Криволинейный интеграл по координатам (2- рода). Вычисление криволинейного интеграла при различных способах задания кривой.

Лекция №13

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАМ (II рода)

1. Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла II рода

Пусть под действием силы **F** = $\{P(x,y,z);\ Q(x,y,z);\ R(x,y,z)\}$ точка перемещается по кривой (ℓ) из точки L_1 в точку L_2 .

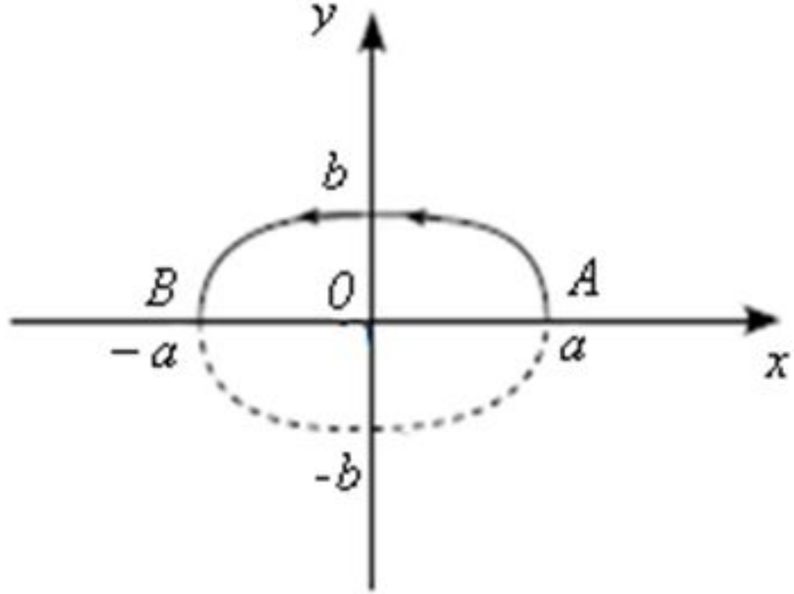
ЗАДАЧА: Найти работу, которую совершает сила **F**.

Пусть (ℓ) = (L_1L_2) – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в пространстве $Oxyz$, и на кривой (ℓ) задана функция $P(x,y,z)$.

Разобьем кривую (ℓ) произвольным образом на n частей точками $M_0=L_1$, M_1, …, $M_n=L_2$ в направлении от L_1 к L_2.

Пусть $M_i(x_i; y_i; z_i)$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (т.е. проекцию дуги $(M_{i-1}M_i)$ на ось Ox).

На каждой дуге $(M_{i-1}M_i)$ выберем произвольную точку $N_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ и вычислим произведение $P(N_i) \cdot \Delta x_i$.



Сумму

$$I_n(M_i, N_i) = \sum_{i=1}^{n} P(N_i) \cdot \Delta x_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $P(x,y,z)$ по кривой (ℓ) по переменой x (соответствующей данному разбиению кривой (ℓ) и данному выбору точек N_i).

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta M_{i-1} M_i$, где $\Delta M_{i-1} M_i$ – длина дуги $(M_{i-1} M_i)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* I *называется* ***пределом интегральных сумм*** $I_n(M_i, N_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения кривой* (ℓ) *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* N_i *выполняется неравенство*

$$\left| I_n(M_i, N_i) - I \right| < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(M_i, N_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***криволинейным интегралом от функции*** $P(x, y, z)$ ***по переменной*** x ***по кривой*** (ℓ).

Обозначают: $\int\limits_{(\ell)} P(x, y, z) dx$ или $\int\limits_{(L_1)}^{(L_2)} P(x, y, z) dx$

Аналогично определяются интегралы

$$\int\limits_{(\boxtimes)} Q(x,y,z)dy \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{(\boxtimes)} R(x,y,z)dz$$

Сумму $\displaystyle\int\limits_{(\boxtimes)} P(x,y,z)dx + \int\limits_{(\boxtimes)} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{(\boxtimes)} R(x,y,z)dz$

записывают в виде

$$\int\limits_{(\boxtimes)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

и ***называют криволинейным интегралом*** **II** ***рода*** (***по координатам***).

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА II РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

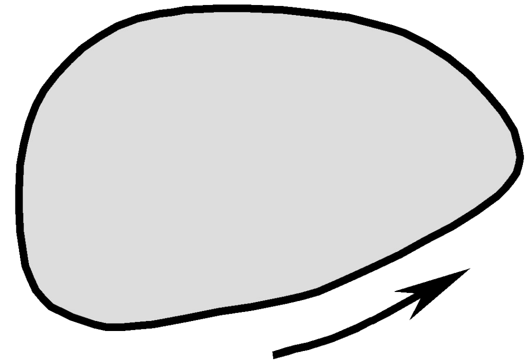
1. Криволинейный интеграл II рода зависит от направления движения по кривой. При изменении направления обхода кривой (L_1L_2) криволинейный интеграл II рода меняет знак, т.е.

$$\int\limits_{(L_1L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{(L_2L_1)} Pdx + Qdy + Rdz$$

2. Если кривая (ℓ) замкнута, то криволинейный интеграл II рода не зависит выбора начальной точки L_1, а зависит от направления обхода кривой.

Направление обхода замкнутой кривой, при котором область, лежащая «внутри» контура, остается слева по отношению к движущейся точке, называют ***положительным***. Противоположное ему направление называют ***отрицательным***.

На плоскости положительным направлением обхода является направление против хода часовой стрелки.



Криволинейный интеграл II рода по замкнутому контуру в положительном направлении обозначают:

$$\oint\limits_{(\square)} Pdx + Qdy + Rdz$$

В отрицательном направлении:

$$\oint\limits_{-(\square)} Pdx + Qdy + Rdz$$

3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ криволинейного интеграла II рода.

Пусть $\overline{\mathbf{F}} = \{P(x,y,z);\ Q(x,y,z);\ R(x,y,z)\}$ – сила, под действием которой точка перемещается по кривой (ℓ) из L_1 в L_2. Работа, которую при этом совершает сила $\overline{\mathbf{F}}$, будет равна

$$A = \int\limits_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак криволиней-
ного интеграла II рода, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot Pdx = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Pdx, \qquad \int\limits_{(\ell)} c \cdot Qdy = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Qdy,$$

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot Rdz = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Rdz.$$

5. Криволинейный интеграл II рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов II рода от этих функций, т.е.

$$\int\limits_{(\square)}\left[P_1+P_2\right]dx=\int\limits_{(\square)}P_1dx+\int\limits_{(\square)}P_2dx$$

$$\int\limits_{(\square)}\left[Q_1+Q_2\right]dy=\int\limits_{(\square)}Q_1dy+\int\limits_{(\square)}Q_2dy$$

$$\int\limits_{(\square)}\left[R_1+R_2\right]dz=\int\limits_{(\square)}R_1dz+\int\limits_{(\square)}R_2dz$$

6. Если кривая (L_1L_2) разбита точкой K на две части (L_1K) и (KL_2), то

$$\int\limits_{(L_1L_2)}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{(L_1K)}Pdx+Qdy+Rdz+\int\limits_{(KL_2)}Pdx+Qdy+Rdz$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла II рода).

3. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая (ℓ)=(L_1L_2) задана параметрическими уравнениями:

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$ ($L_1 \leftrightarrow \alpha$, $L_2 \leftrightarrow \beta$) . (2)

ТЕОРЕМА 1. *Если* (ℓ) *– гладкая кривая, заданная уравнениями* (2) *и функция* $P(x,y,z)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $P(x,y,z)$ *интегрируема по переменной x по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Аналогичным образом вычисляются интегралы

$$\int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* (ℓ) = (L_1L_2) *– гладкая кривая в плоскости xOy , заданная уравнением* $y = \varphi(x)$ *(где* $x \in [a;b]$, $L_1(a;\ \varphi(a))$, $L_2(b;\ \varphi(b))$ *и функции* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *непрерывны на* (ℓ), *то существует криволинейный интеграл* II *рода и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P\left(x,\varphi(x)\right) + Q\left(x,\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)\right]dx$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия существования криволинейного интеграла II рода).

Если (ℓ) *– кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *кусочно-непрерывны на* (ℓ) , *то существует интеграл*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

криволинейный интеграл 2-го рода <u>зависит</u> от направления интегрирования, причём:

Пример

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(1;\ 1)$ до точки $B(3;\ 2)$. Выполнить чертёж.

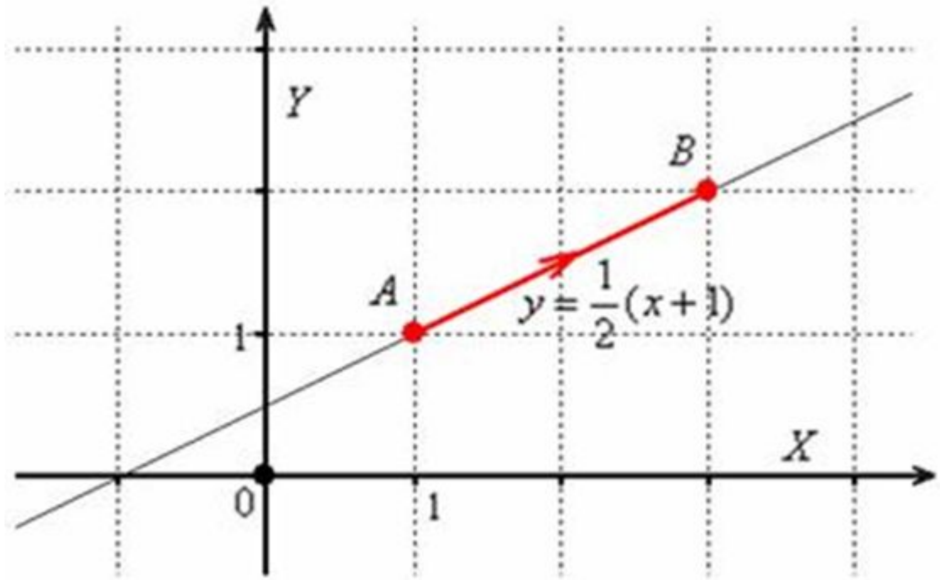
Решение: на первом шаге нам нужно найти **уравнение прямой**, которая содержит отрезок AB. Составим его **по двум точкам**:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1}$$

$$x-1 = 2y-2$$

$$2y = x+1$$

$$y = \frac{1}{2}(x+1)$$



область определения *подынтегральных функций* – в данном примере $x \neq 0, y \neq 0$, и поэтому линия интегрирования не должна пересекать координатные оси

Криволинейный интеграл 2-го рода тоже сводится к определённому интегралу с «избавлением» либо от всех «игреков», либо от всех «иксов».

Подставим

$$y = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$dy = d\left[\frac{1}{2}(x+1)\right] = \left(\frac{1}{2}(x+1)\right)' dx = \frac{dx}{2} \qquad dy = \frac{dx}{2}$$

в подынтегральное выражение

$$\int\limits_{AB} \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy = \int\limits_1^3 \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-1}{x}dx + \frac{x+1}{\frac{1}{2}(x+1)} \cdot \frac{dx}{2} \right) = \int\limits_1^3 \left(\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{x}dx + dx \right) = \int\limits_1^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + 1 \right) dx =$$

$$= \int\limits_1^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 \left(3 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2}(3x - \ln|x|)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(9 - \ln 3 - (3 - \ln 1)) = \frac{6-\ln 3}{2}$$

Ответ: $\int\limits_{AB} \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy = \frac{6-\ln 3}{2}$

Способ второй состоит в переходе к интегрированию по переменной y. Для этого из уравнения $y = \frac{1}{2}(x+1)$ выразим обратную функцию:

$$2y = x + 1$$

$$x = 2y - 1$$

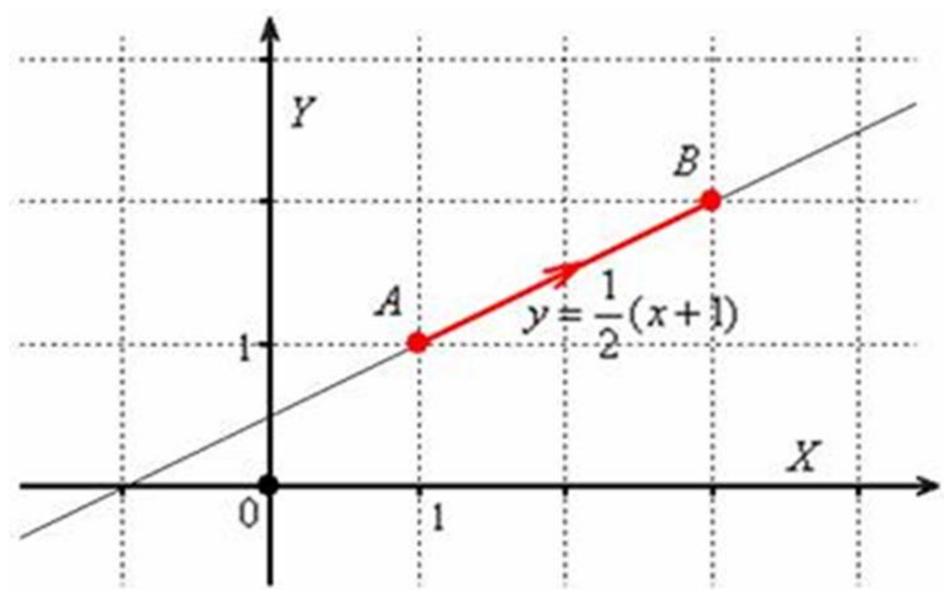
и найдём дифференциал $dx = d(2y-1) = (2y-1)'dy = 2dy$.

Перейдём к определённому интегралу от 1 до 2

где выражение

$x = 2y - 1$

$dx = 2dy$.



$$\int\limits_{AB} \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy = \int\limits_1^2 \left(\frac{y-1}{2y-1} \cdot 2dy + \frac{2y-1+1}{y}dy \right) = \int\limits_1^2 \left(\frac{2y-2}{2y-1}dy + 2dy \right) =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\frac{2y-1-1}{2y-1} + 2 \right) dy = \int\limits_1^2 \left(1 - \frac{1}{2y-1} + 2 \right) dy = \int\limits_1^2 \left(3 - \frac{1}{2y-1} \right) dy = 3\int\limits_1^2 dy - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{d(2y-1)}{2y-1} =$$

$$= 3(y)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\left(\ln|2y-1|\right)\Big|_1^2 = 3(2-1) - \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = 3 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{6-\ln 3}{2}$$

Ответ: $\displaystyle \int\limits_{AB} \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy = \frac{6-\ln 3}{2}$

Пример

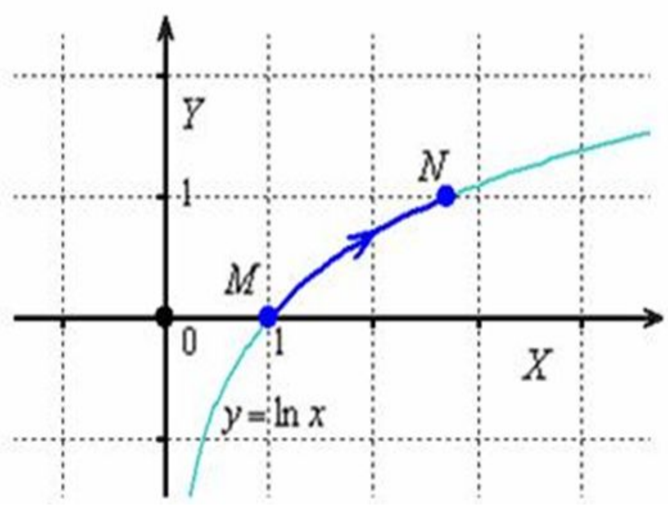
Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy$$,

где L – дуга кривой $y = \ln x$ от точки $M(1;0)$ до точки $N(e;1)$.

Решение:
По причине *аддитивности*, интеграл можно разделить на две части:

$$\int_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy = \int_L \frac{y^2}{x}dx + \int_L x^2dy$$



1) Вычислим

$$\int_L \frac{y^2}{x}dx$$.

$$y = \ln x$$,

$$dy = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$$

x изменяется от 1 до e:

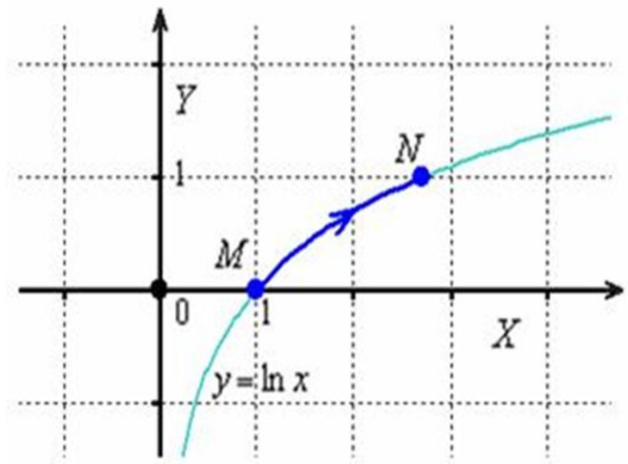
$$\int_L \frac{y^2}{x}dx = \int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{x} = \int_1^e \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3}(\ln^3 x)\Big|_1^e = \frac{1}{3}(\ln^3 e - \ln^3 1) = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$$

Или

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = e^y$$

$$dx = d(e^y) = (e^y)'_y dy = e^y dy,$$

y изменяется от 0 до 1



$$\int_L \frac{y^2}{x} dx = \int_0^1 \frac{y^2}{e^y} \cdot e^y dy = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}(y^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

Со второй частью всё проще:

2) $$\int_L x^2 dy = \int_1^e x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \int_1^e x dx = \frac{1}{2}(x^2)\Big|_1^e = \frac{e^2-1}{2}$$

Или : $$\int_L x^2 dy = \int_0^1 (e^y)^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2y} d(2y) = \frac{1}{2}(e^{2y})\Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$$

Осталось просуммировать полученные значения:

$$\int_L \frac{y^2}{x} dx + x^2 dy = \frac{1}{3} + \frac{e^2-1}{2} = \frac{2+3e^2-3}{6} = \frac{3e^2-1}{6}$$

Ответ: $$\int_L \frac{y^2}{x} dx + x^2 dy = \frac{3e^2-1}{6}$$

Пример

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L x^2 y dy - y^2 x dx$$

по кривой

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Решение:

в подынтегральном выражении нужно всё выразить через параметр.

$$x = \sqrt{\cos t}\,,\ y = \sqrt{\sin t}$$

$$dx = d(\sqrt{\cos t}) = (\sqrt{\cos t})' dt = \frac{1}{2\sqrt{\cos t}} \cdot (\cos t)' dt = -\frac{\sin t dt}{2\sqrt{\cos t}}$$

$$dy = d(\sqrt{\sin t}) = (\sqrt{\sin t})' dt = \frac{1}{2\sqrt{\sin t}} \cdot (\sin t)' dt = \frac{\cos t dt}{2\sqrt{\sin t}}$$

подставляем их в подынтегральное выражение,

$$x^2ydy - y^2xdx = \left(\sqrt{\cos t}\right)^2 \cdot \sqrt{\sin t} \cdot \frac{\cos t dt}{2\sqrt{\sin t}} - \left(\sqrt{\sin t}\right)^2 \cdot \sqrt{\cos t} \cdot \left(-\frac{\sin t dt}{2\sqrt{\cos t}}\right) =$$

$$= \cos t \cdot \frac{\cos t dt}{2} + \sin t \cdot \frac{\sin t dt}{2} = \frac{1}{2}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{1}{2}dt$$

$$\int\limits_L x^2ydy - y^2xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{2}(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\int\limits_L x^2ydy - y^2xdx = \frac{\pi}{4}$

Пример. Вычислить:

$$\int\limits_{AB}(x+y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\left[AB:\begin{cases}x=\cos t;\ y=\sin t;\\ z=a\cdot t;0\le t\le 2\pi\end{cases}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\big((\cos t+\sin t)\cdot(-\sin t)+(\cos t-a\cdot t)\cos t+\sin t\cdot a\big)\mathrm{d}t=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\big(-\cos t\cdot\sin t-\sin^2 t+\cos^2 t-a\cdot t\cdot\cos t+a\cdot\sin t\big)\mathrm{d}t=$$

$$=\left.\frac{\cos^2 t}{2}\right|_0^{2\pi}+\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t\mathrm{d}t-a\int\limits_0^{2\pi}t\cdot\cos t\cdot\mathrm{d}t+a\int\limits_0^{2\pi}\sin t\cdot\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{\cos^2 2\pi}{2}-\frac{\cos^2 0}{2}+\left.\frac{1}{2}\sin 2t\right|_0^{2\pi}-a(t\cdot\sin t+\cos t)\Big|_0^{2\pi}-a\cos t\Big|_0^{2\pi}=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 4\pi-\frac{1}{2}\sin 0-a(2\pi\cdot\sin 2\pi-0+\cos 2\pi-\cos 0)-a(\cos 2\pi-\cos 0)=0.$$

Ответ: 0.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ