Основы цифровой обработки сигналов

Лекция 12 (7_1)

Тема 7. Дискретные случайные процессы(начало)

Преподаватель: Недашковский В. М.

Тема 7. Дискретные случайные процессы

7. Дискретные случайные процессы

7.1. О характеристиках случайных величин

7.2. О характеристиках случайных процессов

7.3. Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

7.4. Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

7.5. О спектральной факторизации

7.6. Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Дискретные случайные процессы

При решении задач предыдущих разделов предполагалось, что входы в системы являются детерминированными функциями, вид которых заранее известен. Однако, в основном на системы воздействуют случайные сигналы, изменение которых заранее неизвестно, величина которых в каждый момент времени случайна. Напомним некоторые сведения, известные из предыдущих дисциплин и начнем с изложения необходимых сведений о случайных величинах.

7.1. О характеристиках случайных величин

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины делятся на 2 большие группы:

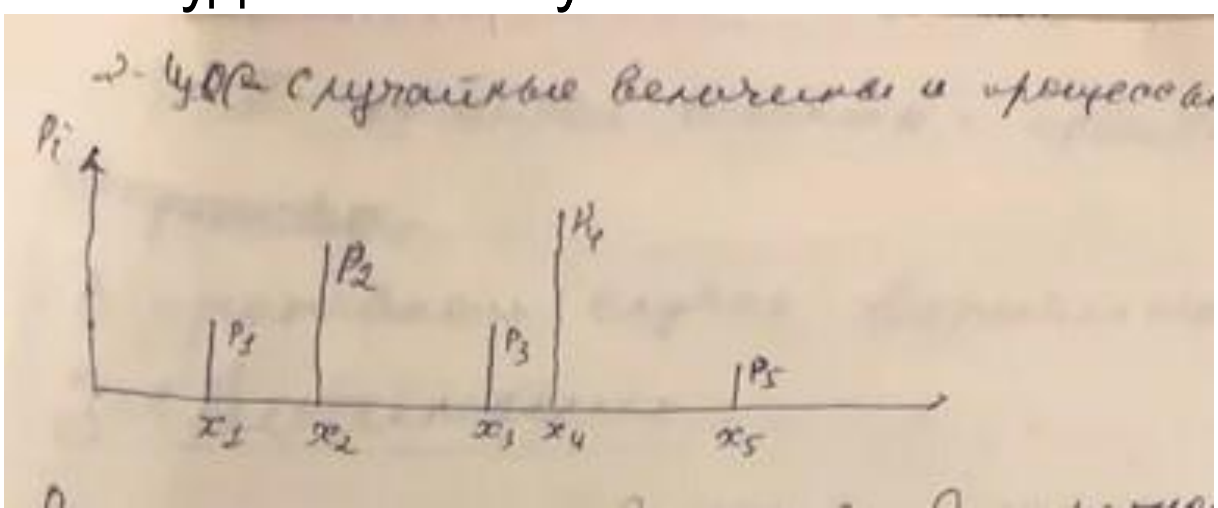
1. **Дискретная случайная величина** – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений конечно (либо бесконечно, но счётно).
2. **Непрерывная случайная величина** – принимает все числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

О характеристиках случайных величин

Сначала рассмотрим дискретные случайные величины. Дискретная случайная величина X случайным образом может принимать конечное число значений $x_1, x_2 \dots x_n$. Может быть известным значение вероятности того, что случайная величина *X* примет конкретное значение x_k, и это значение вероятности будем обозначать

$$P(X = x_k) = p(x_k) = p_k$$

Совокупность этих вероятностей p_k называется законом распределения случайных величин *X* (см. рис. ниже). Например, рост студента и его успеваемость.



О характеристиках случайных величин

Таким образом **закон распределения дискретной случайной величины – это соответствие между возможными значениями этой величины и их вероятностями**. Чаще всего закон записывают таблицей (см. табл. ниже):

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Вероятность $p(x_k)$ можно сопоставить с частотой u_k, с которой случайная величина будет принимать значения x_k в серии опытов. Так, если $p(x_k) = 0{,}1$, то в серии из 1000 опытов значение x_k выпадает примерно 100 раз. Появление этого значения x_k точно 100 раз маловероятно, но появление около ста раз имеет большую вероятность.

Пусть имеются две дискретные случайные величины X и Y со своими законами распределения $p(x)$ и $p(y)$. Вероятности $p(x)$ и $p(y)$ называются ***априорными вероятностями*.**

О характеристиках случайных величин

Если закон распределения одной случайной величины не зависит от того, какие значения приняла другая случайная величина, то такие случайные величины называются *независимыми*. В противном случае величины называются *зависимыми*. Например, посещаемость студентом занятий и его успеваемость. И успеваемость и посещаемость студента случайные величины, но они зависимы. Пусть средняя оценка студента по конкретной дисциплине 3,5. Но если известно значение другой случайной величины – 100% посещаемость, то вероятность отличной оценки в зачётке повышается.

У зависимых случайных величин наряду с априорными вероятностями $p(x_i)$ и $p(y_i)$ существуют ***условные вероятности*** $p(x_i/y_i)$ и $p(y_i/x_i)$ – вероятности случайной величины X, когда известно значение другой случайной величины Y и наоборот.

О характеристиках случайных величин

Для вычисления вероятности совместного появления заданной пары значений двух случайных величин из теоремы произведения вероятностей следует:

$P[x = x_i \text{ и } y=y_i] = p(x_i)p(y_i/x_i) = p(y_i)p(x_i/y_i)$

Условия независимости случайных величин, как это следует из определения, можно записать в следующих видах

$p(x_i/y_i) = p(x_i)$

$p(y_i/x_i) = p(y_i)$

$p[x=x_i \text{ и } y=y_i] = p(x_i)*p(y_i)$

О характеристиках случайных величин

Моментом *К*-го порядка случайной величины называется среднее значение X^k:

$$M[X^k] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p(x_i)$$

Момент первого порядка называется ***математическим ожиданием*** **или** ***средним значением*** случайной величины:

$$M[X] = m_x = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата центрированного значения случайной величины

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \cdot p(x_i)$$

О характеристиках случайных величин

Дисперсия характеризует размах – амплитуду отклонения случайной величины от среднего значения (т.е. математического ожидания). Отклонения возводятся в квадрат , чтобы положительные отклонения не компенсировались отрицательными.

***Среднеквадратичным отклонением* или *стандартом* называет корень квадратный из дисперсии**

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин

$D_{x+y+z} = D_x + D_y + D_z$

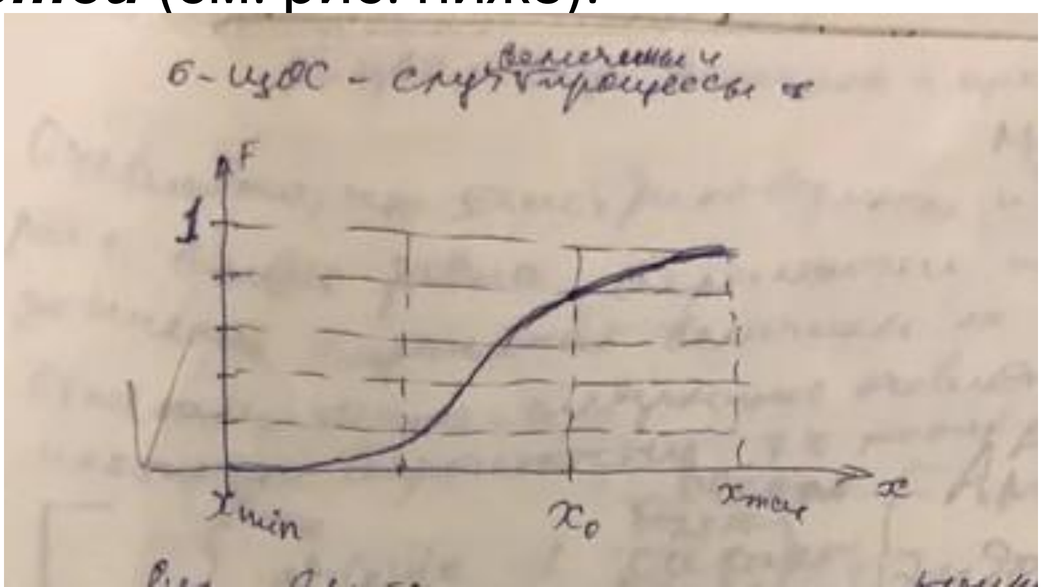
Если величины зависимы, то последнее равенство неверно.

О характеристиках случайных величин

***Непрерывная случайная величина* может принимать случайным образом любое значение внутри заданного конечного или бесконечного интервала.**

Таким образом, непрерывная случайная величина может принимать бесконечно большое число значений. Поэтому вероятность какого-то конкретного значения равна нулю. Следовательно, закон распределения вероятностей здесь надо вводить по-другому.

Исходным является ***интегральный закон распределения вероятностей*** (см. рис. ниже).



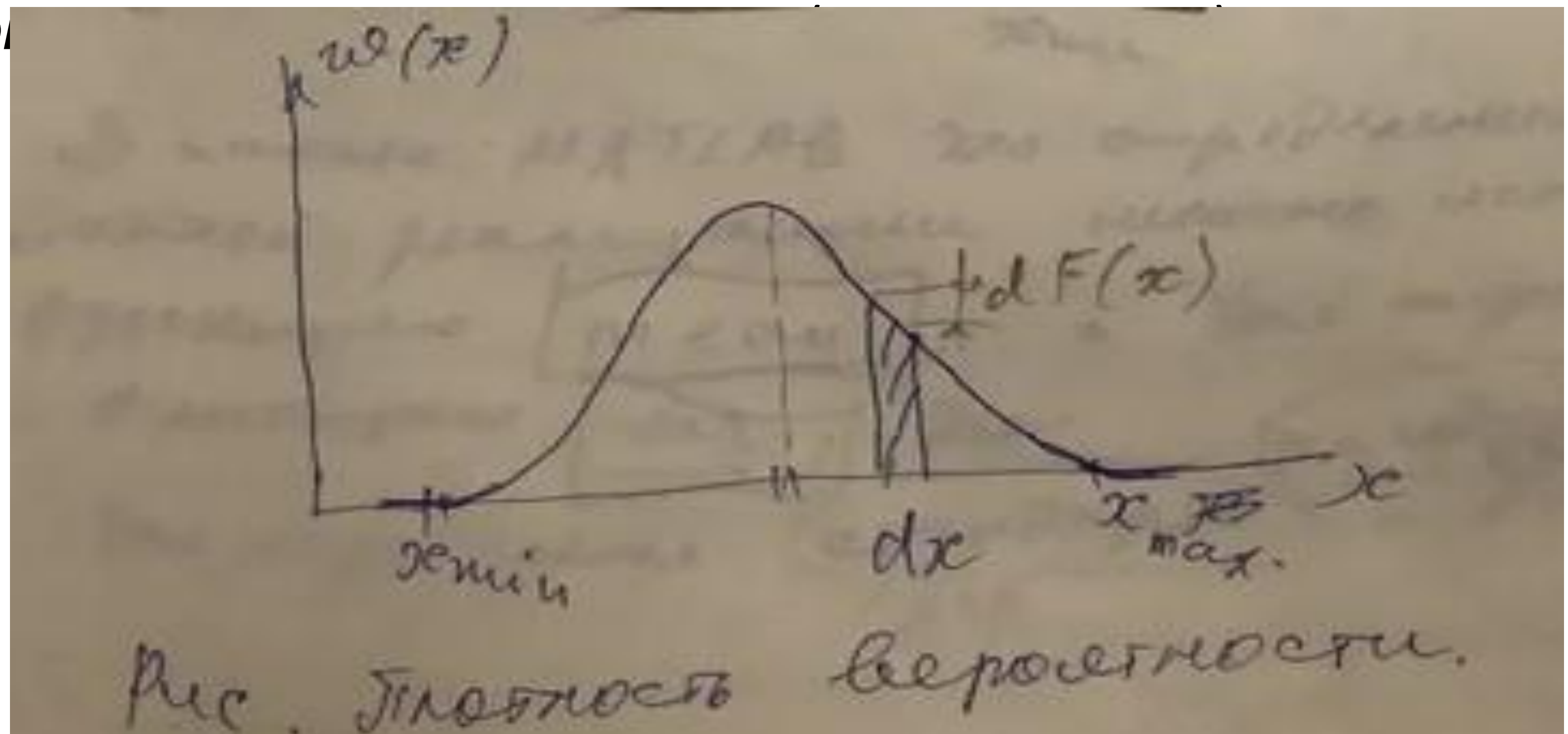
О характеристиках случайных величин

Значение интегрального закона распределения $F(x_0)$ равен вероятности нахождения случайной величины в интервале $x_{min} \dots x_0$. Интегральный закон есть возрастающая функция, причём

$F(x) = 1$, *при* $x > x_{max}$

Производная от интегрального закона называется

пло



О характеристиках случайных величин

Заштрихованная площадь на рис. выше равна вероятности попадания значений случайной величины на отрезок *dx*. Отметим, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{x} w(x)\,dx = F(x)$$

Для непрерывной случайной величины выражение для математического ожидания равно

$$M(x) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\,w(x)\,dx$$

Дисперсия равна

$$M[(x-m_x)^2] = D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2\,w(x)\,dx$$

В пакете MATLAB для определения математического ожидания заданной реализации можно использовать функцию ***mean***, а для определения дисперсии можно использовать функцию ***var***.

О характеристиках случайных величин

Для определения стандарта (т.е. среднеквадратичное отклонение ξ ▯▯▯) – функцию ***std***.

Две непрерывные случайные величины *X* и *Y*, если их рассматривать порознь, имеют вероятностные характеристики, а именно *априорные плотности вероятности*

w(x) и *w(y).*

Если эти величины зависимы, то плотности вероятности одной будут зависеть от того, в каком состоянии находится другая случайная величина. Априорные плотности вероятности превращаются в *условии плотности вероятности*

w(x|y) и *w(y|x).*

Переменная, указанная после черты, означает, что, если значение второй случайной величины известно, то это значение определяет вид плотности вероятности первой

О характеристиках случайных величин

Если случайные величины независимы, априорные и условные плотности вероятности одинаковы, а плотность вероятности одной величины не зависит от того, в каком состоянии плотности другая случайная величина.

Вероятность совместного появления значений в заданном квадрате определяется состоянием

$$p(x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} w(x, y)\, dx\, dy$$

w(x,y) – двумерная плотность вероятности, пропорциональная вероятности совместных значений обеих случайных величин в бесконечно малом квадрате *dx dy*.

Эта двумерная плотность вероятности в соответствии с формулой вероятности совместного появления событий равна

$$w(x,y) = w(x)\, w(y|x) = w(y)\, w(x|y)$$

О характеристиках случайных величин

Если случайные величины независимы, то

$w(x|y) = w(x) \quad w(y|x) = w(y) \quad w(x,y) = w(x)w(y)$

Для системы двух случайных величин кроме их матожиданий и дисперсий

m_x, m_y, D_x, D_y.

рассматривается смешанный центрированный момент второго порядка, называемый ***корреляционным моментом***

$$R_{xy} = M[(x-m_x)(y-m_y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int (x - m_x)(y - m_y)w(x,y)\,dx\,dy$$

Часто рассматривают ***коэффициент корреляции***:

$$r_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Корреляционный момент показывает степень зависимости случайных величин. **Если величины независимы, то корреляционный момент равен нулю.** Покажем это.

О характеристиках случайных величин

Действительно, в этом случае приведенное выше выражение для R_{xy} можно записать

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y)\,w(x)\,w(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)\,w(x)\,dx \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)\,w(y)\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty}x\,w(x)\,dx - m_x\int_{-\infty}^{\infty}w(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}y\,w(y)\,dy -\right.$$

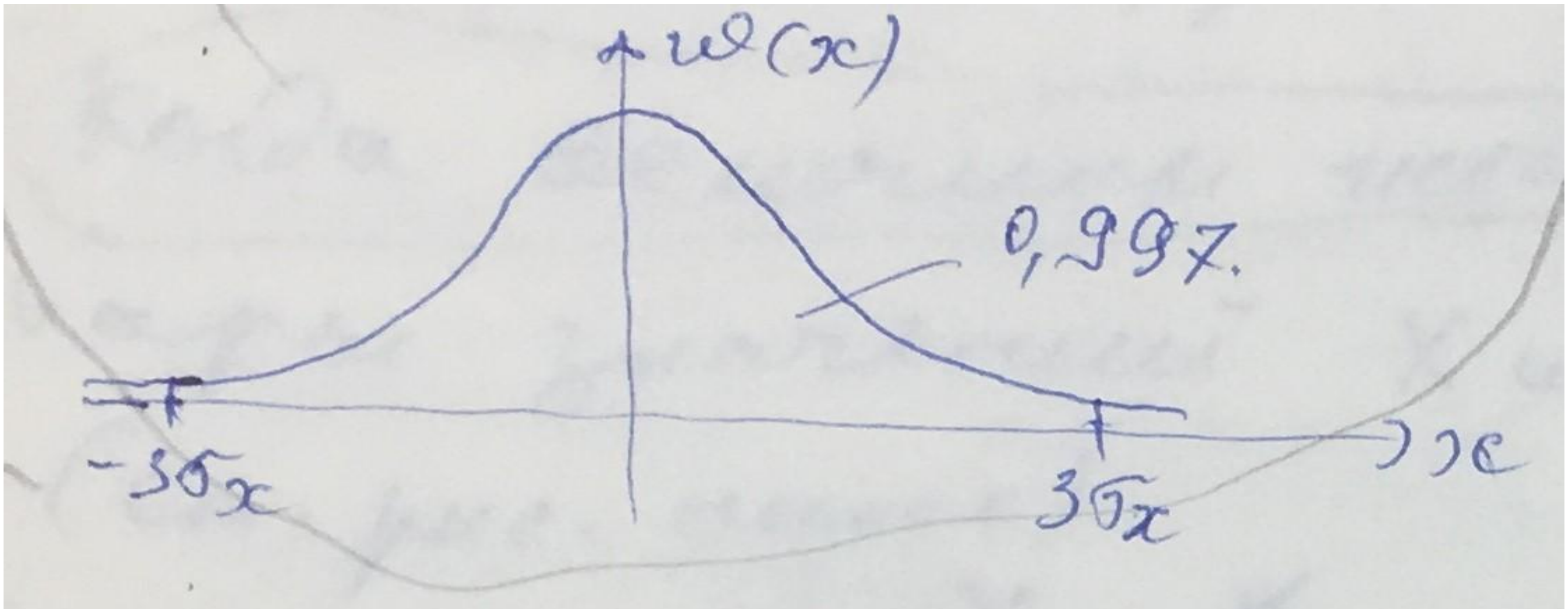
$$\left. - m_y\int_{-\infty}^{\infty}w(y)\,dy\right) = (m_x - m_x \cdot 1)(m_y - m_y \cdot 1) = 0$$

Случайные величины, корреляционный момент которых равен нулю, называются ***некоррелированными*.** Однако, **независимость следует из некоррелируемости только для нормальных случайных величин**, для которых плотность вероятности описывается формулой

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} * e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

О характеристиках случайных величин

График плотности вероятности нормальной непрерывной случайной величины приведен на рис. ниже



Другим крайним случаем является жесткая связь между случайными величинами. **При жесткой связи модуль коэффициента корреляции принимает максимальное значение равное единице.**

О характеристиках случайных величин

Рассмотрим выражение

$$M\left[\left(\frac{X^0}{\sigma_x} \pm \frac{Y^0}{\sigma_y}\right)^2\right] \geq 0$$

Матожидание неотрицательно, т.к. осредняется неотрицательная величина. Преобразуем

$$M\left[\frac{X^{0\,2}}{\sigma_x^2} \pm \frac{2X^0Y^0}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{Y^{0\,2}}{\sigma_y^2}\right] = \frac{M[X^{0\,2}]}{\sigma_x^2} \pm \frac{2M[X^0Y^0]}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{M[Y^{0\,2}]}{\sigma_y^2} = 2 \pm 2r_{xy} \geq 0$$

Положив $r_{xy} = 1$ и в двух приведенных выше выражениях выбрав знак минус, получим

$$M\left[\left(\frac{X^0}{\sigma_x} - \frac{Y^0}{\sigma_y}\right)^2\right] \geq 0$$

$$M\left[\frac{X^{0\,2}}{\sigma_x^2} - \frac{2X^0Y^0}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{Y^{0\,2}}{\sigma_y^2}\right] = \frac{M[X^{0\,2}]}{\sigma_x^2} - \frac{2M[X^0Y^0]}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{M[Y^{0\,2}]}{\sigma_y^2} = 2 - 2r_{xy} \geq 0$$

О характеристиках случайных величин

Тогда из приведенных выше двух выражений следует, что:

-во- первых, матожидание равно нулю, поскольку матожидание берётся от тождественного нуля, значит

$$\frac{[\text{illegible}]0}{[\text{illegible}]} = \frac{[\text{illegible}]0}{[\text{illegible}]}$$

и хотя обе величины случайные, но определив значение одной величины, из выражения выше определяем значение другой величины;

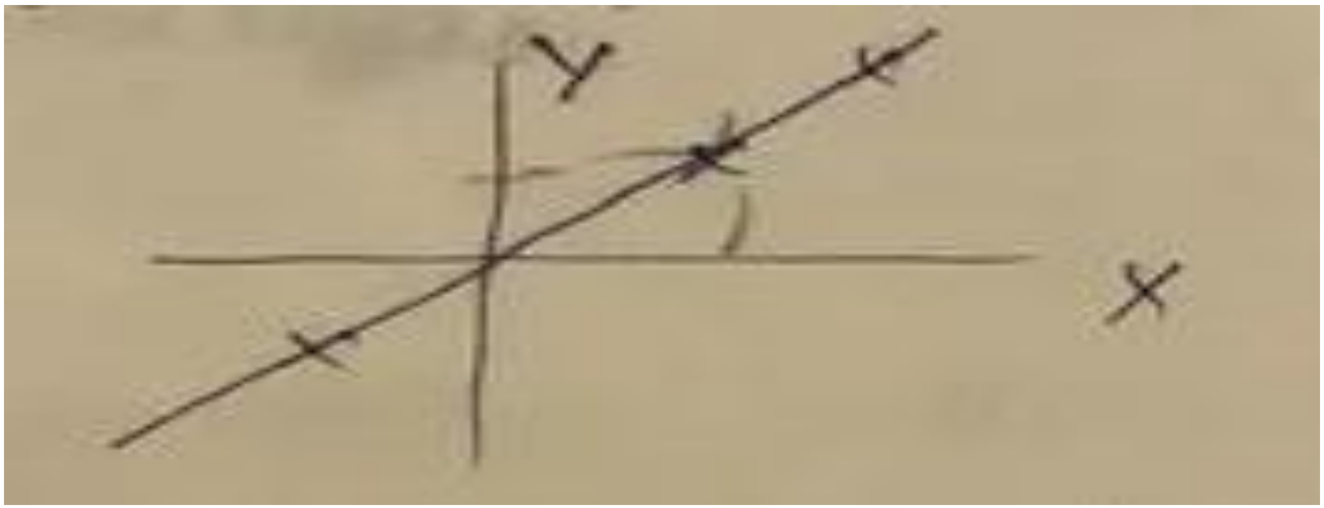
- во-вторых, из полученного выше выражения

$2 - 2r_{xy} \geq 0$

следует, что модуль коэффициента корреляции не может быть больше единицы.

О характеристиках случайных величин

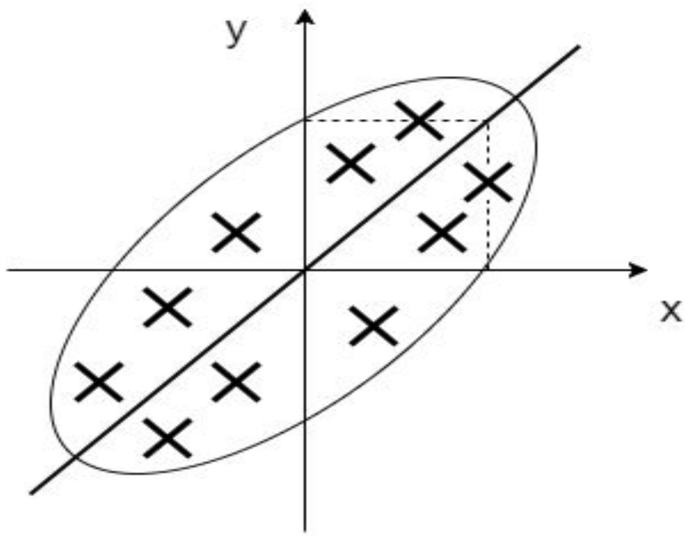
Следовательно, рассмотрены крайние случаи. Когда величины жёстко связна ($r_{xy} = 1$), пары значений x и y лежат на одной прямой (см. рис. ниже).



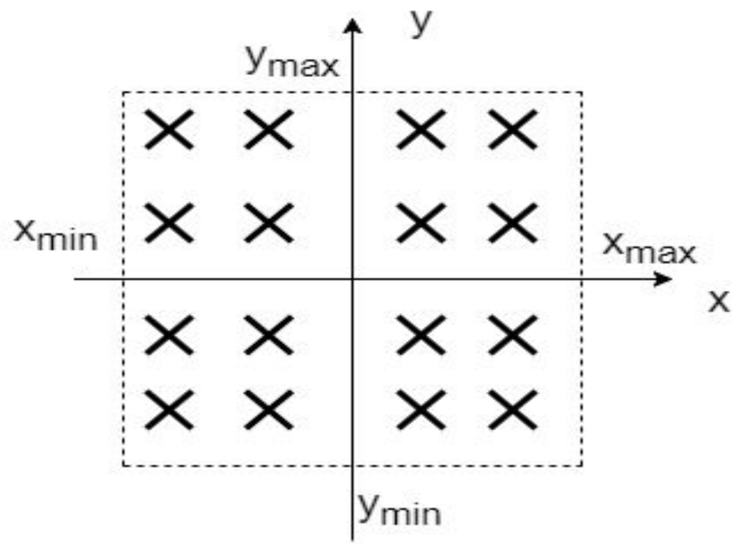
Когда величины не коррелированы, появление одной величины не ограничивает область появления другой величины, а когда величины коррелированы, появление одной величины сужает возможную область появления другой величины (см. рис. ниже).

О характеристиках случайных величин

Рис. Коррелированные и некоррелированные величины



Коррелированые



Некоррелированые

В пакете Матлаб функция ***cor*** выдаёт значение дисперсий и корреляционных моментов, а функция ***corrcoef*** выдаёт значение коэффициента корреляции.

7.2. О характеристиках случайных процессов

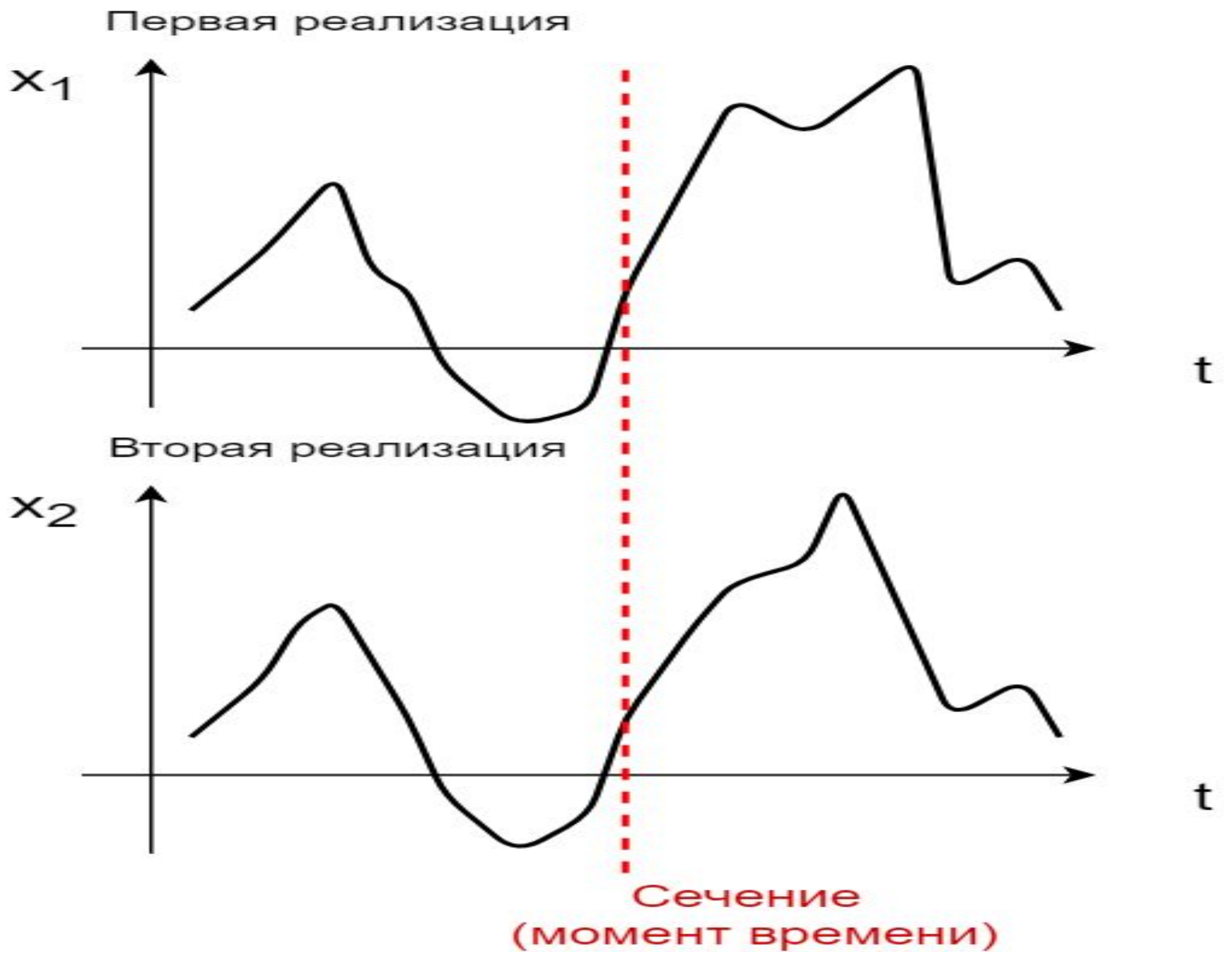
Случайные процессы являются частными случаями случайных функций. **Случайные функции меняют своё значение при изменении аргумента, причём изменение происходит случайным образом и заранее не может быть предсказано**.

Случайный процесс **– это случайная функция, у которой аргументом является время.**

Пусть имеем случайный процесс *x(t).* Начинаем эксперимент – время меняется и случайный процесс фиксирует на осциллограмме какую-то кривую (реализацию) $x_1(t)$. Для второго опыта реализацию $x_2(t)$. и т.д. Даже если условия опыта одинаковы, реализации отличаются (см. рис. ниже).

О характеристиках случайных процессов

Рис. Реализации случайных процессов



О характеристиках случайных процессов

(на рис. выше внести изменения: обозначения осей ординат заменить x_1 *на* $x_1(t)$, x_2 *на* $x_2(t)$)

Если зафиксируем момент времени, то в сечении можно говорить о непрерывной случайной величине, то есть в любые моменты времени имеем случайное значение. В другие моменты – другие случайные величины.

Статистические характеристики случайного процесса можно ввести двумя способами.

Первый способ заключается в определении плотностей вероятностей. В этом способе надо определять плотность вероятности для каждого момента времени, а их бесконечное число. Кроме того, надо вводить условные вероятности, чтобы знать зависимости между значениями процесса в соседние моменты времени. Затем нужно связывать три соседних момента времени и т.д. Задача становится нереальной.

О характеристиках случайных процессов

Второй способ описания случайных процессов заключается в определении обычных и центрированных моментов. Для случайного процесса момент первого порядка – математическое ожидание в конкретный момент времени представляет собой среднее значение, вычисленное по всем возможным реализациям в этот момент времени. Для разных моментов времени средние значения могут быть различными, следовательно, **матожидание случайного процесса** есть функция времени

$m_x(t) = M[x(t)]$

В качестве момента второго порядка возьмём **корреляционный момент** двух значений случайного процесса в разные моменты времени $x(t_1)$ и $x(t_2)$.

$R_x(t_1,t_2) = M\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\}$

Для случайных процессов корреляционный момент между значениями случайного процесса в два момента времени называется *корреляционной функцией*

О характеристиках случайных процессов

Описание случайного процесса с помощью моментов не упрощает задачу, т.к. требует бесконечное число моментов, чтобы связать все возможные пары, тройки, четверки и т.д. значений процесса. Однако этот метод в теории случайных процессов используется в подавляющем числе случаев по следующим причинам:

- **при прохождении случайного сигнала через динамическую систему проще найти изменение моментов, чем плотностей вероятности;**
- **случайные процессы в динамических системах по окончании переходных процессов начинают приближаться к нормальным.**

Нормальные случайные процессы полностью описываются двумя моментами: матожиданием и корреляционной функцией.

О характеристиках случайных процессов

Случайные процессы называются *нормальными*, если закон распределения совокупности любого числа n его сечений представляет собой n-мерный нормальный закон.

В дальнейшем используется описание случайного процесса с помощью математического ожидания и корреляционной функции. Теория случайных процессов, построенная таким образом, называется ***корреляционной теорией***

Спасибо за внимание