

Тема 2.7. Расчет бруса круглого поперечного сечения при сочетании основных деформаций

Знать формулы для эквивалентных напряжений по гипотезам наибольших касательных напряжений и энергии формоизменения.

Уметь рассчитывать брус круглого поперечного сечения на прочность при сочетании основных деформаций.

- **Формулы для расчета эквивалентных напряжений**

- Эквивалентное напряжение по гипотезе максимальных касательных напряжений $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$.

- Эквивалентное напряжение по гипотезе энергии формоизменения

- $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$,

- где $\tau = M_K / W_P$ — расчетное касательное напряжение;
 $\sigma = M_I / W_X$ — расчетное нормальное напряжение.

Условие прочности при совместном действии изгиба и кручения

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_x} \leq [\sigma] ,$$

где $M_{\text{ЭКВ}}$ — эквивалентный момент.

Эквивалентный момент по гипотезе максимальных касательных напряжений $M_{\text{ЭКВ III}} = \sqrt{Mu^2 + Mk^2}$.

Эквивалентный момент по гипотезе энергии формоизменения $M_{\text{ЭКВ v}} = \sqrt{Mu^2 + 0,75Mk^2}$.

Примеры решения задач

Пример 1. В опасном поперечном сечении круглого бруса возникают внутренние силовые факторы (рис. 35.1) M_x ; M_y ; M_z .

M_x и M_y — изгибающие моменты в плоскостях yOx и zOx соответственно; M_z — крутящий момент. Проверить прочность по гипотезе наибольших касательных напряжений,

если $[\sigma] = 120$ МПа. Исходные данные: $M_x = 0,9$ кН·м; $M_y = 0,8$ кН·м; $M_z = 2,2$ кН·м;

$d = 60$ мм.
Решение

Строим эпюры нормальных напряжений от действия изгибающих моментов относительно осей Ox и Oy и эпюру касательных напряжений от кручения (рис. 35.2).

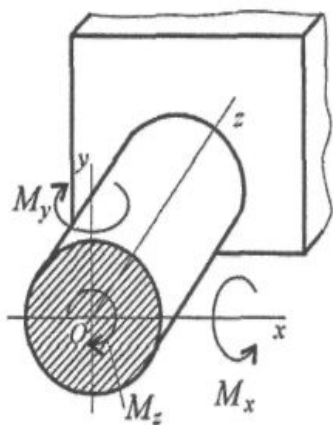


Рис. 35.1

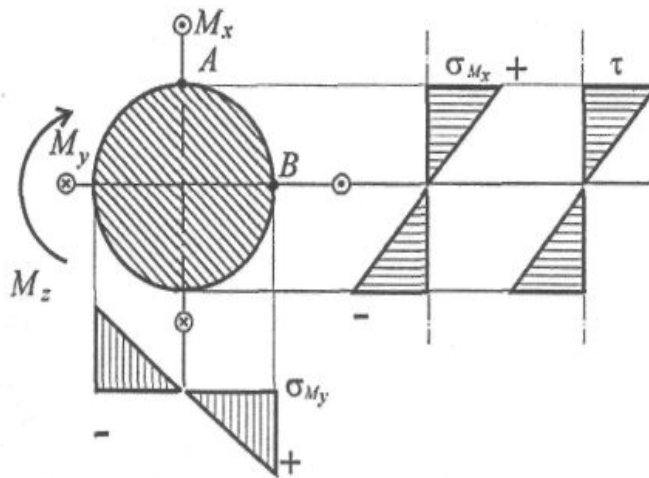


Рис. 35.2

Максимальное касательное напряжение возникает на поверхности. Максимальные нормальные напряжения от момента M_x возникают в точке A , максимальные нормальные напряжения от момента M_y в точке B . Нормальные напряжения складываются, потому что изгибающие моменты во взаимно перпендикулярных плоскостях геометрически суммируются.

Суммарный изгибающий момент: $M_{и} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$;

$$M_{и} = \sqrt{0,9^2 + 0,8^2} = 1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассчитываем эквивалентный момент по теории максимальных касательных

$$M_{\text{экв III}} = \sqrt{M_H^2 + M_K^2} = \sqrt{1,2^2 + 2,2^2} = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Условие прочности: $M_{\text{экв}}$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_{\text{осевое}}} \leq [\sigma], \quad W_{\text{осевое}} = W_x = W_y.$$

Момент сопротивления сечения: $W_{\text{осевое}} = 0,1 \cdot 60^3 = 21600 \text{ мм}^3$.

Проверяем прочность:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{21600} = 115,7 \text{ МПа} < 120 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

Пример 2. Из условия прочности рассчитать необходимый диаметр вала. На валу установлены два колеса. На колеса действуют две окружные силы $F_{t1} = 1,2$ кН; $F_{t2} = 2$ кН и две радиальные силы в вертикальной плоскости $F_{r1} = 0,43$ кН; $F_{r2} = 0,72$ кН (рис. 35.3). Диаметры колес соответственно равны $d1 = 0,1$ м; $d2 = 0,06$ м.

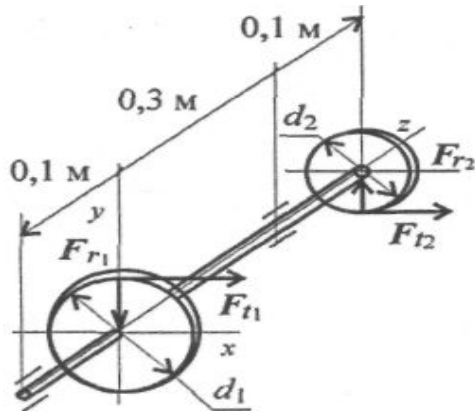


Рис. 35.3

Принять для материала вала $[\sigma] = 50$ МПа.

Рассчитать размеры вала кольцевого сечения при $c = 0,8$ ($c = d_{ВН} / d$). Расчет провести по гипотезе максимальных касательных напряжений. Весом вала и колес пренебречь.

Решение

Составим расчетную схему вала (рис. 35.4).

1. Крутящий момент на валу:

$$M_{\kappa} = M_{\text{вп}} = F_{t1} \frac{d_1}{2} = F_{t2} \frac{d_2}{2};$$

$$M_{\kappa} = 1,2 \cdot \frac{0,1}{2} = 0,06 \text{ кН} \cdot \text{м} = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

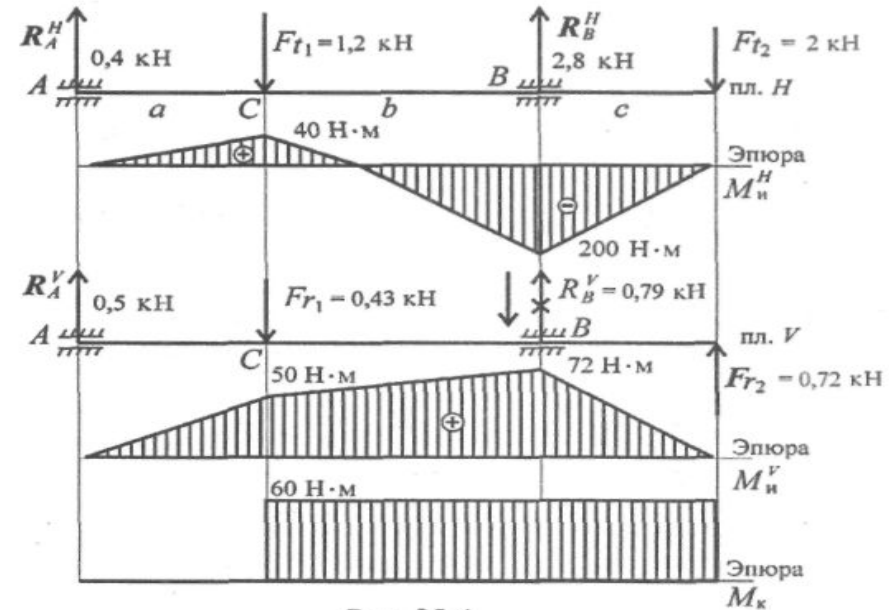


Рис. 35.4

2. Изгиб рассматриваем в двух плоскостях: горизонтальной (пл. H) и вертикальной (пл. V).

В горизонтальной плоскости определяем реакции в опоре:

$$\sum m_A^H = F_{t1}a - R_B^H(a+b) + F_{t2}(a+b+c) = 0;$$

$$1,2 \cdot 0,1 - R_B^H \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,5 = 0; \quad R_B^H = 2,8 \text{ кН}.$$

$$\sum m_B^H = R_A^H(a+b) - F_{t1}b + F_{t2}c = 0;$$

$$R_A^H \cdot 0,4 - 1,2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 = 0; \quad R_A^H = 0,4 \text{ кН}.$$

Определяем изгибающие моменты в точках C и B :

H

H

$$M_C = 400 \cdot 0,1 = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad MB = -2000 \cdot 0,1 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В вертикальной плоскости определяем реакции в опоре:

$$\sum m_A^V = F_{r_1}a - R_B^V(a+b) - F_{r_2}(a+b+c) = 0;$$
$$-R_B^V \cdot 0,4 + 0,43 \cdot 0,1 - 0,72 \cdot 0,5 = 0; \quad R_B^V = -0,79 \text{ кН}.$$

$$\sum m_B^V = R_A^V(a+b) - F_{r_1}b - F_{r_2}c = 0;$$
$$R_A^V \cdot 0,4 - 0,43 \cdot 0,3 - 0,72 \cdot 0,1 = 0; \quad R_A^V = 0,5 \text{ кН}.$$

Определяем изгибающие моменты в точках C и B :

$$M_C^V = R_A^V a; \quad M_C^V = 500 \cdot 0,1 = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$M_B^V = F_{r_2} c; \quad M_B^V = 720 \cdot 0,1 = 72 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Суммарные изгибающие моменты в точках C и B :

$$M_C = \sqrt{(M_C^H)^2 + (M_C^V)^2}; \quad M_C = \sqrt{40^2 + 50^2} = 63 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$M_B = \sqrt{(M_B^H)^2 + (M_B^V)^2}; \quad M_B = \sqrt{(200)^2 + (72)^2} = 215 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В точке B максимальный изгибающий момент, здесь же действует и крутящий момент.

Расчет диаметра вала ведем по наиболее нагруженному сечению.

3. Эквивалентный момент в точке B по третьей теории прочности

$$M_{\text{ЭКВ III}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2}; \quad M_{\text{ЭКВ III}} = \sqrt{215^2 + 60^2} \cong 223 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

4. Определяем диаметр вала круглого поперечного сечения из условия прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_x} \leq [\sigma]; \quad W_x \cong 0,1d^3; \quad \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{0,1d^3} \leq [\sigma];$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}}{0,1[\sigma]}}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{223 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 50}} = 35,5 \text{ мм}.$$

Округляем полученную величину: d — 36 мм.

Примечание. При выборе диаметров вала пользоваться стандартным рядом диаметров (Приложение 2).

Определяем необходимые размеры вала кольцевого сечения

$d_{\text{ВН}}$

при $c = 0,8$; $c = \frac{d_{\text{ВН}}}{d}$, где d — наружный диаметр вала.

d

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{0,1d^3(1-c^4)} \leq [\sigma];$$

$$W_x = 0,1d^3(1-c^4) \text{ (кольцо)}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}}{0,1(1-c^4)[\sigma]}}.$$

Диаметр вала кольцевого сечения можно определить по формуле

$$\frac{d_{\text{круг}}}{d_{\text{кольцо}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-c^4}}; \quad d_{\text{кольцо}} = d_{\text{круг}} \sqrt[3]{1-c^4};$$
$$d_{\text{кольцо}} = 36 \sqrt[3]{1-0,8^4}; \quad d \geq 42,5 \text{ мм.}$$

Примем $d = 42$ мм.

Перегрузка незначительная. $d_{BH} = 0,8d = 0,8 \cdot 42 = 33,6$ мм.

Округляем до значения $d_{BH} = 33$ мм.

6. Сравним затраты металла по площадям сечения вала в обоих случаях.

Площадь поперечного сечения сплошного вала

$$A_{\text{круга}_1} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 36^2}{4} \cong 1018 \text{ мм}^2.$$

Площадь поперечного сечения полого вала

$$A_{\text{кольца}_2} = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_{\text{внутр}}^2); \quad A_{\text{кольца}_2} = \frac{3,14(42^2 - 33^2)}{4} = 530 \text{ мм}^2.$$

Площадь поперечного сечения сплошного вала почти в два раза больше вала кольцевого сечения:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1018}{530} \approx 2.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какое напряженное состояние возникает в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения?
2. Напишите условие прочности для расчета вала.
3. Напишите формулы для расчета эквивалентного момента при расчете по гипотезе максимальных касательных напряжений и гипотезе энергии формоизменения.
4. Как выбирается опасное сечение при расчете вала?