20.04.20.

Тема:
Понятие объема.
Объем прямоугольного параллелепипеда

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1469
https://infourok.ru/videouroki/1470

Теоретическая часть:

Прочитать.

Теоремы и определения

(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

74 Понятие объема

Понятие объема тела вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры. Из курса планиметрии известно, что каждый многоугольник имеет площадь, которая измеряется с помощью выбранной единицы измерения площадей. В качестве единицы измерения площадей обычно берут квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Аналогично будем считать, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов. За единицу измерения объемов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см называют **кубическим сантиметром** и обозначают см^3. Аналогично определяются **кубический метр** (м^3), **кубический миллиметр** (мм^3) и т. д.

Процедура измерения объемов аналогична процедуре измерения площадей. При выбранной единице измерения объем каждого тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объемов и частей единицы содержится в данном теле. Ясно, что число, выражающее объем тела, зависит от выбора единицы измерения объемов, и поэтому единица измерения объемов указывается после этого числа. Например, если в качестве единицы измерения объемов взят 1 см^3 и при этом объем V некоторого тела оказался равным 2, то пишут $V = 2$ см^3.

Если два тела равны, то каждое из них содержит столько же единиц измерения объемов и ее частей, сколько и другое тело, т. е. имеет место следующее свойство объемов:

1^0. Равные тела имеют равные объемы.

Замечание

Равенство двух фигур, в частности двух тел, в стереометрии определяется так же, как и в планиметрии: два тела называются равными, если их можно совместить наложением. Примерами равных тел являются два прямоугольных параллелепипеда с соответственно равными измерениями (рис. 174, *а*), две прямые призмы с равными основаниями и равными высотами, две правильные пирамиды, у которых соответственно равны стороны оснований и высоты (рис. 174, *б*). В каждом из указанных случаев равенство двух тел можно доказать на основе аксиом наложения и равенства фигур (см. приложение 2).

Рассмотрим еще одно свойство объемов. Пусть тело составлено из нескольких тел. При этом мы предполагаем, что любые два из этих тел не имеют общих внутренних точек, но могут иметь общие граничные точки (см. рисунок 175, на котором цилиндр Q и конус F имеют общие граничные точки — точки их общего основания). Ясно, что объем всего тела складывается из объемов составляющих его тел. Итак,

2^0. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Свойства 1^0 и 2^0 называют **основными свойствами объемов.** Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков и площади многоугольников. В дальнейшем на основе этих свойств мы выведем формулы для вычисления объемов параллелепипеда, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара.

Предварительно отметим одно следствие из свойств 1^0 и 2^0. Рассмотрим куб, принятый за единицу измерения объемов. Его ребро равно единице измерения отрезков. Разобьем каждое ребро этого куба на n равных частей (n — произвольное целое число) и проведем через точки разбиения плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Куб разобьется на n^3 равных маленьких кубов с ребром $\frac{1}{n}$. Так как сумма объемов всех маленьких кубов равна объему всего куба (свойство 2^0), т. е. равна 1, то объем каждого из маленьких кубов равен $\frac{1}{n^3}$ (объемы маленьких кубов равны друг другу по свойству 1^0). Итак, **объем куба с ребром $\frac{1}{n}$ равен $\frac{1}{n^3}$.**

Этот факт нам понадобится в следующем пункте при выводе формулы объема прямоугольного параллелепипеда.

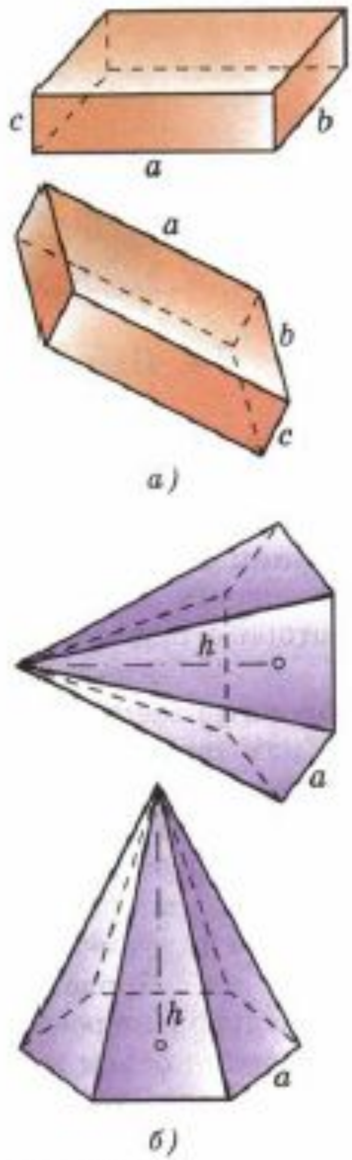


Рис. 174

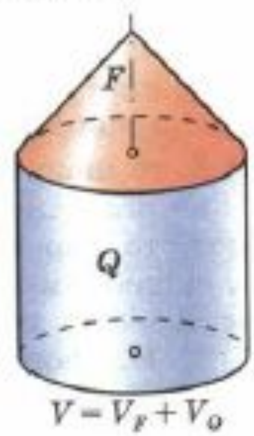


Рис. 175

Теорема

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Следствие 1

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

В самом деле, примем грань с ребрами a и b за основание. Тогда площадь S основания равна ab, а высота h параллелепипеда равна c. Следовательно,

$$V = abc = Sh.$$

Следствие 2

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

Для доказательства этого утверждения дополним прямую треугольную призму с основанием ABC ($\angle A$ прямой) до прямоугольного параллелепипеда так, как показано на рисунке 177. В силу следствия 1 объем этого параллелепипеда равен $2S_{ABC} \cdot h$, где S_{ABC} — площадь треугольника ABC, h — высота призмы. Плоскость B_1BC разбивает параллелепипед на две равные прямые призмы, одна из которых — данная. (Эти призмы равны, так как имеют равные основания и равные высоты.) Следовательно, объем V данной призмы равен половине объема параллелепипеда, т. е. $V = S_{ABC} \cdot h$, что и требовалось доказать.

Практическая часть.

Вопросы:

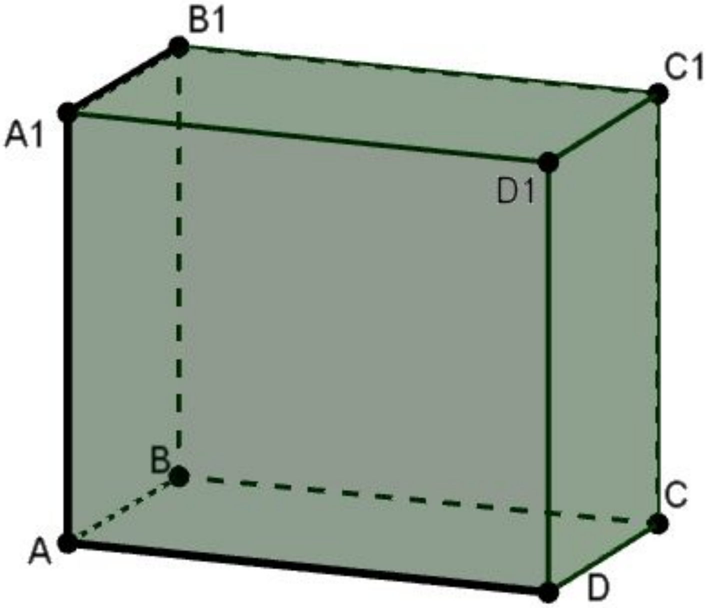
1 Каким соотношением связаны объемы V_1 и V_2 тел P_1 и P_2, если:
а) тело P_1 содержится в теле P_2;
б) каждое из тел P_1 и P_2 составлено из n кубов с ребром 1 см?

2 Какую часть объема данной прямой треугольной призмы составляет объем треугольной призмы, отсеченной от данной плоскостью, проходящей через средние линии оснований?

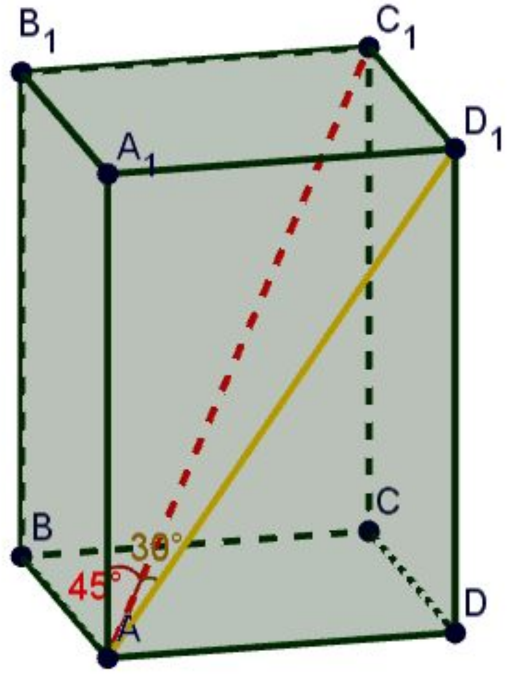
Задачи:

648 Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота равна h, если:
а) $a = 11$, $b = 12$, $h = 15$; б) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 10\sqrt{10}$;
в) $a = 18$, $b = 5\sqrt{3}$, $h = 13$; г) $a = 3\frac{1}{3}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 0{,}96$.

649 Найдите объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если: а) $AC = 12$ см; б) $AC_1 = 3\sqrt{2}$ м; в) $DE = 1$ см, где E — середина ребра AB.



653 Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 18 см и составляет угол в $30°$ с плоскостью боковой грани и угол в $45°$ с боковым ребром. Найдите объем параллелепипеда.



658 Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle BAC = 90°$, $BC = 37$ см, $AB = 35$ см, $AA_1 = 1{,}1$ дм.