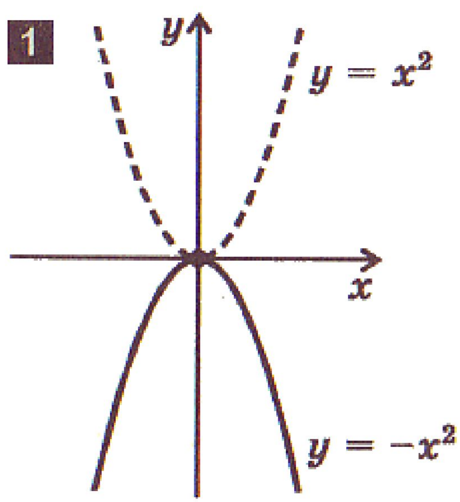


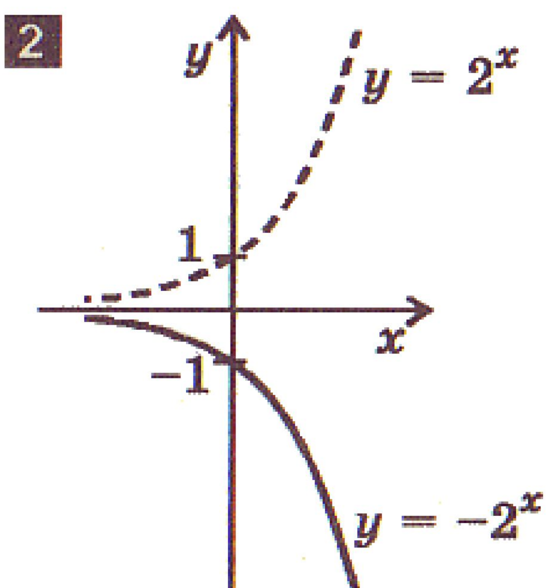
Рис. 18

Рассмотрим основные правила преобразования графиков на примерах элементарных функций

1) Преобразование симметрии относительно оси x
f(x)□-f(x)

Примеры:





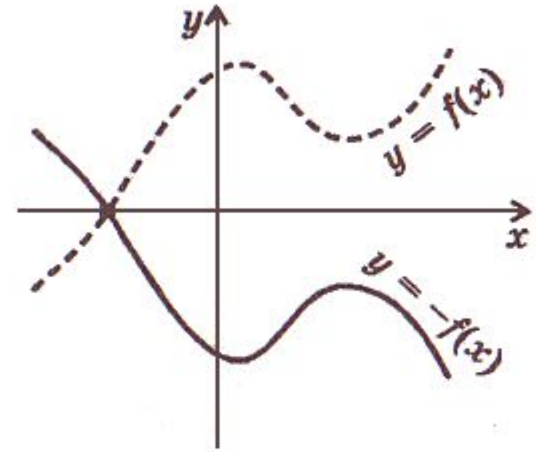


График функции y=-f(x) получается преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно оси x.

Замечание. *Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.*

2) Преобразование симметрии относительно оси у f(x)→f(-x)

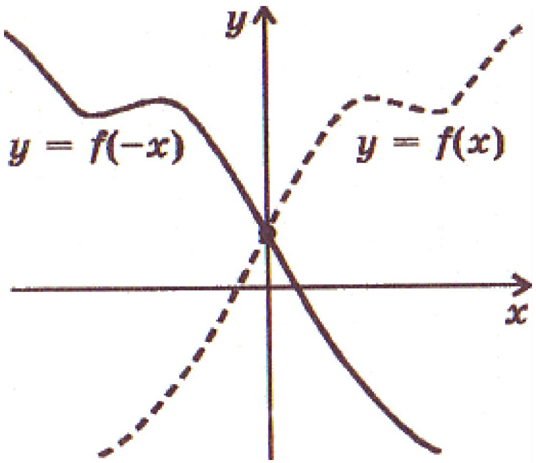


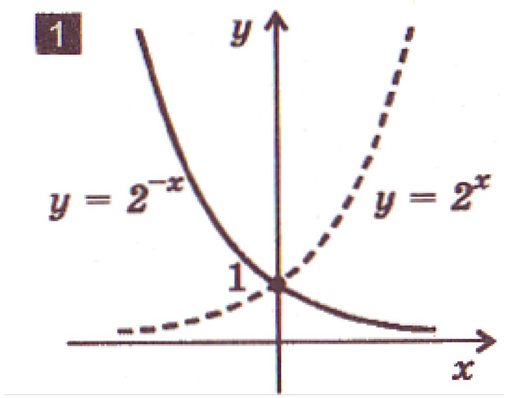
График функции y=f(-x) получается преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно оси y.

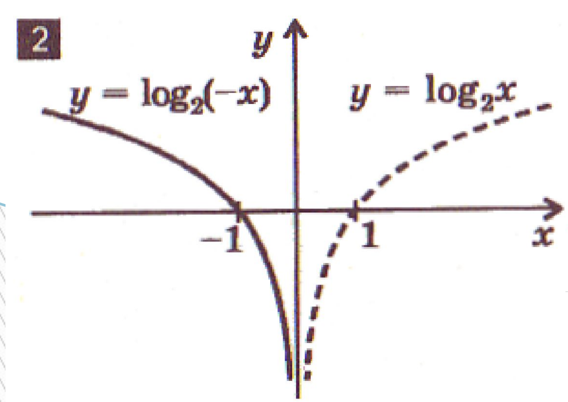
Замечание. Точка пересечения графика с осью y остается неизменной.

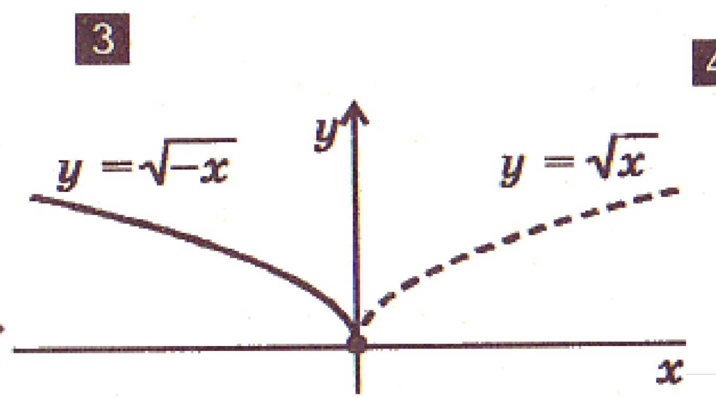
Замечание 1*.* График четной функции не изменяется при отражении относительно оси y, поскольку для четной функции f(-x)=f(x). ***Пример:*** $(-x)^2=x^2$

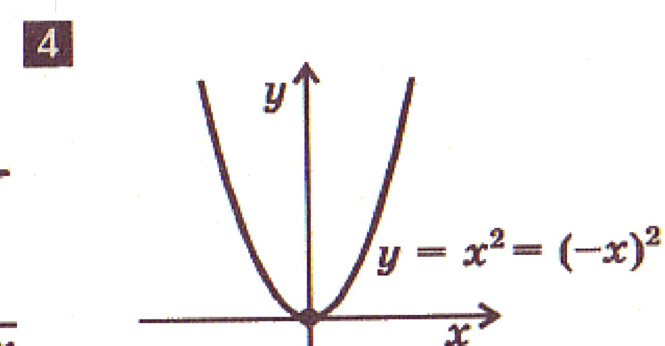
Замечание 2. График нечетной функции изменяется одинаково как при отражении относительно оси x, так и при отражении относительно оси y, посольку для нечетной функции f(-x)=-f(x). ***Пример:*** sin(-x)=-sinx.

Примеры:





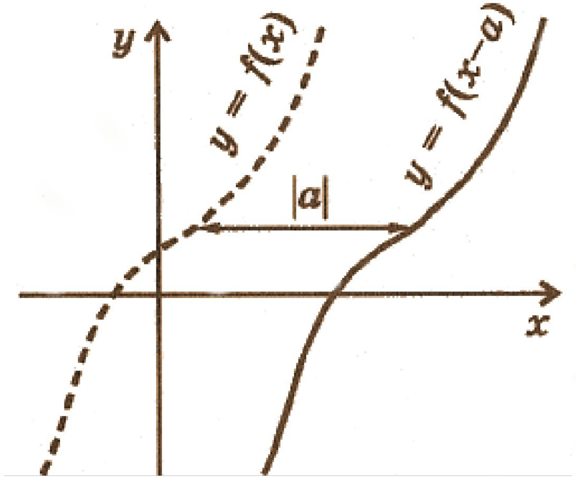




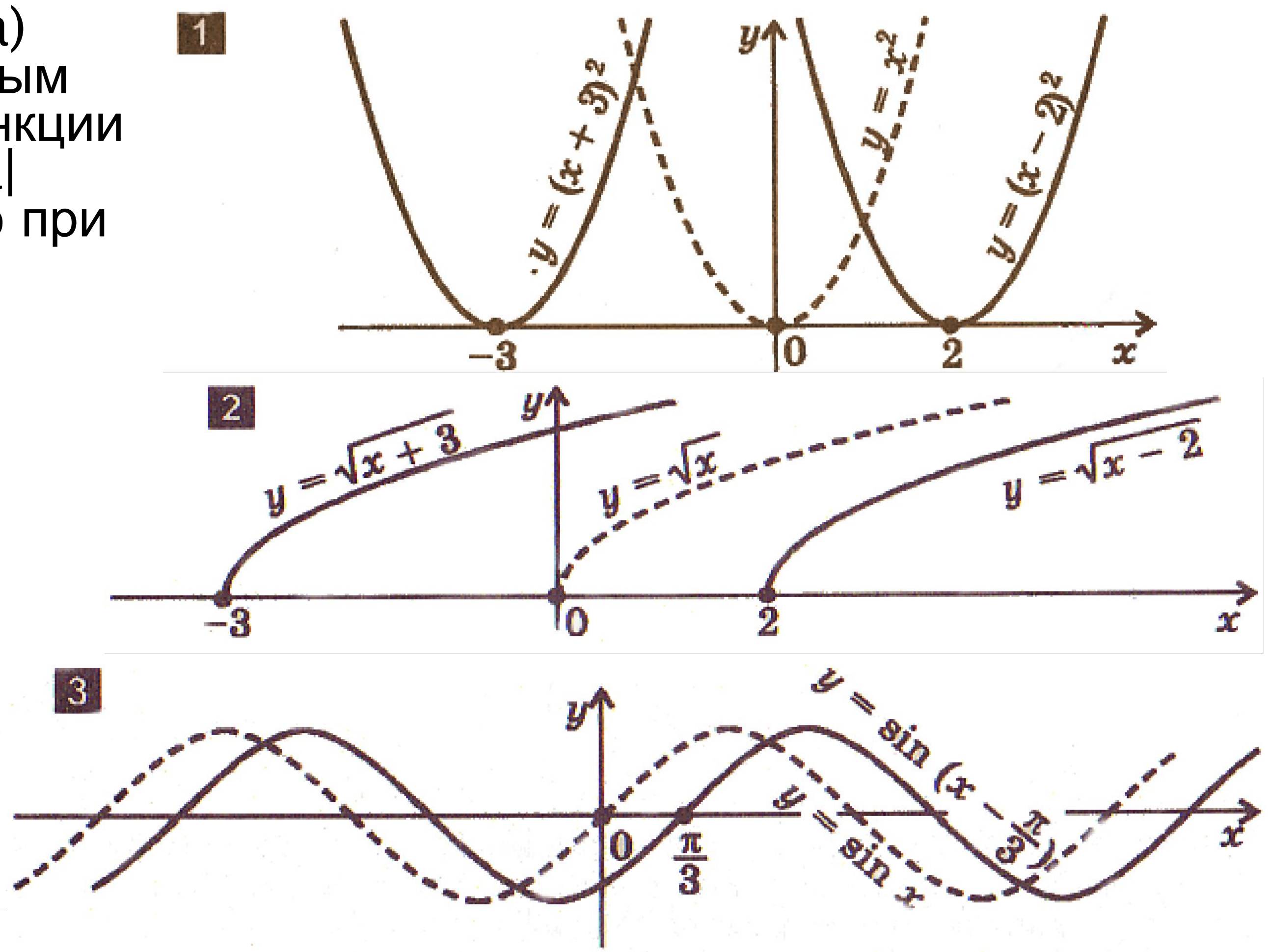
3) Параллельный перенос вдоль оси x

f(x)→f(x-a)

График функции y=f(x-a) получается параллельным переносом графика функции y=f(x) вдоль оси x на |a| вправо при a>0 и влево при a<0.



Примеры:

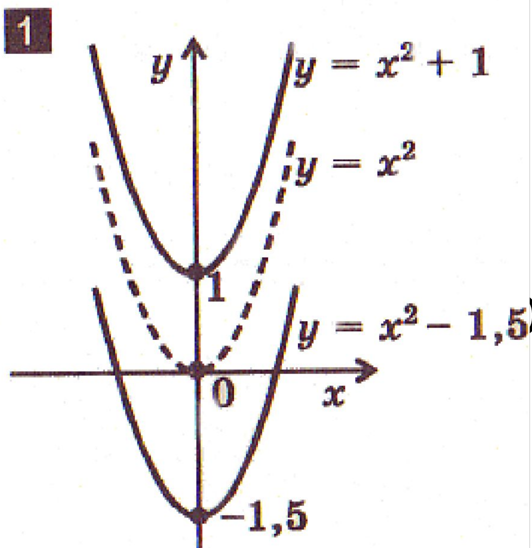


Замечание. График периодической функции с периодом T не изменяется при параллельных переносах вдоль оси x на nT, n∈Z.

4) Параллельный перенос вдоль оси y
f(x)→f(x)+b

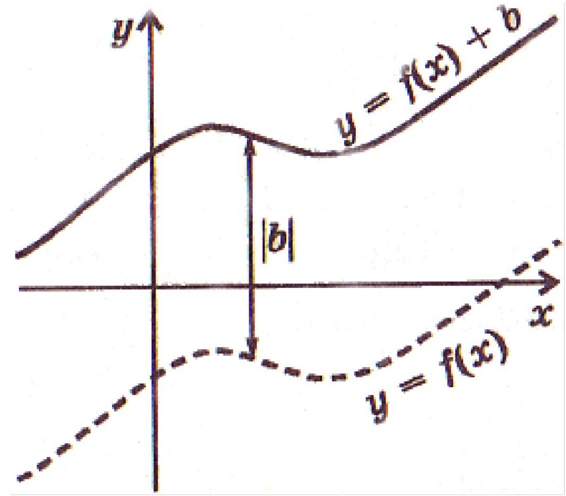
Примеры:

и



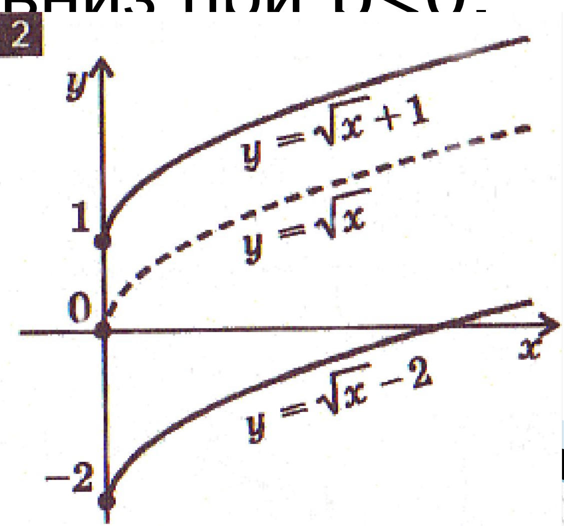
фика

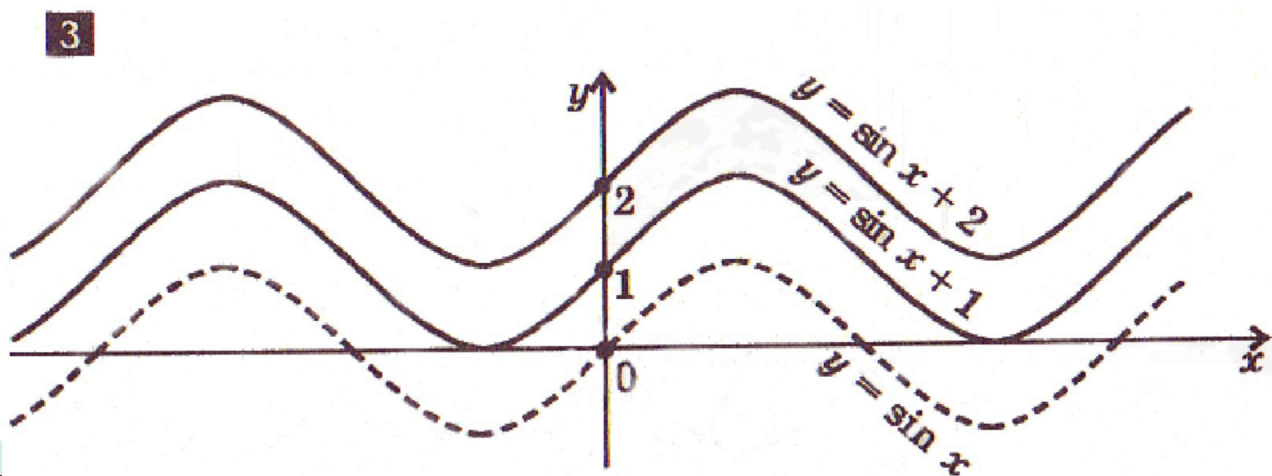
|b|



вверх при b>0 и

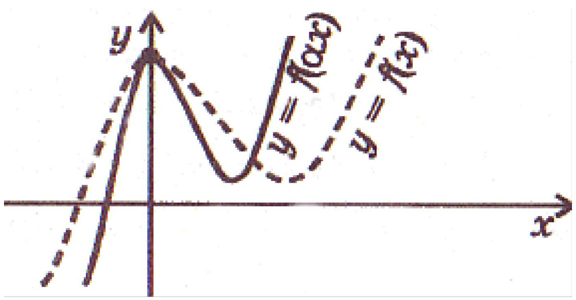
вниз при b<0.



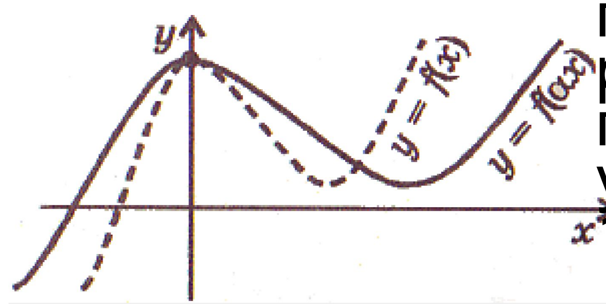


5) Сжатие и растяжение вдоль оси x
f(x)□f(αx), где α>0

$\alpha > 1$



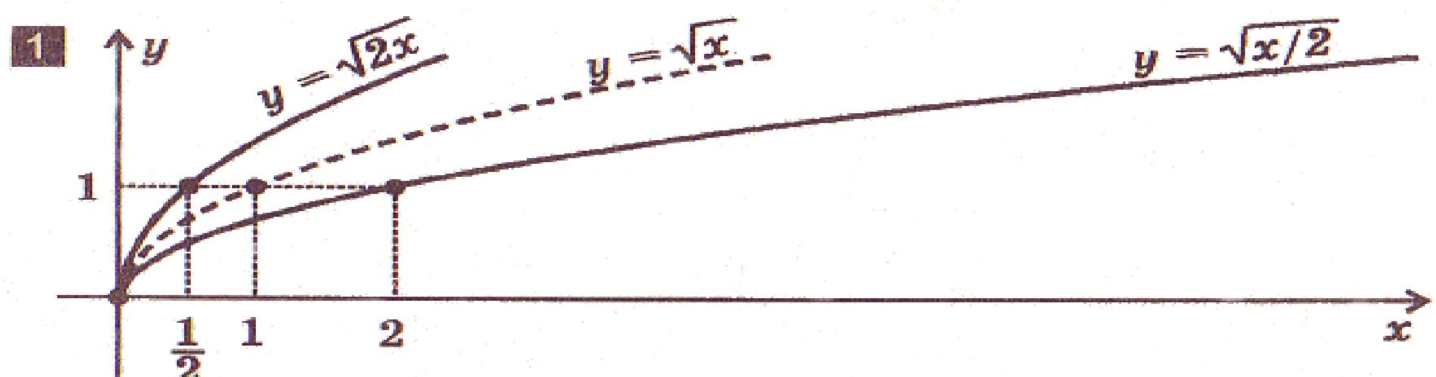
$0 < \alpha < 1$



0<α<1 График функции y=f(αx) получается растяжением графика функции y=f(x) вдоль оси x в 1/α раз.

α>1 График функции y=a(αx) получается сжатием графика функции y=f(x) вдоль оси α раз.

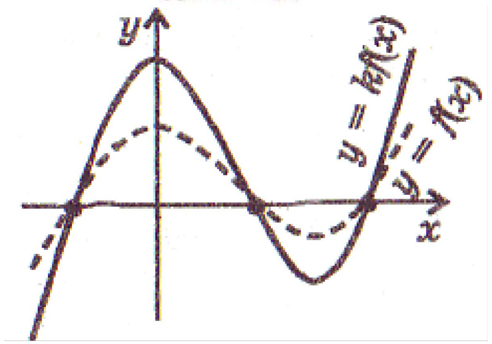
Примеры:



Замечание. Точки с пересечения графика с осью у остаются неизменными.

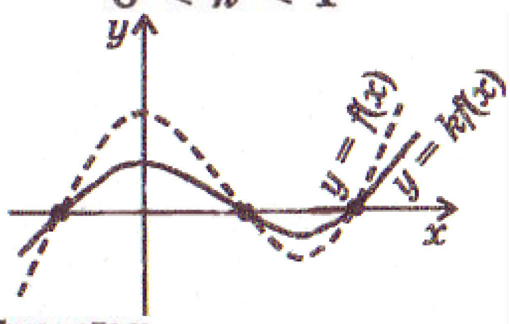
6) Сжатие и растяжение вдоль оси y f(x)□kf(x), где k>0

$k > 1$



k>1 График функции y=kf(x) получается растяжением графика функции y=f(x) вдоль оси y в k раз.

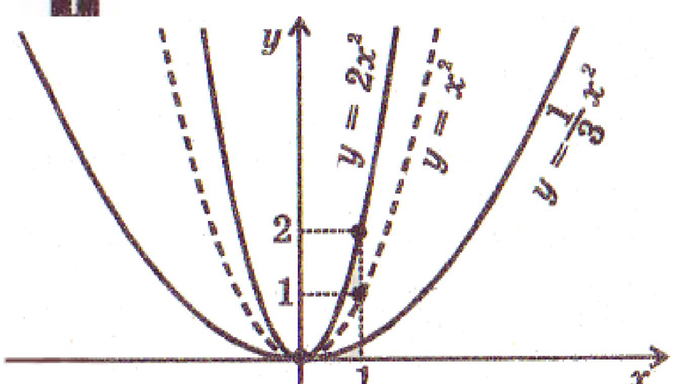
$0 < k < 1$

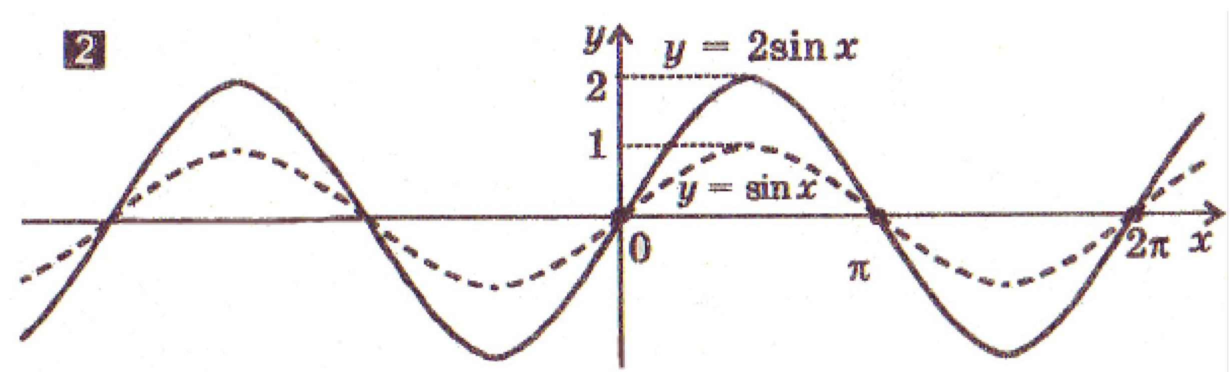


0<k<1 График функции y=kf(x) получается сжатием графика функции y=f(x) вдоль оси y в 1/k раз.

Примеры:

1





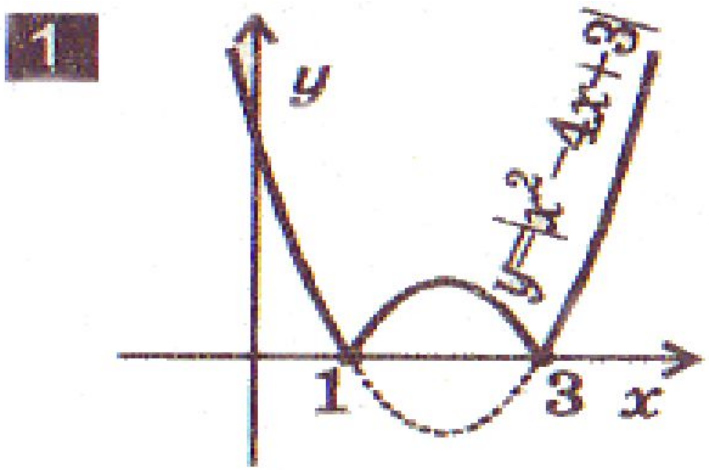
Замечание. Точки пере[illegible]ения графика с осью x остаются неизменными.

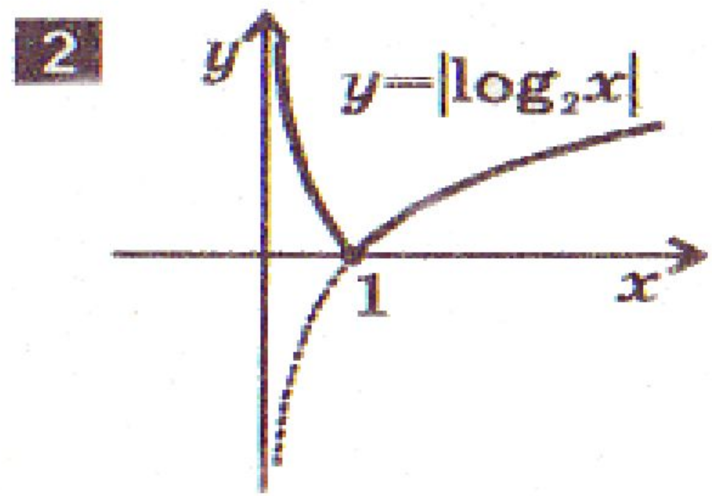
7) Построение графика функции y=|f(x)|

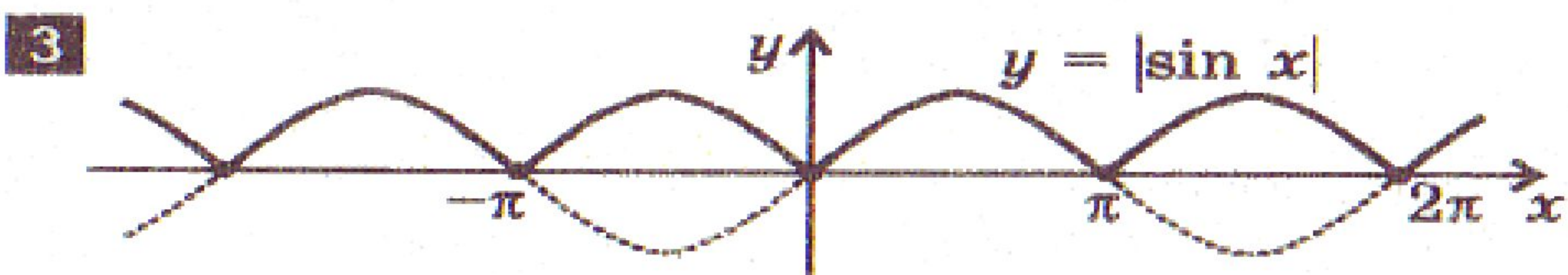
Части графика функции y=f(x), лежащие выше оси x и на оси x, остаются без изменения, а лежащие ниже оси x – симметрично отображаются относительно этой оси (вверх).

Замечание. Функция y=|f(x)| неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

Примеры:





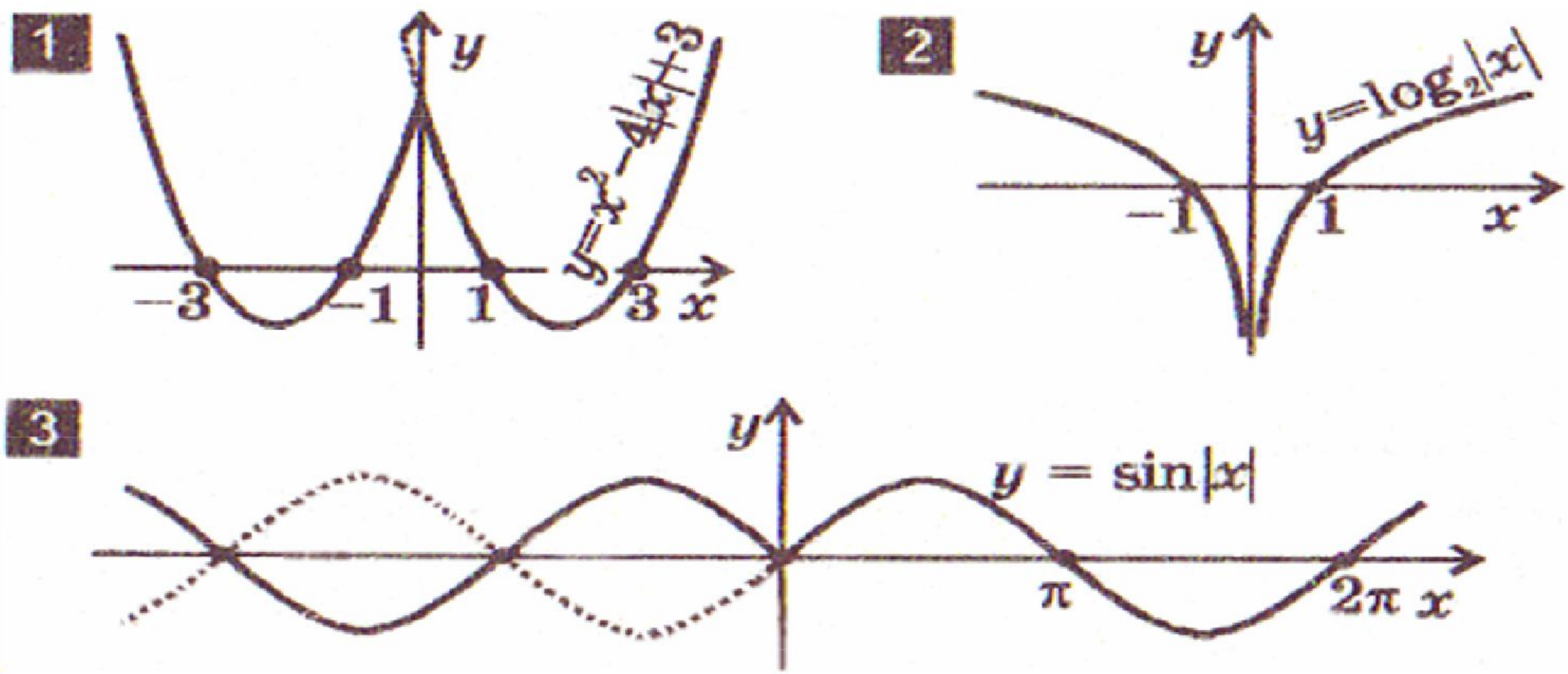


8) Построение графика функции y=f(|x|)

Часть графика функции y=f(x), лежащая левее оси y, удаляется, а часть, лежащая правее оси y – остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика лежащая на оси y, остается неизменной.

Замечание. Функция y=f(|x|) четная (ее график симметричен относительно оси y).

Примеры:



9) Построение графика обратной функции

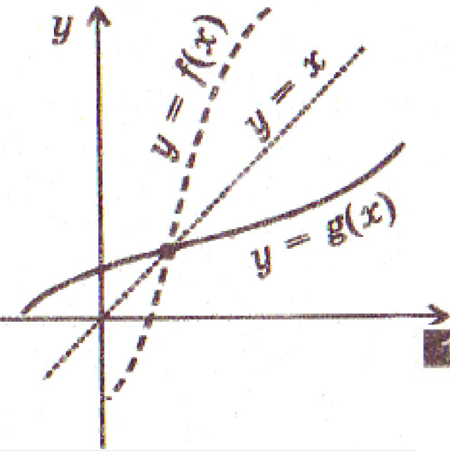
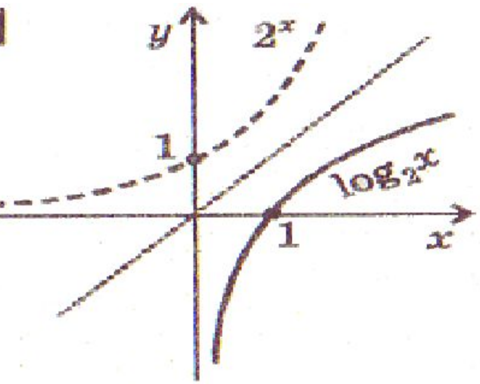


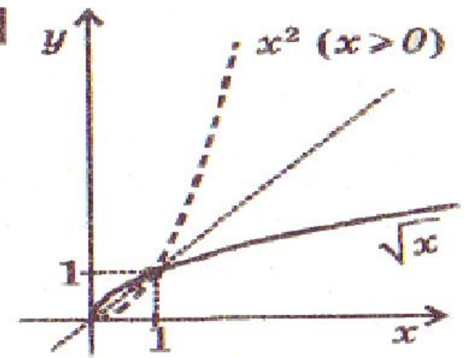
График функции y=*g*(x), обратной функции y=f(x), можно получить преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно прямой y=x.

Замечание. Описанное построение производить только для функции, имеющей обратную.

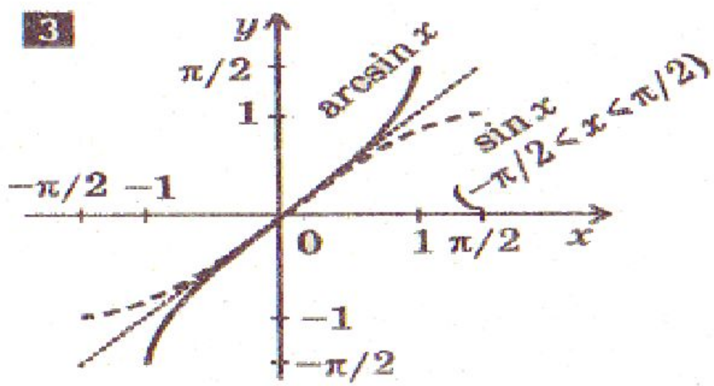
1



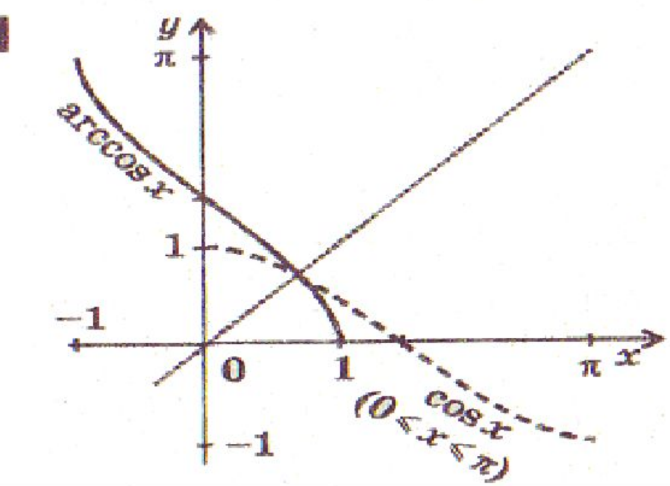
2



3



4



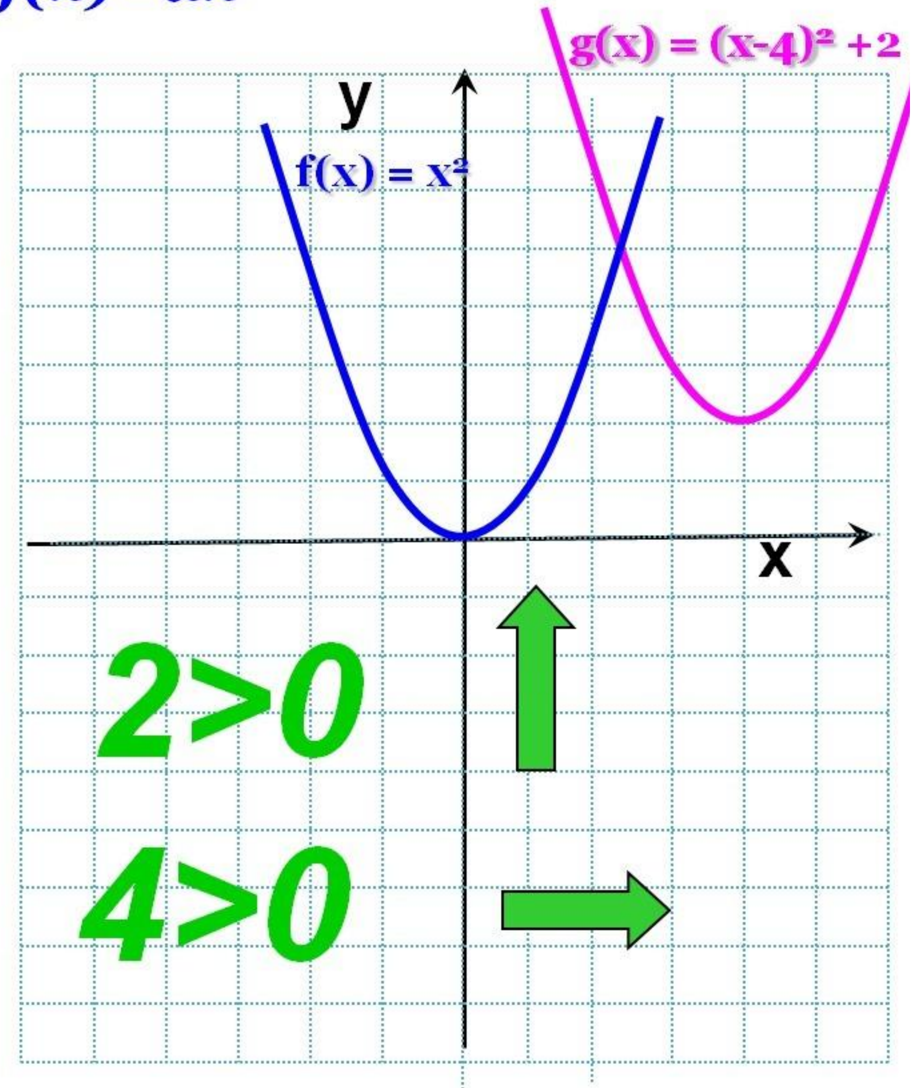
Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

Алгоритм построения графика функции $g(x)=a(x-m)^2 + n$ путём преобразования графика функции $f(x)=ax^2$

1. Построить график функции $f(x)=ax^2$.

2. Осуществить параллельный перенос графика функции $f(x)=ax^2$ вдоль оси OX на $|m|$ единиц масштаба влево, если $m<0$, и вправо, если $m>0$.

3. Осуществить параллельный перенос графика функции $f(x)=ax^2$ вдоль оси OY на $|n|$ единиц масштаба вверх, если $n>0$, и вниз, если $n<0$.



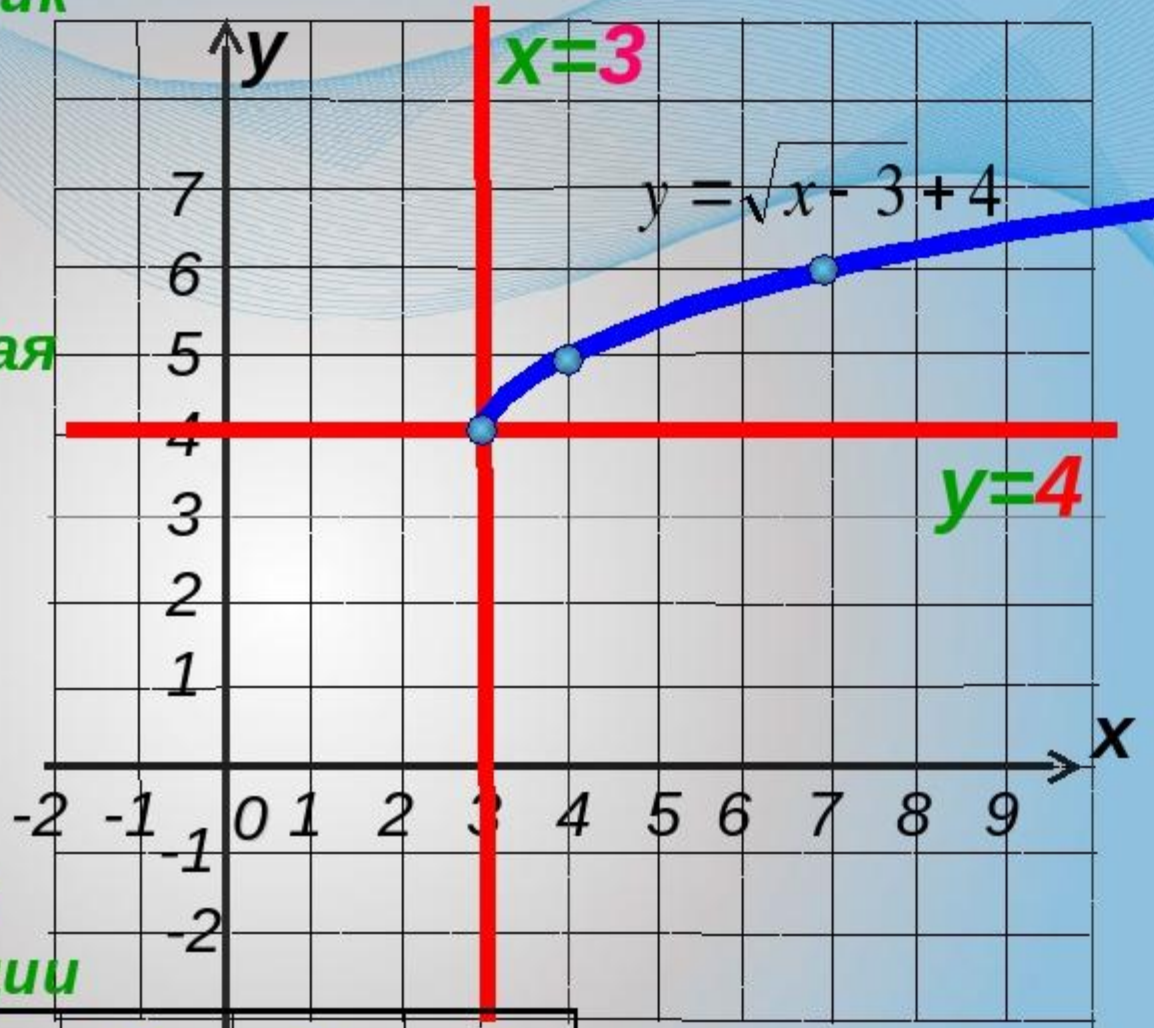
Постройте график функции:

$$y=\sqrt{x-3}+4$$

1. Вспомогательная система координат:

$x=3$

$y=4$



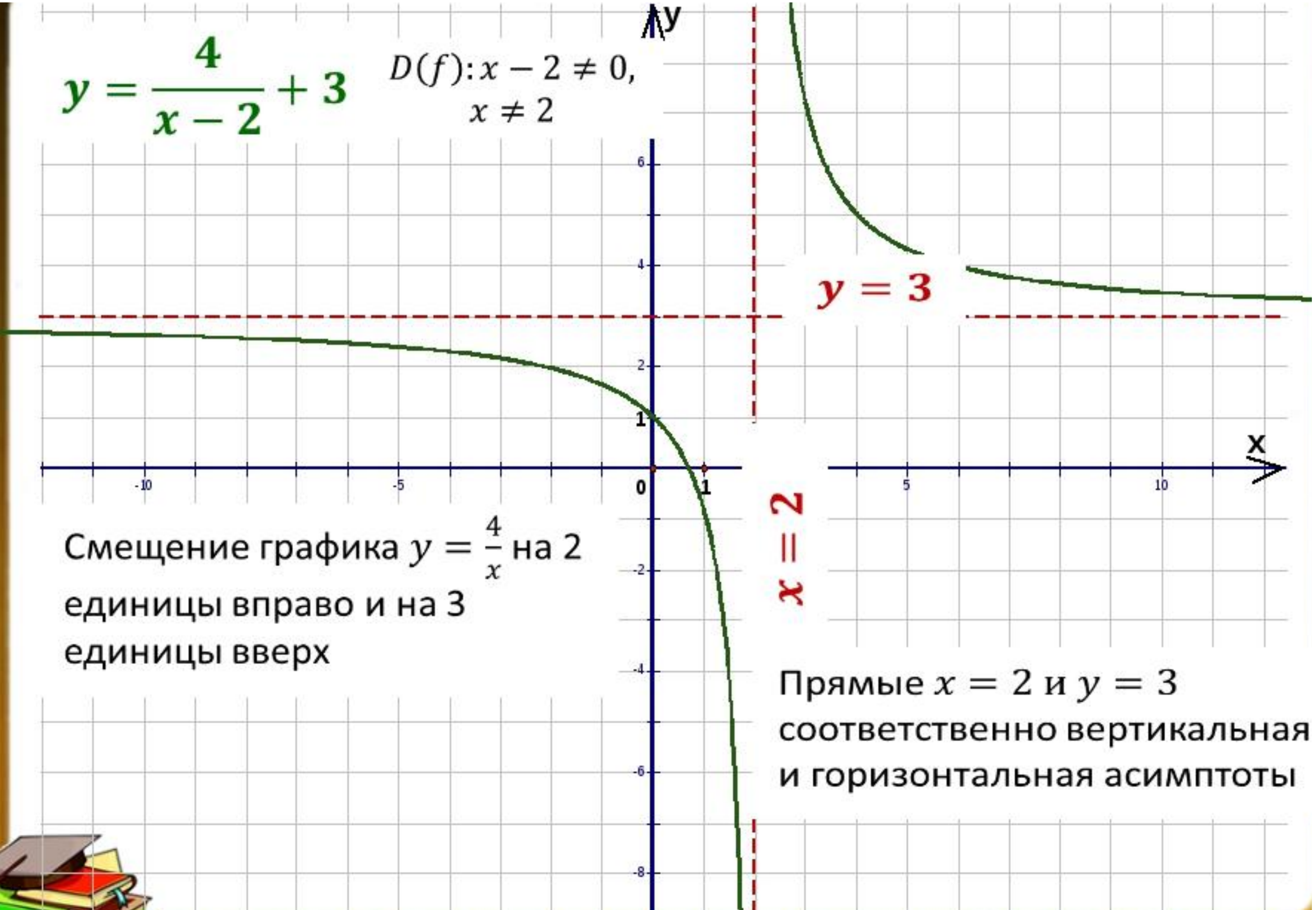
2. Привязываем к ней график функции

$$y=\sqrt{x}$$

X	0	1	4
У	0	1	2

$$y = \frac{4}{x-2} + 3$$

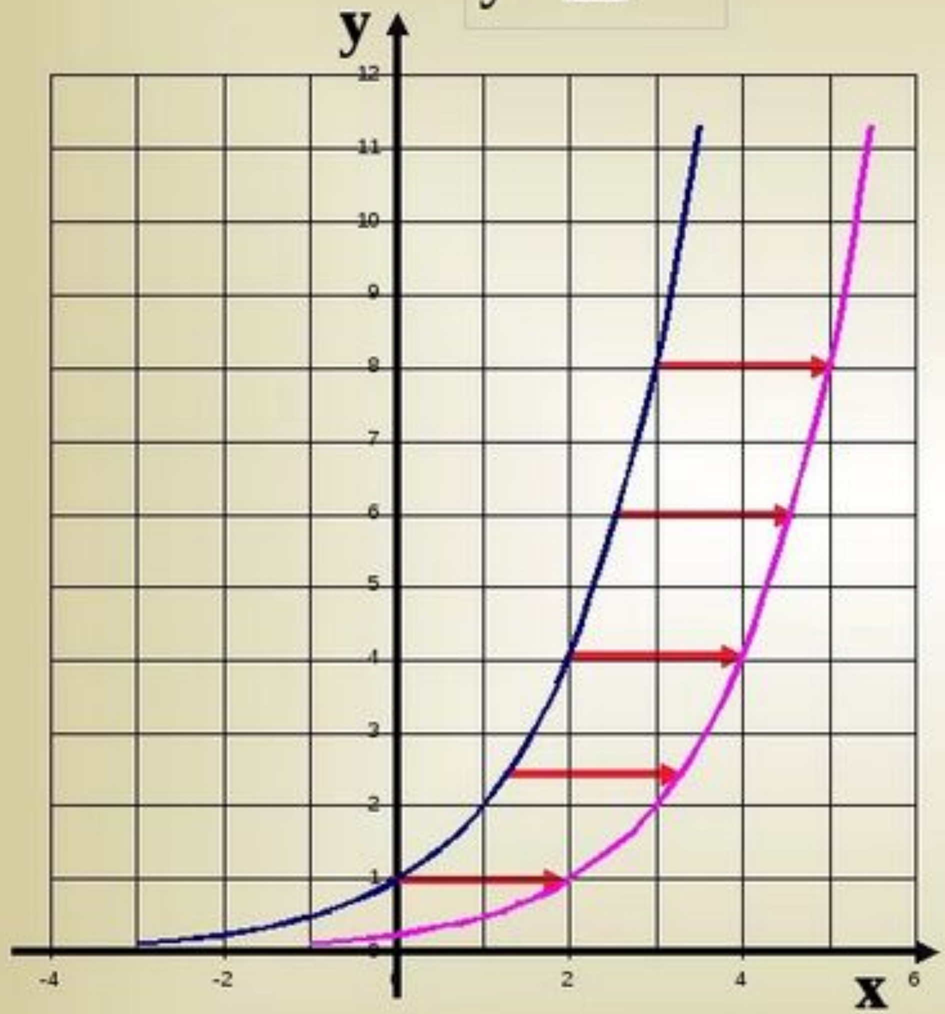
$D(f): x - 2 \neq 0,$
$x \neq 2$



Смещение графика $y = \frac{4}{x}$ на 2 единицы вправо и на 3 единицы вверх

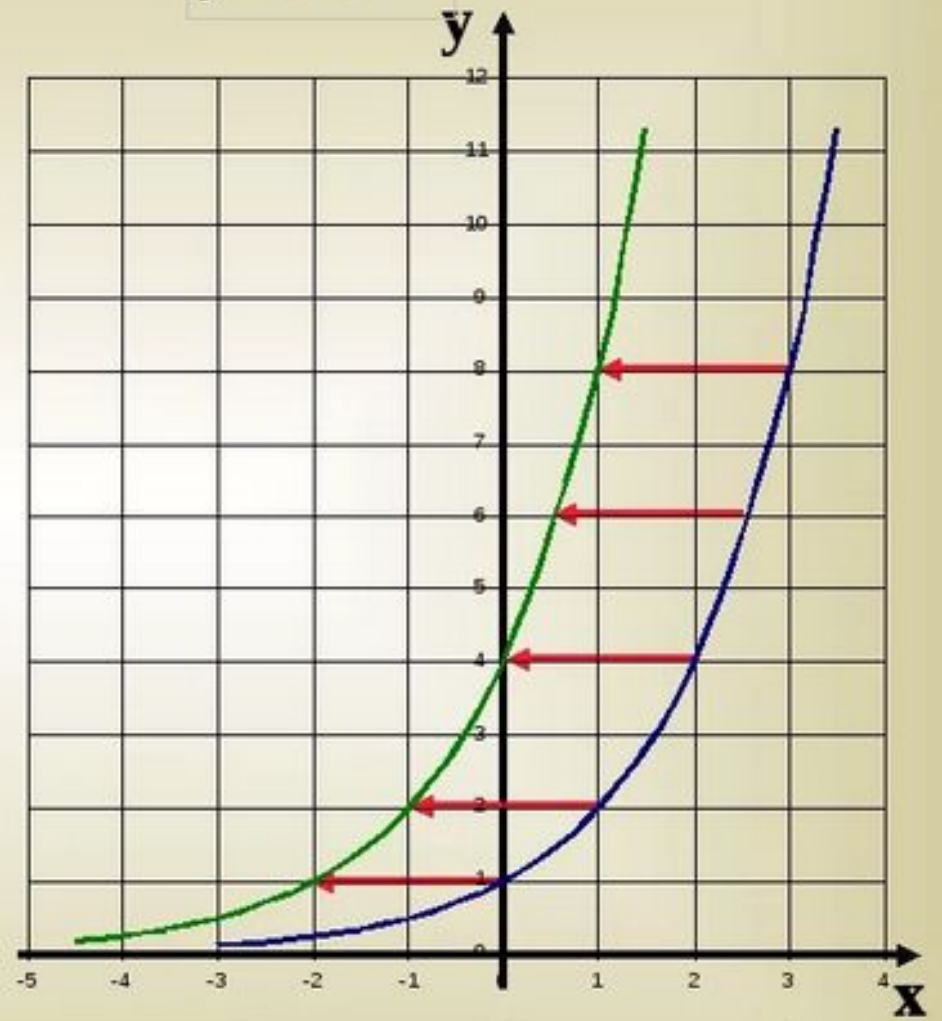
Прямые $x = 2$ и $y = 3$ соответственно вертикальная и горизонтальная асимптоты

$y = 2^{x-2}$



y
x
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-4
-2
2
4
6

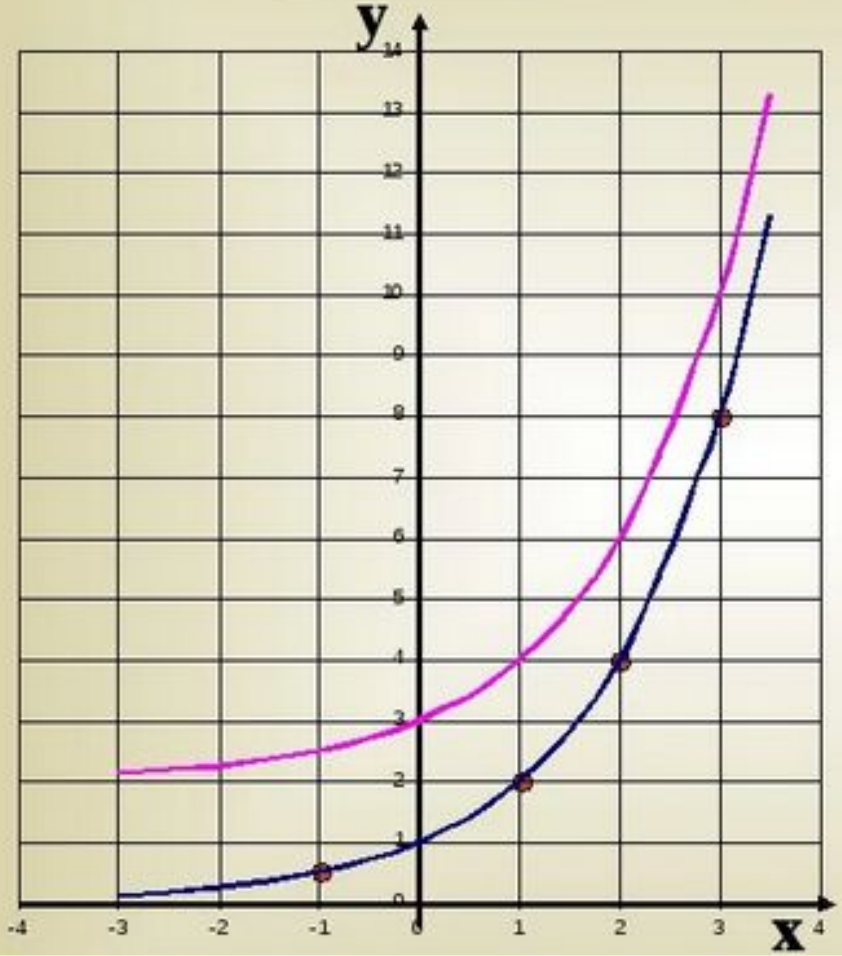
$y = 2^{x+2}$



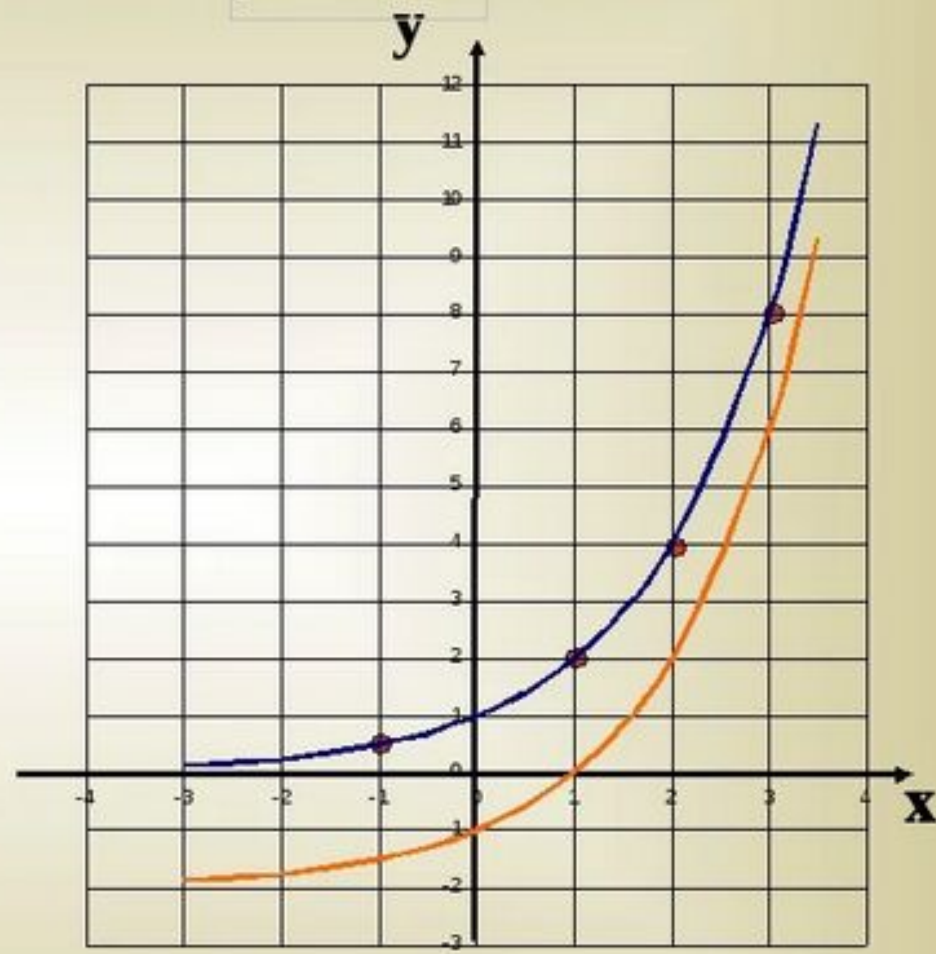
y
x
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

Сдвиг графика функции вдоль оси ОУ.

$y = 2 + 2$



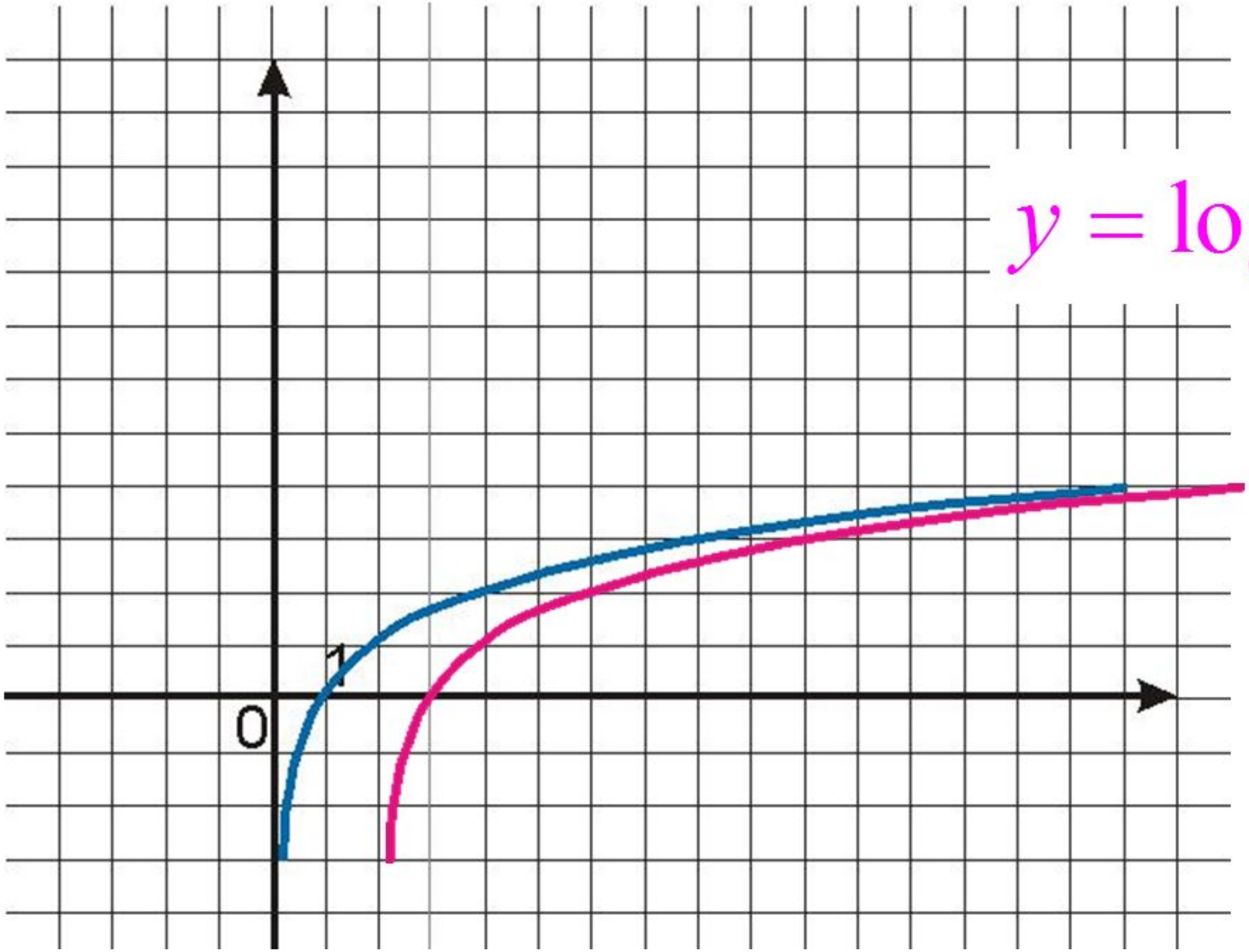
$y = 2 - 2$



Дан график функции $y = \log_2 x$

Как построить график функции

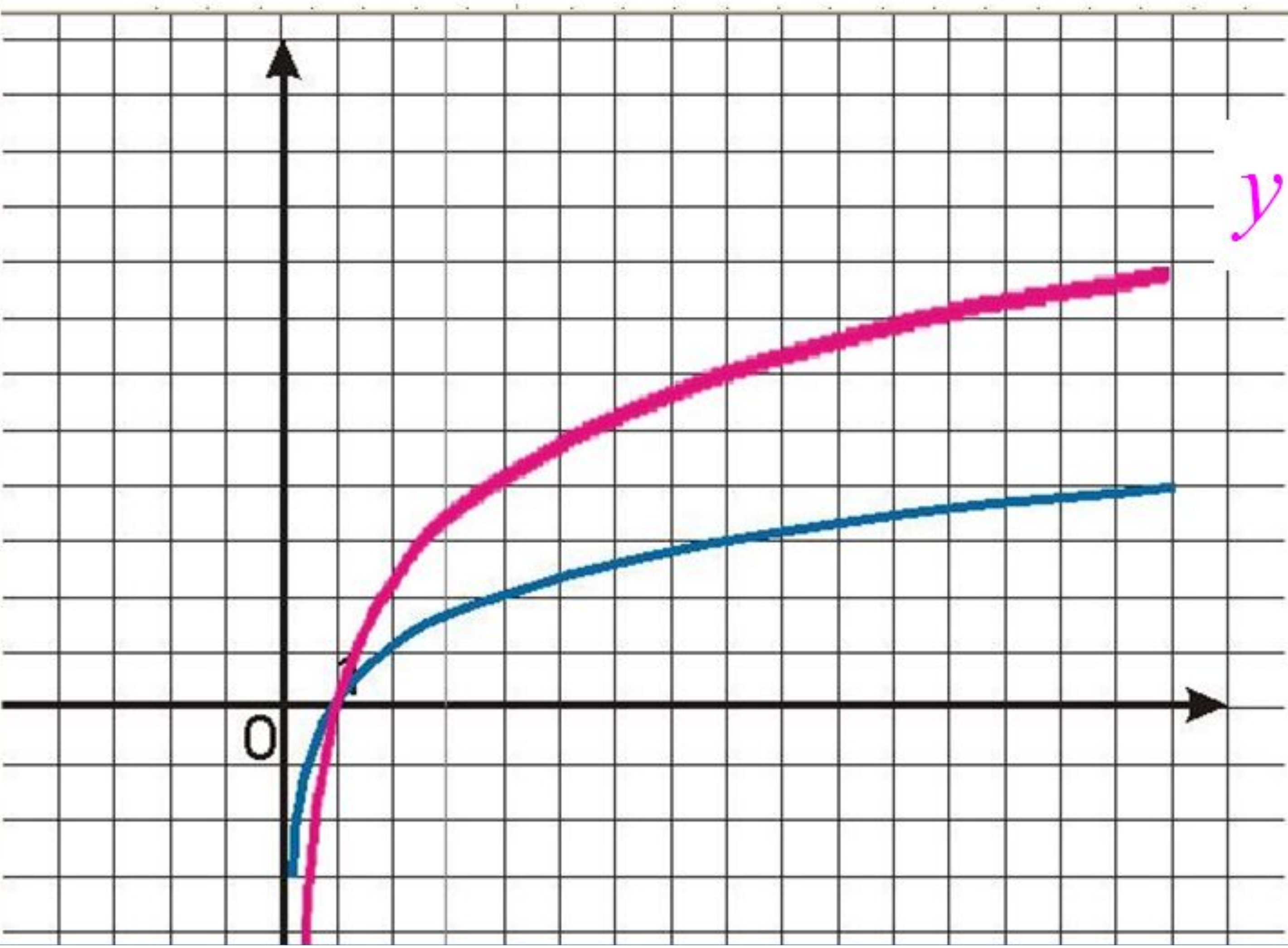
$y = \log_2(x-2)$



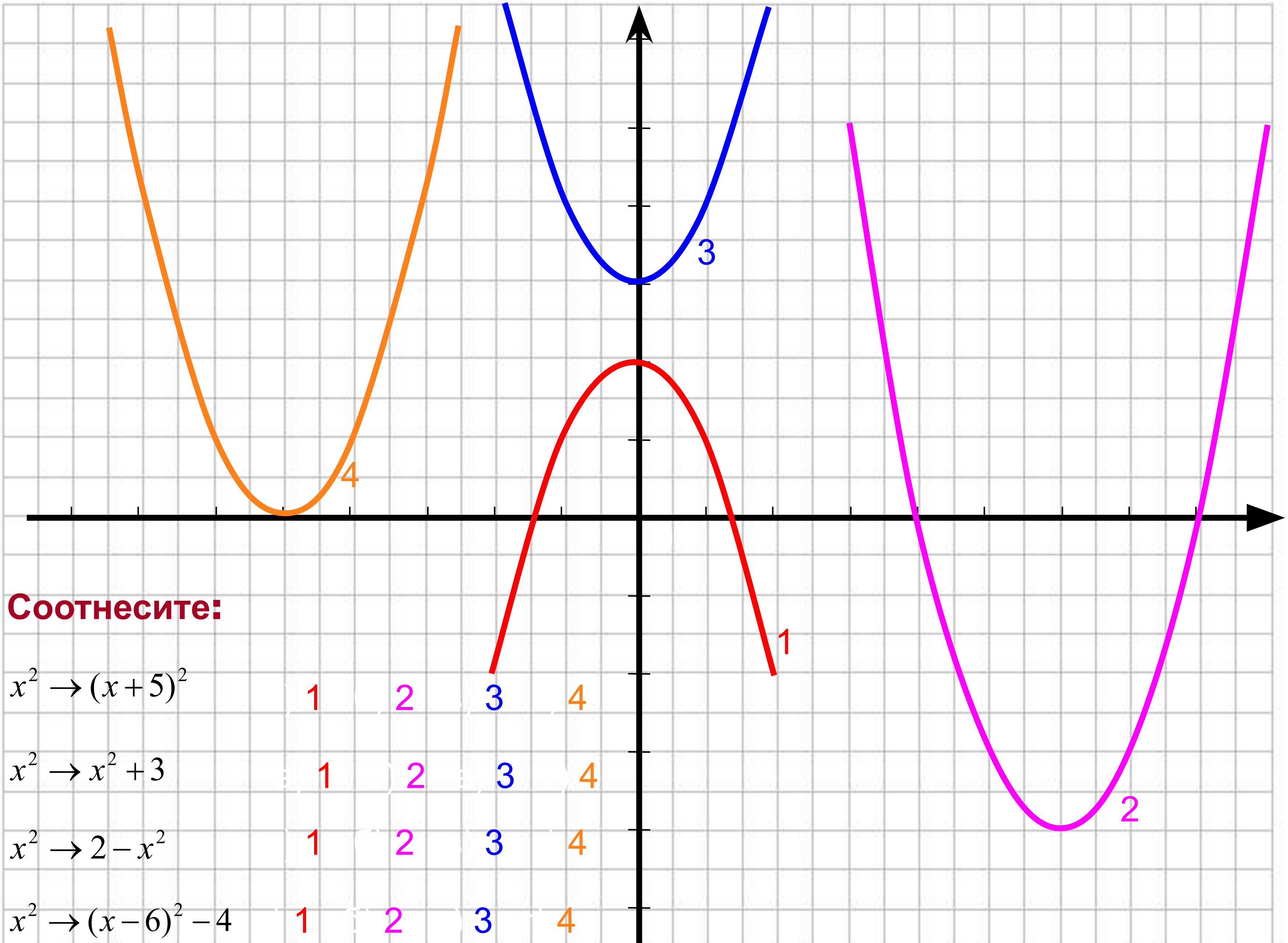
Параллельный перенос на 2 вправо

Дан график функции $y = \log_2 x$

Как построить график функции $y = 2\log_2 x$



Растяжение по оси y в 2 раза



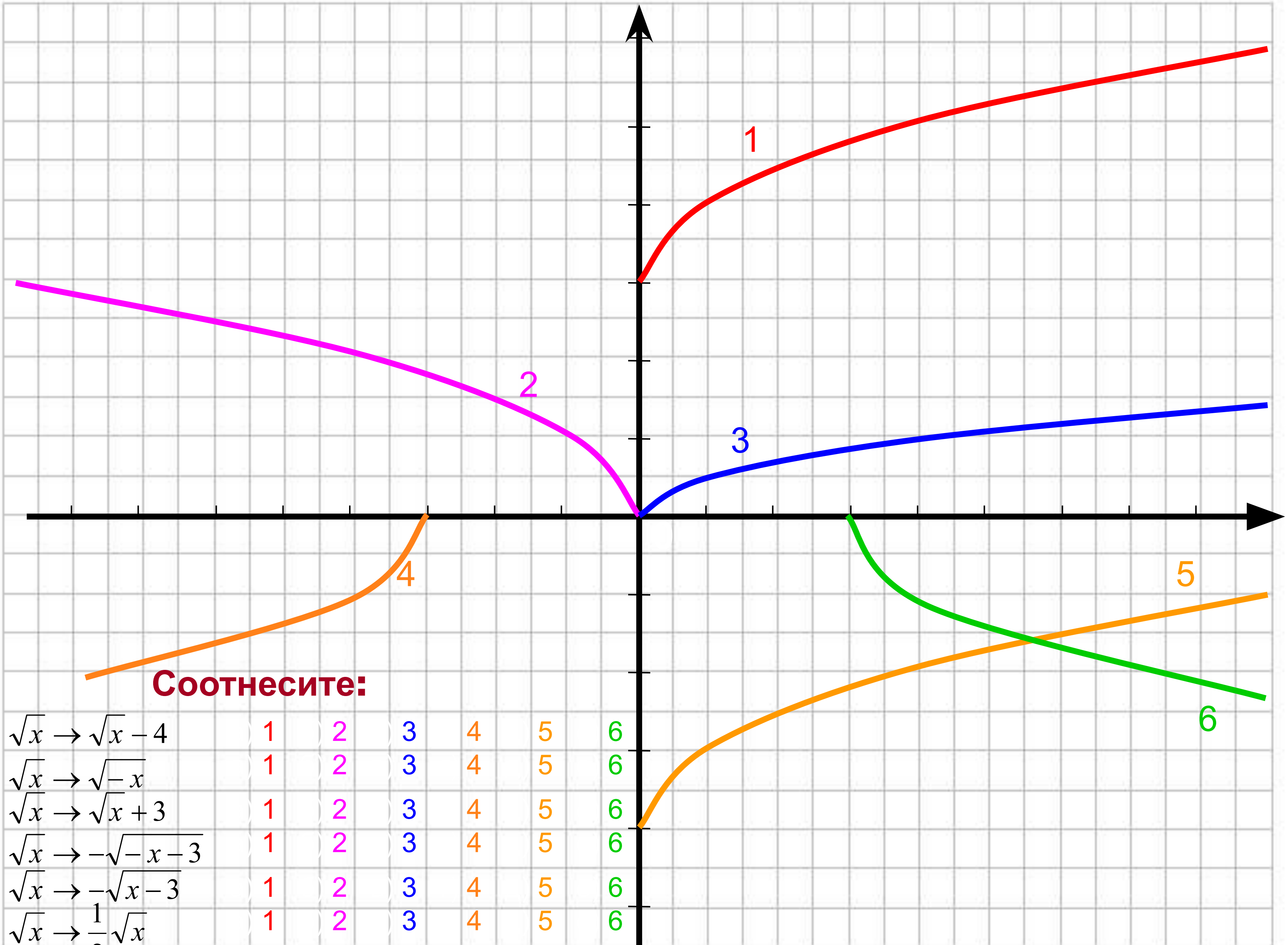
Соотнесите:

$x^2 \to (x+5)^2$ 1 2 3 4

$x^2 \to x^2 + 3$ 1 2 3 4

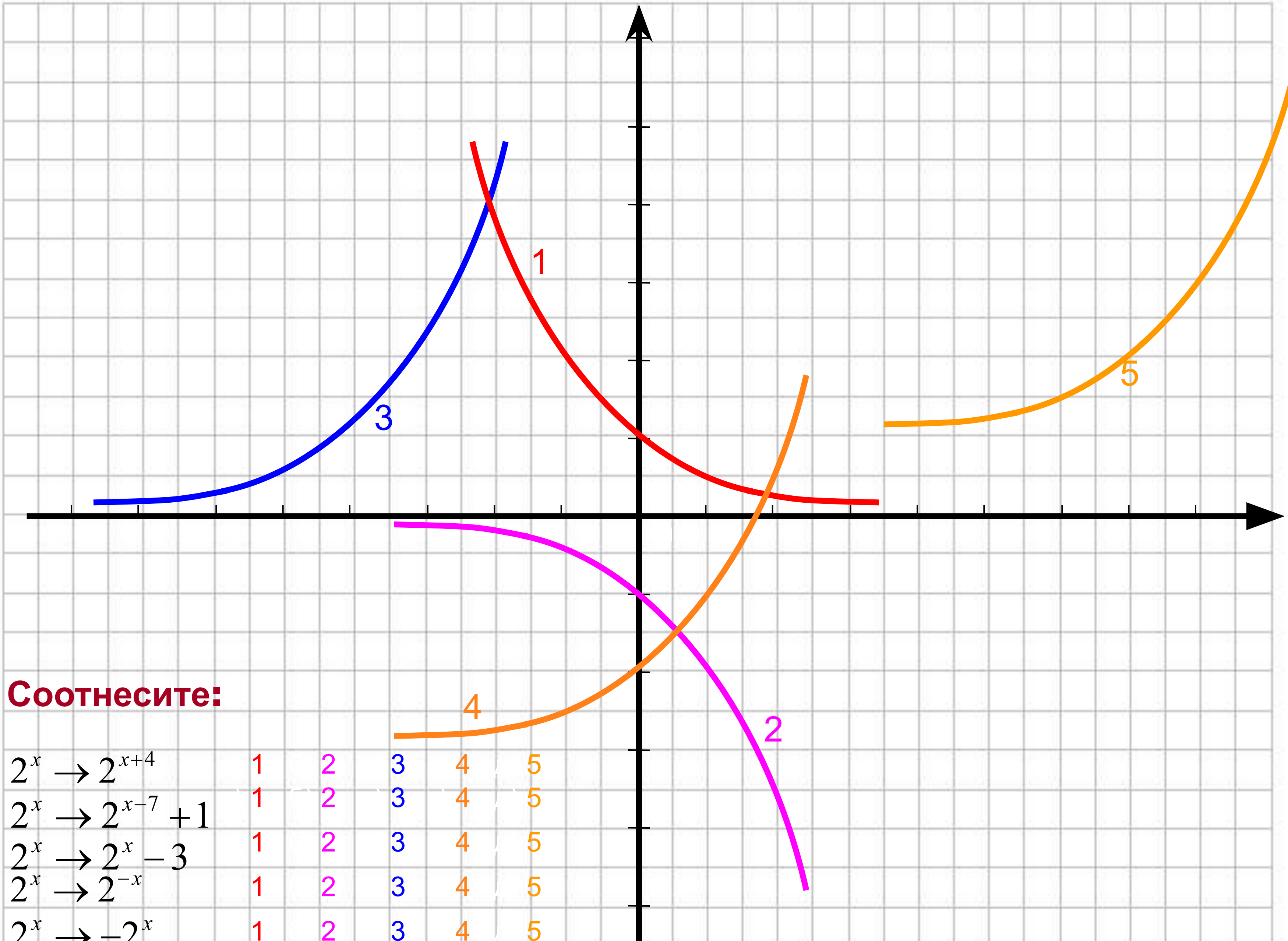
$x^2 \to 2 - x^2$ 1 2 3 4

$x^2 \to (x-6)^2 - 4$ 1 2 3 4



Соотнесите:

$\sqrt{x} \to \sqrt{x} - 4$	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{x} \to \sqrt{-x}$	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{x} \to \sqrt{x} + 3$	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{x} \to -\sqrt{-x-3}$	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{x} \to -\sqrt{x-3}$	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{x} \to \frac{1}{2}\sqrt{x}$	1	2	3	4	5	6



Соотнесите:

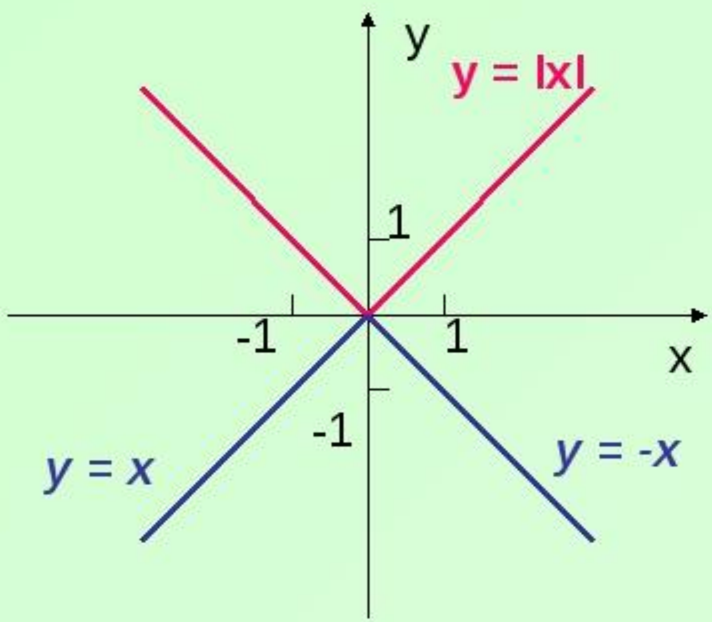
$2^x \to 2^{x+4}$	1	2	3	4	5
$2^x \to 2^{x-7}+1$	1	2	3	4	5
$2^x \to 2^x-3$	1	2	3	4	5
$2^x \to 2^{-x}$	1	2	3	4	5
$2^x \to -2^x$	1	2	3	4	5

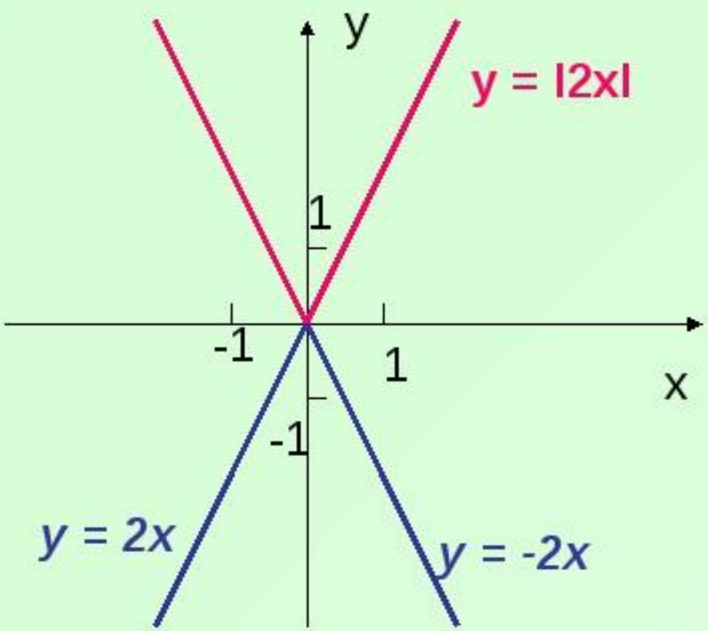
урок 6

Построение графиков с модулем

Задача Построить графики функций y = IxI и y = I2xI

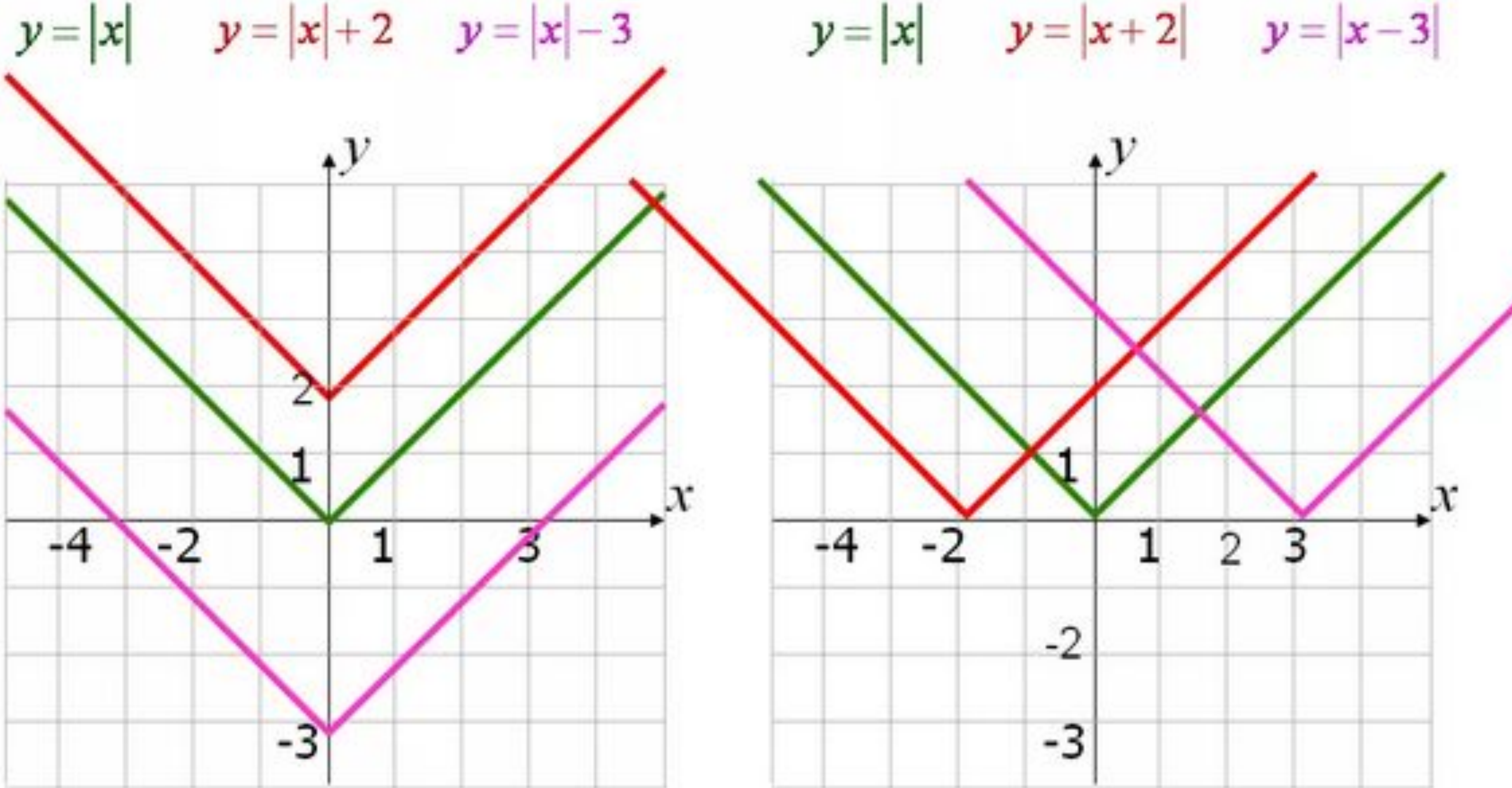
$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x \leq 0, \end{cases} \qquad y = |2x| = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \geq 0, \\ -2x, \text{ если } x \leq 0, \end{cases}$$





Построить график функций, сдвигом вдоль:

а) оси ординат; б) оси абсцисс



Вывод:

Мы видим, что правила преобразования графиков существенно упрощают построение графиков сложных функций.

Помогают найти нетрадиционное решение сложных задач.

Тема : «Преобразование графиков функции»