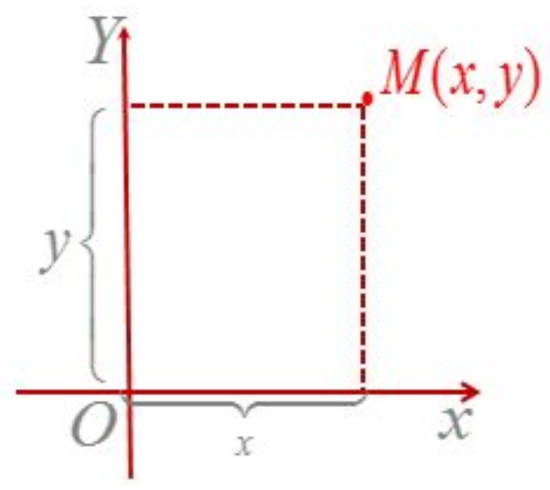
РГСУ

Математика
Лекция
Тема 2
Элементы аналитической геометрии

Понятие об аналитической геометрии

Аналитическая геометрия — это ветвь математики, изучающая геометрические образы средствами алгебры на основе метода координат.

Прямоугольная (декартова) система координат на плоскости:

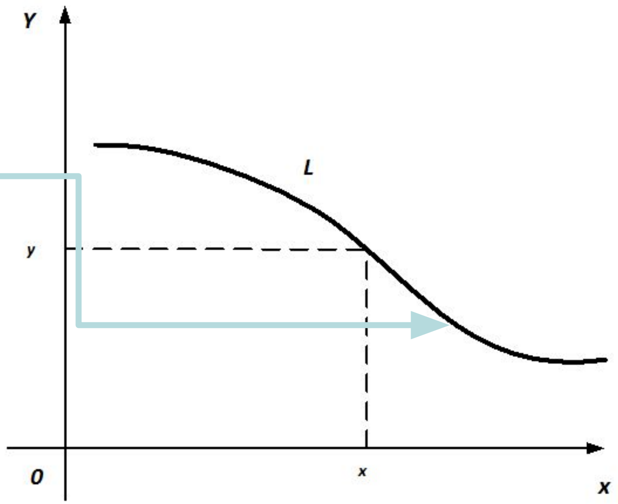


Понятие об аналитической геометрии

Уравнение

$$F(x,y)=0$$

Определяет на плоскости линию *L* как совокупность всех точек, удовлетворяющих данному уравнению, называемому уравнением линии *L*.

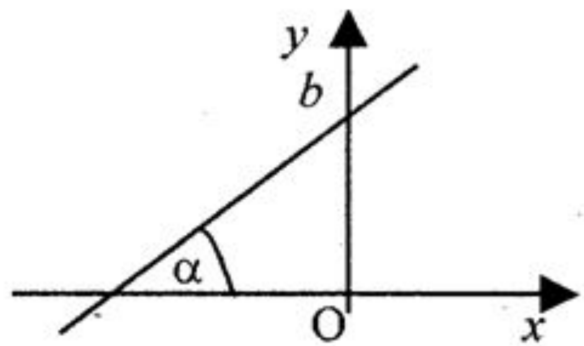


Каждая точка линии *L* удовлетворяет уравнению.

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Уравнения прямой на плоскости

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом:



$$y = kx + b,$$

где k -угловой коэффициент прямой: $k = tg\alpha$,

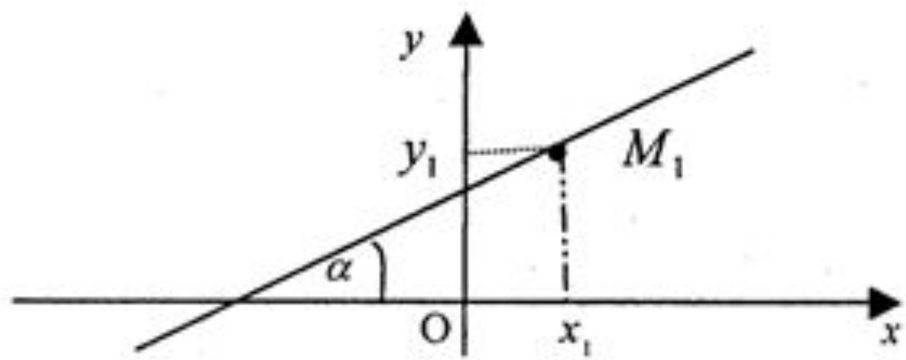
α – угол наклона прямой к оси Ox, где $0 \le \alpha < \pi$ и $\alpha \ne \frac{\pi}{2}$,

b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Замечание. Прямая не может быть вертикальной

Уравнения прямой на плоскости

2) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_1;y_1)$ с заданным угловым коэффициентом** k**:



$$y_1 = kx_1 + b \quad \Rightarrow \quad y - y_1 = k(x - x_1)$$

Пример. Пусть $M(-2;3)$ и $k=2$. Построить уравнение прямой.

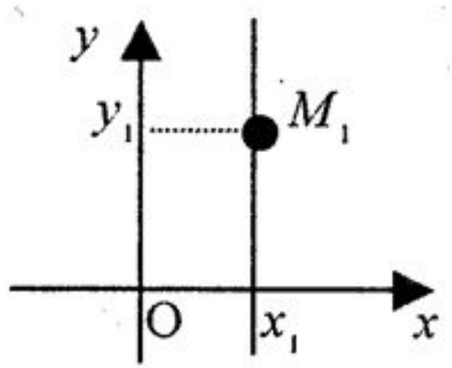
Решение:

$$y - 3 = 2(x - (-2)), \qquad y - 3 = 2(x + 2),$$

$$y = 2x + 7.$$

Уравнения прямой на плоскости

3) Уравнение вертикальной прямой, проходящей через заданную точку $M(x_1;y_1)$:



$$x = x_1$$

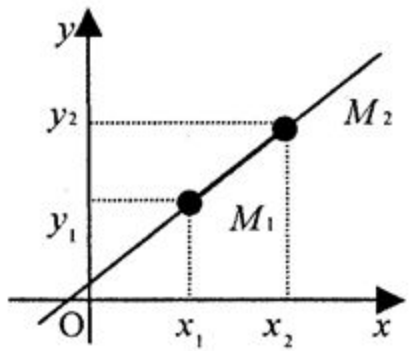
Пример. Уравнение вертикальной прямой, проходящей через точку *M(2;3)*:

$$x = 2$$

Уравнения прямой на плоскости

4) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

- а) если точки не лежат на одной вертикальной или горизонтальной прямой ($x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$)



$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Пример. Пусть *$M_1(2;-3)$* и *$M_2(-1;2)$*. Построить уравнение прямой.

Решение:

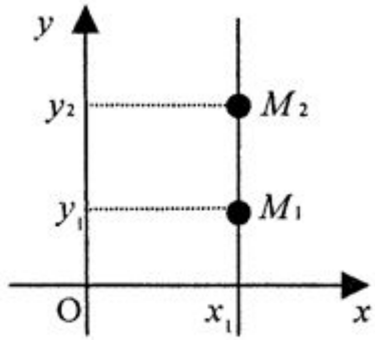
$$\frac{y-(-3)}{2-(-3)} = \frac{x-2}{-1-2}; \qquad \frac{y+3}{5} = \frac{x-2}{-3};$$

$$-3(y+3) = 5(x-2); \quad 5x + 3y - 1 = 0; \quad y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$$

Уравнения прямой на плоскости

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

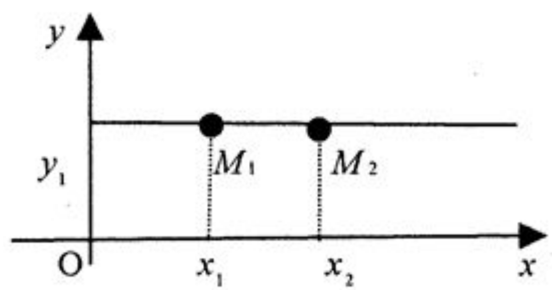
- б) если точки лежат на одной вертикальной прямой ($x_1 = x_2,\ y_1 \neq y_2$)



$$x = x_1$$

- в) если точки лежат на одной горизонтальной прямой ($x_1 \neq x_2,\ y_1 = y_2$

Горизонтальная прямая – частный случай наклонной прямой при α=0.



$$y = y_1$$

Уравнения прямой на плоскости

Следствие:

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ если } x_1 \neq x_2 .$$

Пример. Пусть $M_1(2;-3)$ и $M_2(-1;2)$. Угловой коэффициент прямой, проходящей через эти точки:

$$k = \frac{2-(-3)}{-1-2} = -\frac{5}{3}$$

Уравнения прямой на плоскости

5) Общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0,$$

причем коэффициенты *A* и *B* не обращаются одновременно в ноль ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Частные случаи:

если $A \neq 0$ и $B \neq 0$, то $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ - уравнение наклонной;

если $A = 0$ и $B \neq 0$, то $y = -\frac{C}{B}$ - уравнение горизонтальной прямой;

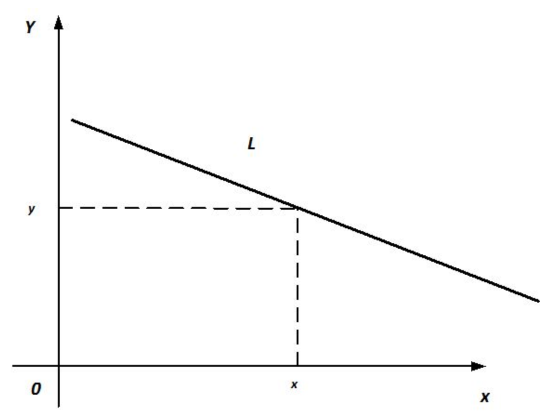
если $A \neq 0$ и $B = 0$, то $x = -\frac{C}{A}$ - уравнение вертикальной прямой.

Уравнения прямой на плоскости

Уравнением первой степени двух переменных называется алгебраическое уравнение, в каждое слагаемое которых входят как множители координаты, причем суммарная степень координат не больше 1.

$$Ax + By + C = 0$$

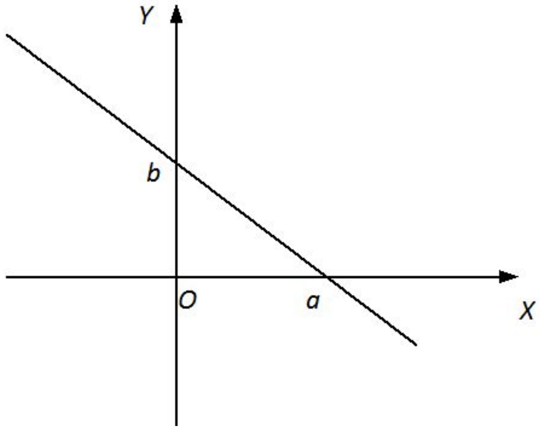
– уравнение 1 степени
двух переменных
на плоскости



Уравнения прямой на плоскости

- ***6) Уравнение прямой «в отрезках»:***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad a,b\neq 0$$



Пример. Уравнение $3x+5y=8$

можно представить в виде

$$\frac{x}{\frac{8}{3}}+\frac{y}{\frac{8}{5}}=1 \qquad a=\frac{8}{3},\ b=\frac{8}{5}$$

Приложения

- ***1) Необходимое и достаточное условие параллельности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2:***

$$k_1 = k_2$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

- ***2) Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2:***

Пример. Даны три вершины треугольника $A(-2;3)$, $B(0;1)$ и $C(-4;6)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.

Решение. Составим уравнение прямой AB.

$$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x+2}{2}, \qquad \frac{y-3}{-2}=\frac{x+2}{2},$$

$$-y+3=x+2, \qquad x+y-1=0,$$

$$y=-x+1, \quad k_1=-1$$

Угловой коэффициент высоты $k_2=-\dfrac{1}{-1}=1$

Уравнение прямой, проходящей через вершину $C(-4;6)$ с угловым коэффициентом $k_2=1$:

$$y-6=1\cdot(x+4), \; y=x+10.$$

Приложения

- ***3) Острый угол φ между прямыми, заданными уравнениями :***

$$y = k_1 x + b_1, \qquad y = k_2 x + b_2:$$

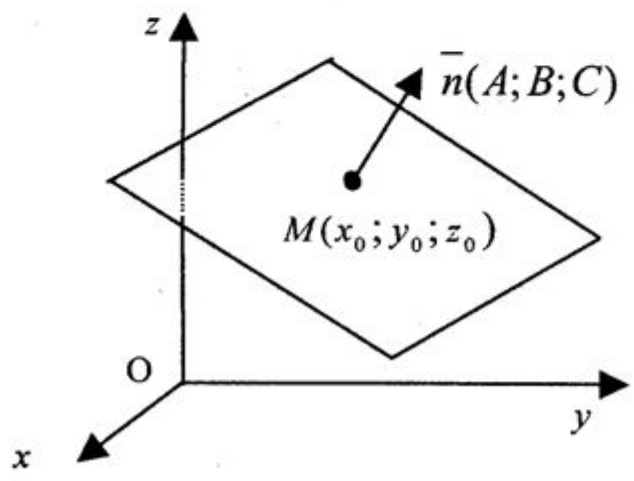
$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Элементы аналитической геометрии в пространстве

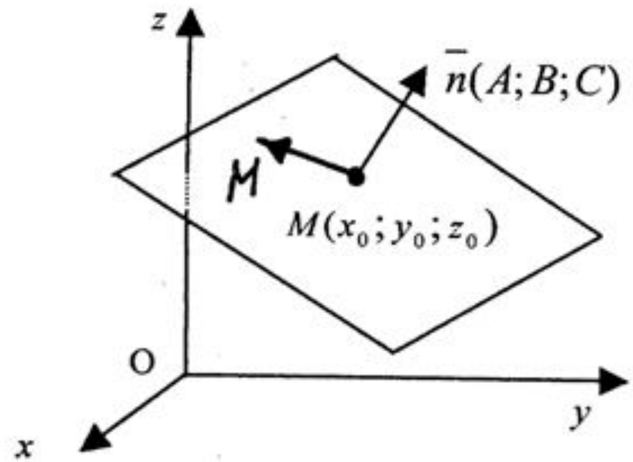
Уравнения плоскости

а) *Уравнение плоскости, проходящей через точку* $M(x_0; y_0; z_0)$, *перпендикулярно вектору* $\vec{n} = (A; B; C)$,

причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$:



Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ на плоскости.



Векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны. Тогда скалярное произведение этих векторов равно нулю. Это значит, что

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ ***- нормаль к плоскости***.

Уравнения плоскости

б) Общее уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости – уравнение 1 порядка в пространстве

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;4)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1;-1;2)$.

Решение.

$1\cdot(x-2) - 1\cdot(y-3) + 2\cdot(z-4) = 0$,

$x - y + 2z - 7 = 0$.

Расстояние от точки до плоскости

Найти расстояние d от точки М(x_0; y_0; z_0) до плоскости

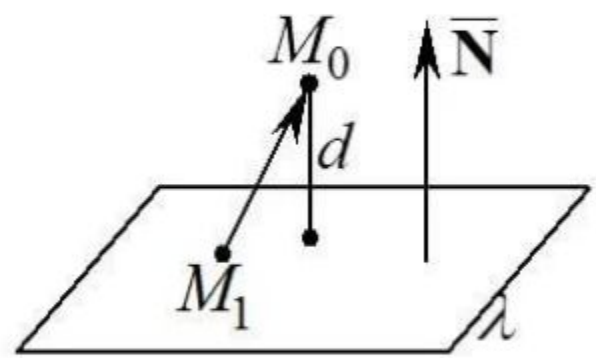
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Решение:

$$d = \left| Пр_{\vec{N}} \overrightarrow{M_1 M_0} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{N} \right|}{\left| \vec{N} \right|} =$$

$$= \frac{\left| A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$\frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Пример. Расстояние от точки М(-3,1,2) до прямой 3х+4у-12z+2=0

$$d = \frac{\left| 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 2 \right|}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{\left| -27 \right|}{\sqrt{169}} = \frac{27}{13}$$

Расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

с нормалями $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$

Условие параллельности двух плоскостей:

$$\vec{n}_1 \,//\, \vec{n}_2 \,.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \,,$$

или

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

с нормалями $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$

Острый угол, образованный двумя плоскостями, заданными уравнениями

$$\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|$$

Кривые второго порядка

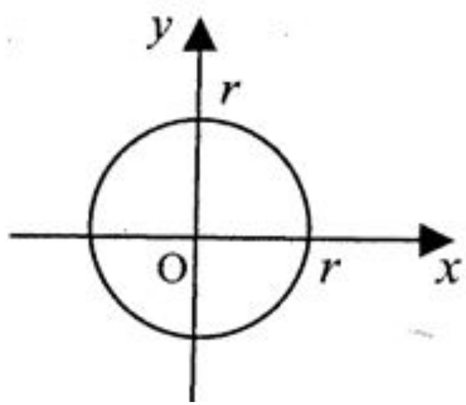
- При изучении линий на плоскости их классифицируют по сложности уравнений:
- уравнения 1 степени ⟺ прямые
- уравнения 2 степени ⟺ кривые второго порядка:

  окружность, эллипс, гипербола и парабола.
-

Окружность

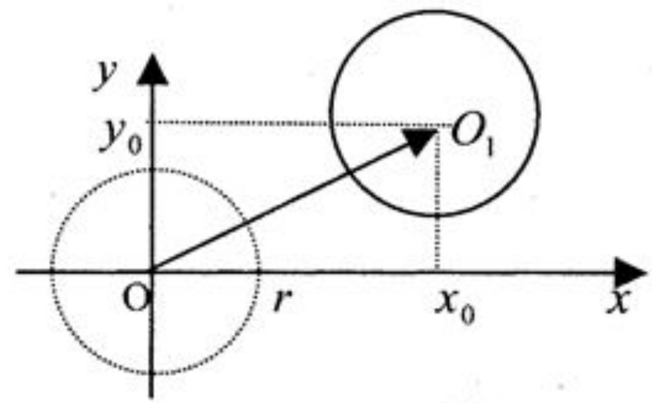
- ***Окружность*** – геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от некоторой точки, называемой центром

- *Каноническое уравнение окружности*



$$x^2 + y^2 = r^2$$

r – радиус окружности



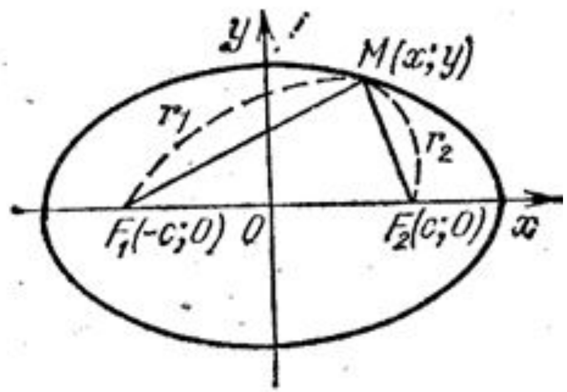
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$O_1(x_0; y_0)$ – цент окружности

Эллипс

Эллипс – геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная

- *Каноническое уравнение эллипса*



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Фокусы эллипса: $F_1(-c;0)$, $F_2(0;c)$

Расстояние между фокусами: $F_1F_2=2c$.

Для любой точки $M(x;y)$ эллипса:

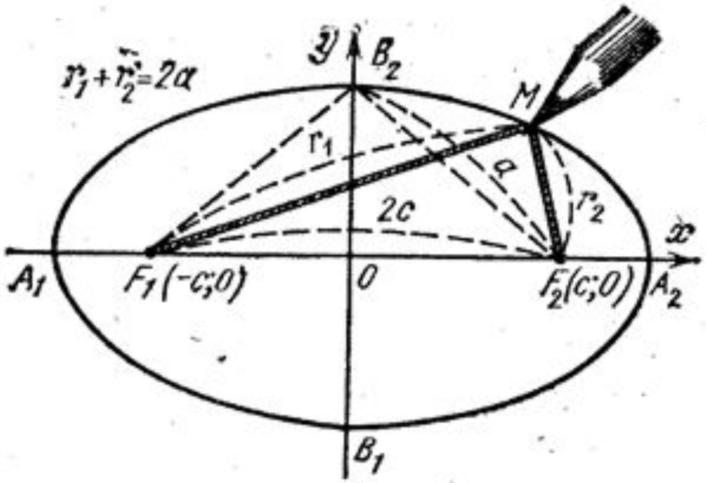
$$r_1+r_2=2a.$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$

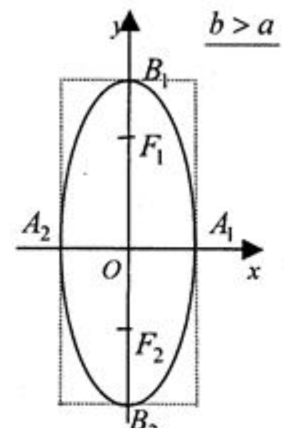
Центр эллипса - $O(0;0)$

·

Эллипс



Если $b > a$:



Точки пересечения с осями – вершины эллипса

$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$

Оси эллипса, если $a > b$:

большая ось $A_1A_2 = 2a$, малая ось $B_1B_2 = 2b$.

a, b – полуоси.

Эксцентриситет (мера сжатия) эллипса: $e = \dfrac{c}{a} < 1$

Если центр эллипса перенести в точку $O_1(x_0;y_0)$,

то уравнение эллипса примет вид:

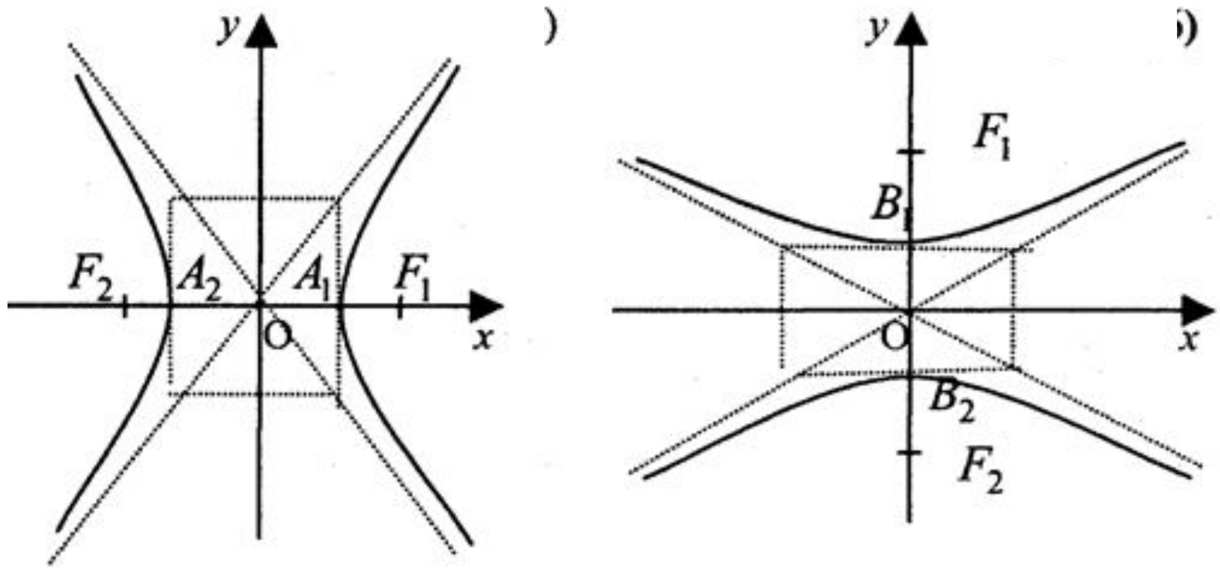
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Планеты и кометы Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов – Солнце.

Гипербола

Гипербола – геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная

- *Каноническое уравнение гиперболы*



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$ – асимптоты гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

a – действительная полуось, b – мнимая полуось.

b – действительная полуось, a – мнимая полуось.

Гипербола

Если центр гиперболы перенести в точку $O_1(x_0; y_0)$, то уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

или

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$$

a, b – полуоси.

Эксцентриситет гиперболы: $e=\dfrac{c}{a}>1$

Парабола

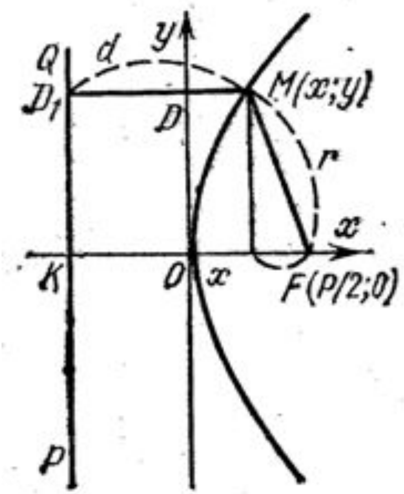
Парабола – геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой

- **Каноническое уравнение параболы**

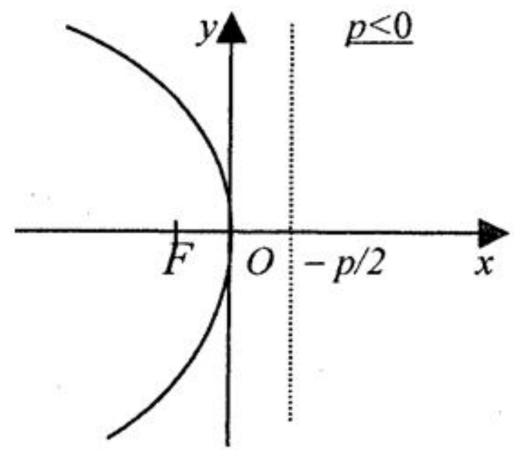
Пусть директриса параллельна оси Oy и ее уравнение $x = -\frac{p}{2}$,

$p > 0$, а фокус - точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, то уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$



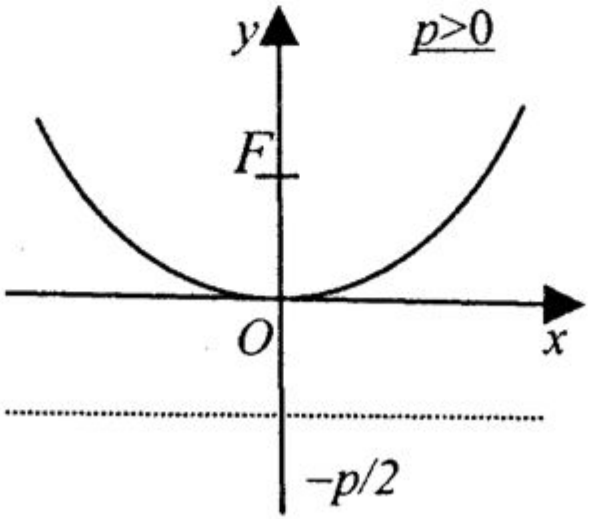
Если $p < 0$, то

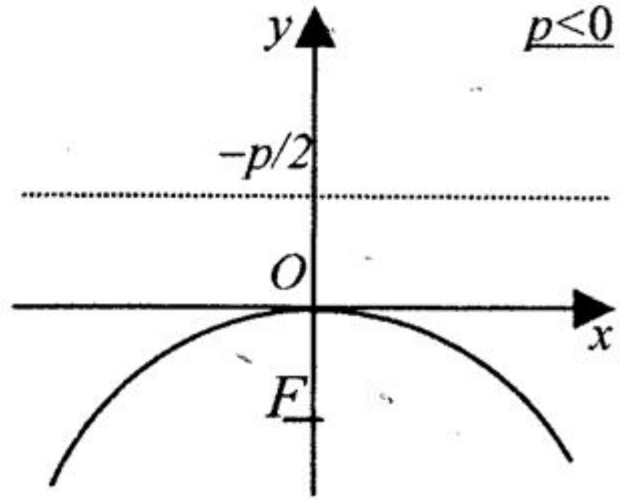


Парабола

Если директриса параллельна оси Ох :

$$x^2 = 2py$$





Если вершину параболы перенести в точку $O_1(x_0; y_0)$, то уравнение параболы примет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \text{ или } (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Общий вид уравнения кривой второго порядка

Уравнение второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Пусть $B = 0$.

Если $A = C$, то – окружность,

если $A \neq C$ и $A \cdot C > 0$, то – эллипс,

если $A \neq C$ и $A \cdot C < 0$, то– гипербола,

если $A \cdot C = 0$, то – парабола.

Приведение уравнения кривой к каноническому виду

- Основной прием – выделение полных квадратов.

Пример 1.

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$,

$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) - 3 = 0$,

$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 3 = 0$,

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ – окружность с центром $O(-2;3)$ и

$r = 4$.

Приведение уравнения кривой к каноническому виду

Пример 2.

$$9x^2+16y^2-90x+32y+97=0,$$

$$9(x^2-10x)+16(y^2+2y)+97=0,$$

$$9((x^2-10x+25)-25)+16((y^2+2y+1)-1)+97=0,$$

$$9((x-5)^2-25)+16((y+1)^2-1)+97=0,$$

$$9(x-5)^2-225+16(y+1)^2-16+97=0,$$

$$9(x-5)^2+16(y+1)^2=144 \,\Big|\; :144,$$

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$ – эллипс.