Числовые характеристики ДСВ:

Функция распределения

Математическое ожидание

Дисперсия

Среднеквадратическое отклонение

Функция распределения

- **Функцией распределения случайной величины *X*** называется вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем *переменная x*, которая «пробегает» все **действительные значения.**

$$F(x)=P(X<x)$$

Свойства функции распределения

- 1) *Функция распределения – неубывающая.*
- *2)* $F(+\infty)=1$
- 3) $F(-\infty)=0$
- *Вероятность того, что дискретная случайная величина примет одно из возможных значений* x_i *, равна скачку функции распределения в точке* x_i *.*

Пример

- Найти функцию распределения и построить ее график для случайной величины *X*, заданной законом распределения

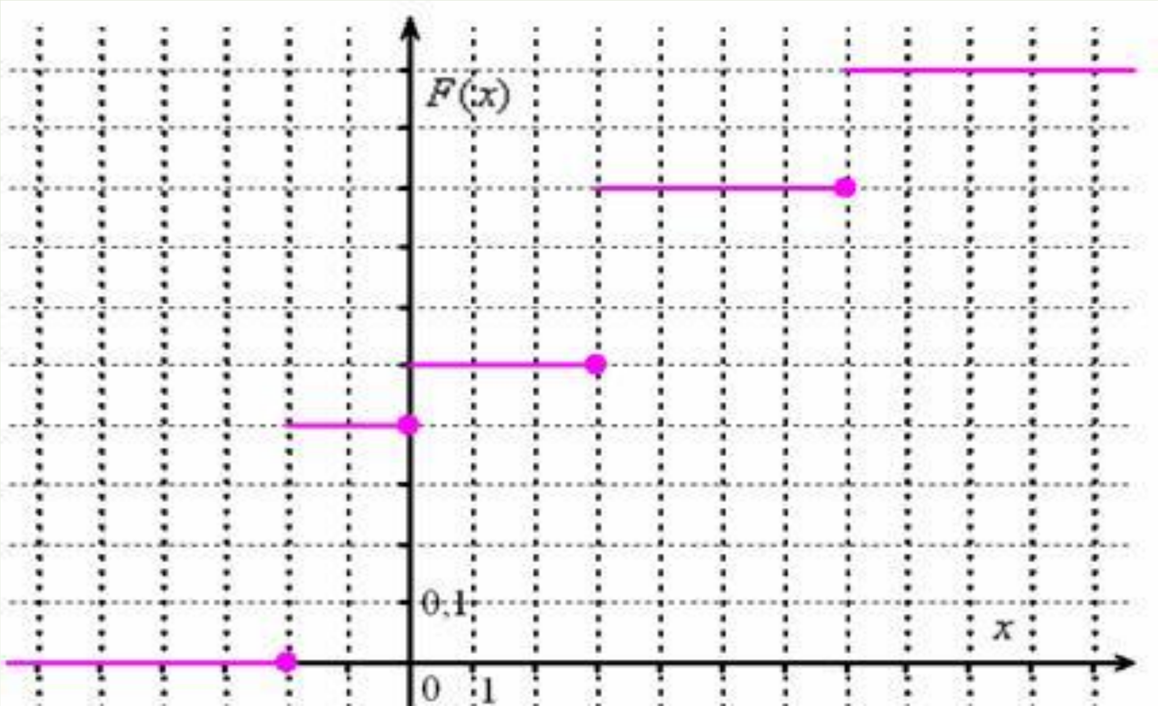
x_i	*-2*	*0*	*3*	*7*
p_i	*0,4*	*0,1*	*0,2*	*0,3*

Решение

- $x \le -2$ $F(x)=P(X<x)=0$
- $-2 < x \le 0$ $F(x)=P(X<x)=P(-2)=0,4$
- $0 < x \le 3$ $F(x)=P(X<x)=P(-2)+P(0)=0,4+0,1=0,5$
- $3 < x \le 7$ $F(x)=P(X<x)=P(-2)+P(0)+P(3)=0,4+0,1+0,3=0,8$
- $x > 7$ $F(x)=P(X<x)=P(-2)+P(0)+P(3)+P(7)=$

$=0,4+0,1+0,3+0,2=1$

- $$F(x)=\begin{cases} 0,\text{если}\_\ x \le -2 \\ 0,4,\text{если}\_-2 < x \le 0 \\ 0,5,\text{если}\_\ 0 < x \le 3 \\ 0,8,\text{если}\_\ 3 < x \le 7 \\ 1,\text{если}\_\ x > 7 \end{cases}$$



Пример

- В билете три задачи. Вероятность того, что студент правильно решит первую задачу, равна 0,9, вторую – 0,8, третью – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете. Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что студент сдаст зачёт, если для этого нужно правильно решить не менее двух задач.

Решение

- $p_1=0,9$; $q_1=0,1$
- $p_2=0,8$; $q_2=0,2$
- $p_3=0,7$; $q_3=0,3$
- *Используя теоремы умножения независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины – числа правильно решенных задач в билете*
- $x=0$; $p(0) = q_1 q_2 q_3 = 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,006$
- $x=1$; $p(1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 =$

$$= 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,092$$

Решение

- $x=2;$ $p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 =$

$$= 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,398$$

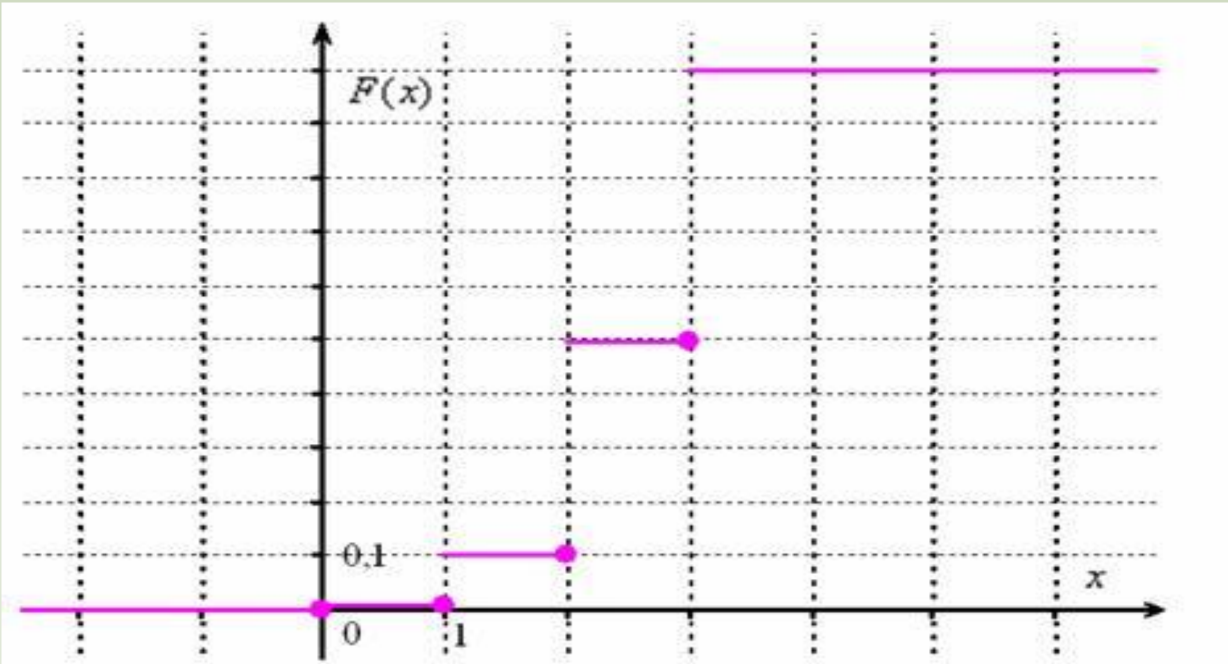
- $x=3$ $p(3) = p_1 p_2 p_3 = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,504$
- Закон распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,604

- Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, если\_x \le 0 \\ 0,006, если\_1 < x \le 1 \\ 0,098, если\_1 < x \le 2 \\ 0,4968, если\_2 < x \le 3 \\ 1, если\_x > 3 \end{cases}$$

Решение



- *Найдём вероятность того, что студент сдаст зачёт:*

$$P(X \geq 2) = P(2 \leq X < +\infty) = F(+\infty) - F(2) =$$

$$= 1 - 0,098 = 0,902$$

Математическое ожидание

- **Математическим ожиданием М(Х)** называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины (x_i) на соответствующие вероятности (p_i):
- $$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$
- *Математическое ожидание – это число, которое указывает, какое **среднее значение** случайной величины следует ожидать в результате проведения опыта или испытания.*

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

Задание:

- **Пример 1.** Закон распределения случайной величины **X** задан таблицей:

X	-5	0	2	6
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание случайной величины **X**.

Пример 2. Случайная величина «сумма очков, выпавших при двух бросаниях игральной кости»

Значение X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$M(X)=2\cdot 1/36+3\cdot 2/36+4\cdot 3/36+5\cdot 4/36+6\cdot 5/36+7\cdot 6/36+8\cdot 5/36+9\cdot 4/36+10\cdot 3/36+11\cdot 2/36+12\cdot 1/36=7.$

Свойства математического ожидания

- $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$
- **1).** $M(C) = C$, где C – *const;*
- **2).** $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;
- **3).** $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;
- **4).** $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$,

  где X и Y - независимые случайные величины.

Задача

X – «число очков, выпавших на одной игральной кости»

M(X) = 3,5

Тогда при пяти бросаниях математическое ожидание равно $3{,}5 \cdot 5 = 17{,}5$

при семи бросаниях $3{,}5 \cdot 7 = 24{,}5$

при ста бросаниях $3{,}5 \cdot 100 = 350$

Дисперсия

- **Дисперсией** случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонений от среднего значения:

$$D(X) = M[(X-\bar{x})^2] = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p_i .$$

- ***Для вычисления:***
- $D(X) = M(X^2) - M^2(X),$
- где $M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots + x_n^2 \cdot p_n$

- Дисперсия характеризует **степень отклонения** значений случайной величины от ее среднего значения. На практике дисперсия служит для **оценки меры риска**.

- *(Дисперсия всегда положительное число)*

Свойства дисперсии

- $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$,
- где $M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots + x_n^2 \cdot p_n$

- **1).** $D(C) = 0$, где C – $const$;
- **2).** $D(CX) = CD(X)$;
- **3).** $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, если X, Y – независимые случайные величины.

Среднеквадратическое отклонение

- *Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины: если ДСВ имеет размерность метры, то дисперсия измеряется в м². Для того, чтобы оценка рассеяния значений случайной величины имела размерность самой величины, вычисляют среднеквадратичное отклонение.*
- Положительное значение квадратного корня из дисперсии называют **среднеквадратическим отклонением** (или стандартным отклонением):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Задание:

- Закон распределения случайной величины **X** задан таблицей:

X	-5	0	2	6
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите *среднеквадратичное отклонение* случайной величины **X**.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Домашнее задание:

- В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули
- **а).** 2 шара, **б).** 3 шара.

Случайная величина –число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.