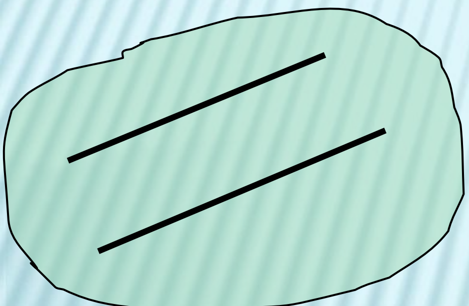
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Параллельные прямые в пространстве.

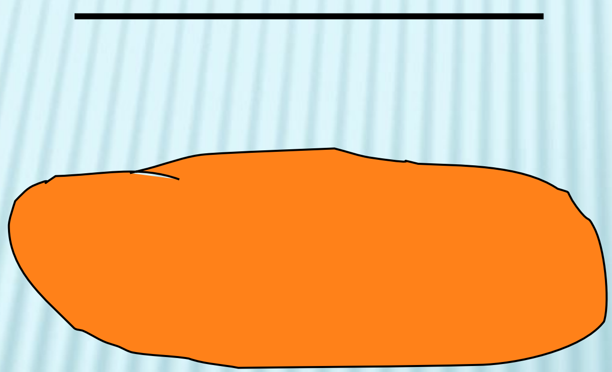
Параллельность в пространстве

Параллельность прямых



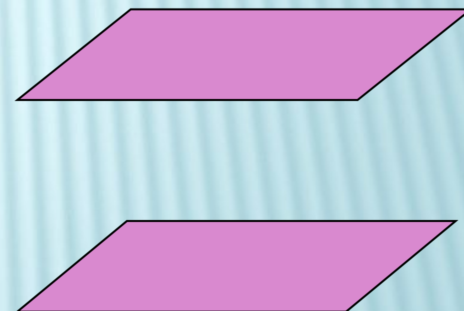
Прямые не пересекаются и лежат в одной плоскости

Параллельность прямой и плоскости



Прямая и плоскость не имеют общих точек

Параллельность плоскостей

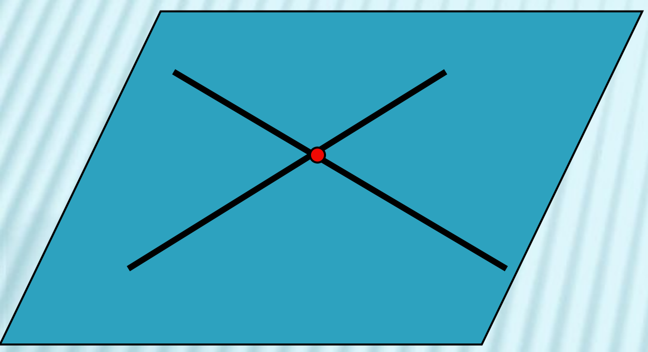


Плоскости не имеют общих точек

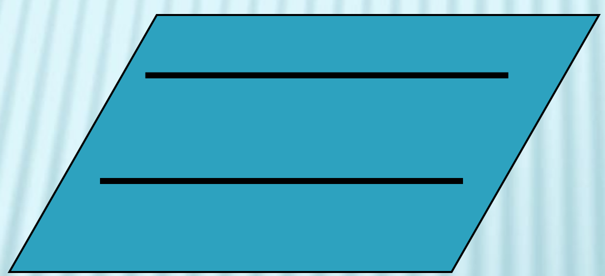
прямые в пространстве

Имеют общие точки

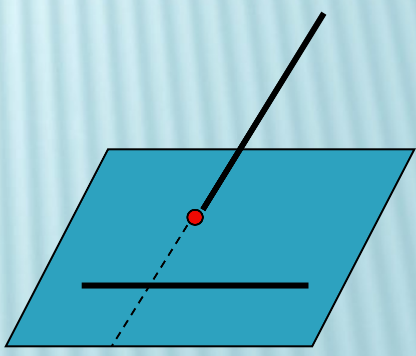
Не имеют общих точек



пересекаются



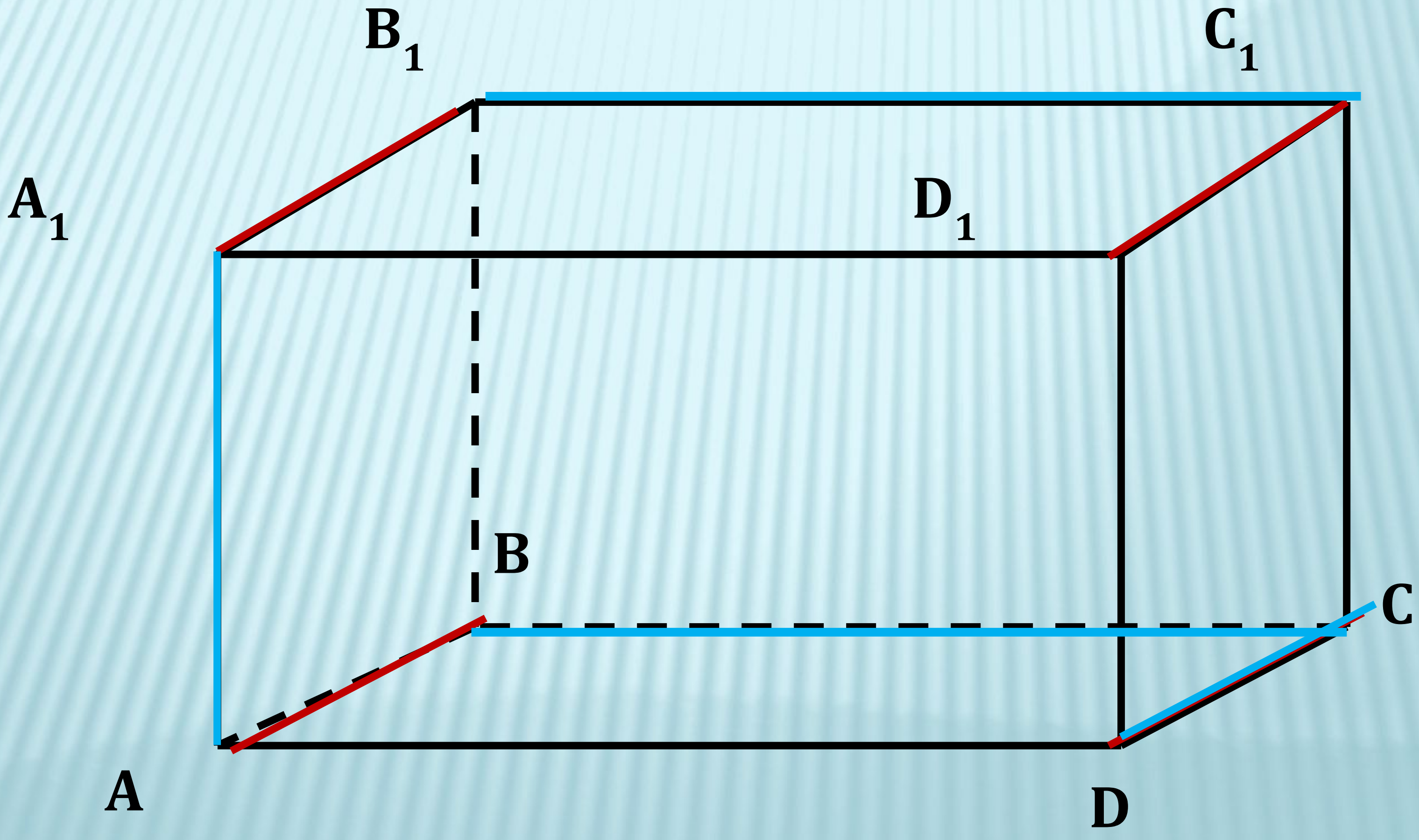
параллельны



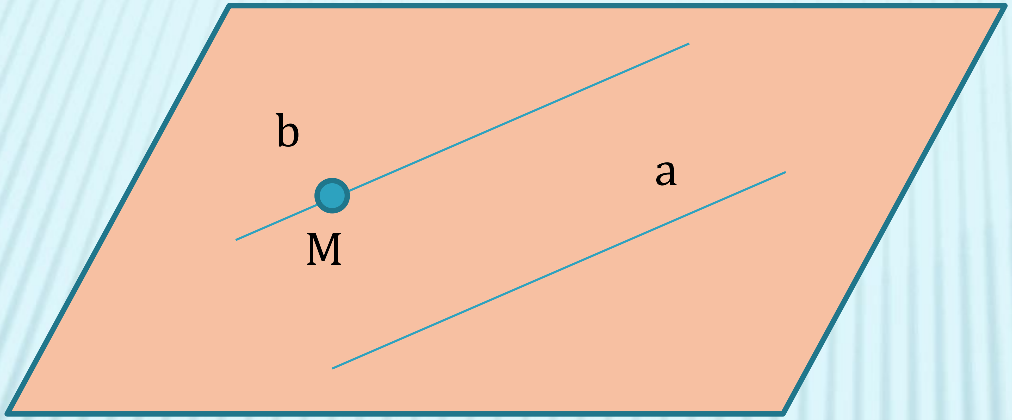
скрещиваются

Определение: Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются

Определение: Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости и не пересекаются



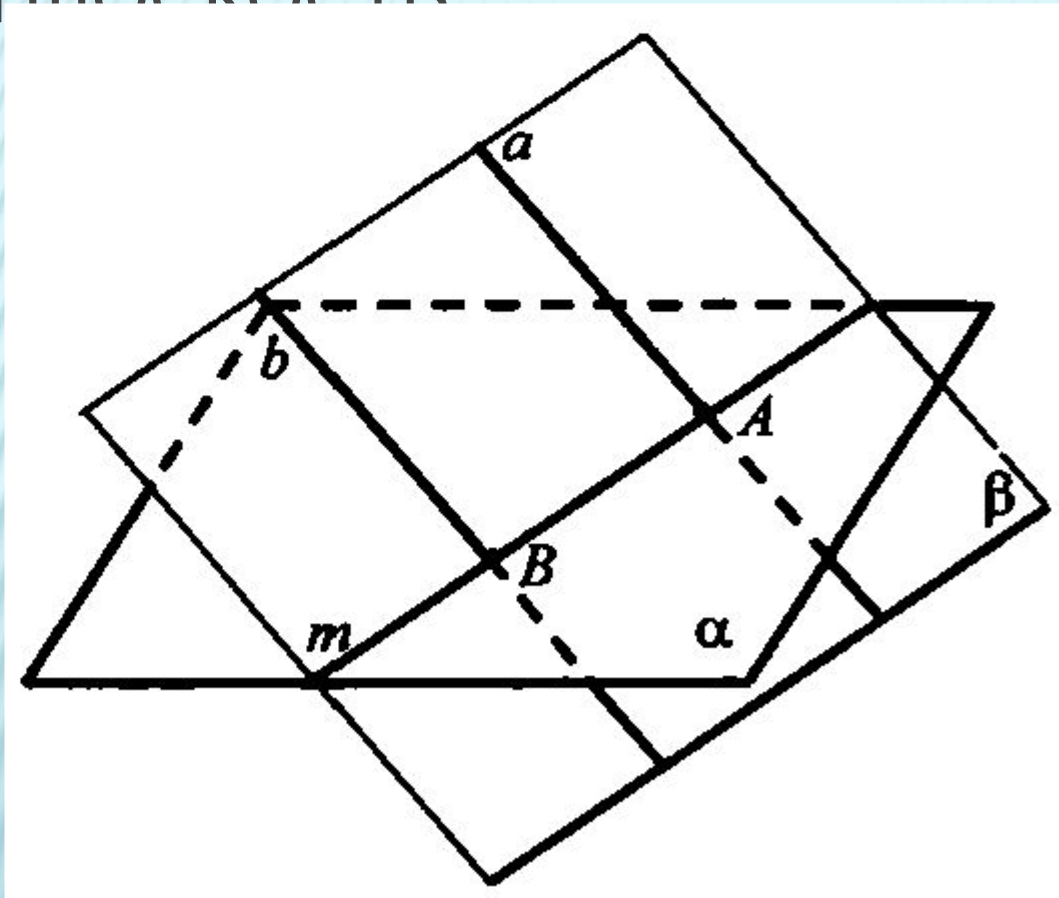
Теорема 1: Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая параллельная данной, и притом только одна



Дано: a, M∉a
Доказать:
∃!b: M∈b, a||b

- **Доказательство:**
- **1.** Через данную прямую a и точку M, которая не лежит на прямой, проводится плоскость α.
- **2.** Такая плоскость только одна (т.к. через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну).
- **3.** А в плоскости α через точку M можно провести только одну прямую b, которая параллельна прямой a.

Лемма: Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пресекает эту плоскость



Дано: α, a||b, b∩α=B
Доказать: a∩α

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Рассмотрим две параллельные прямые a и b и допустим, что прямая b пересекает плоскость α в точке В.

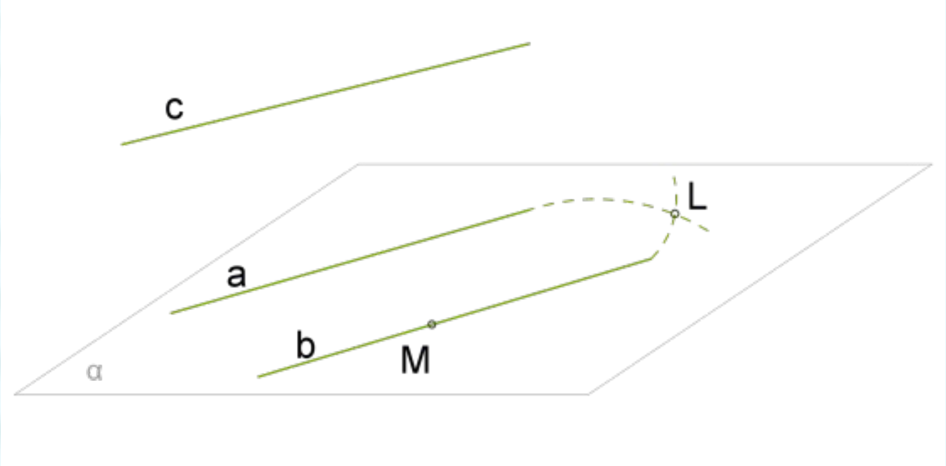
Через 2 параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну. Проведем через прямые a и b плоскость β.

Так как точка В находится на прямой b, то В также принадлежит плоскости β. Если у плоскостей α и β есть общая точка В, то у этих плоскостей есть общая прямая m, которая является прямой пересечения этих плоскостей (3 аксиома).

Прямые a, b и m находятся в плоскости β.
Если в этой плоскости одна из параллельных прямых b пересекает прямую m, то вторая прямая a тоже пересекает m.

Точку пересечения прямых a и m обозначим за A.
Так как точка A находится на прямой m, то A находится в плоскости α и является единственной общей точкой прямой a и плоскости α.
Значит, прямая a пересекает плоскость α в точке A.

ТЕОРЕМА 2 (ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ): ЕСЛИ ДВЕ ПРЯМЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ ТРЕТЬЕЙ ПРЯМОЙ, ТО ОНИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ



Дано: a||c, b||c

Доказать: a||b

Доказательство:

Выберем точку M на прямой b.

Через точку M и прямую a, которая не содержит эту точку, можно провести только одну плоскость α (Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести только одну плоскость).

Возможны два случая:

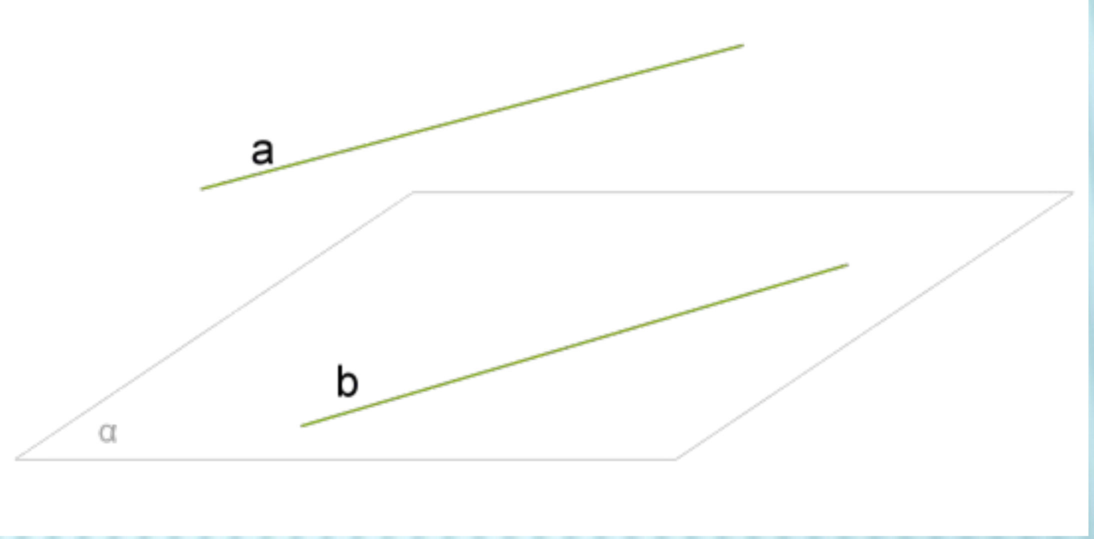
1) прямая b пересекает плоскость α,
2) прямая b находится в плоскости α.

Пусть прямая b **пересекает плоскость** α**.**
Значит, прямая c, которая параллельна прямой b, тоже пересекает плоскость α. Так как a // c, то получается, что a тоже пересекает эту плоскость. Но прямая a не может одновременно пересекать плоскость α и находиться в плоскости α. Получаем противоречие, следовательно, предположение, что прямая b пересекает плоскость α, является **неверным**.
Значит, прямая b **находится в плоскости** α**.**

Теперь нужно доказать, что прямые a и b параллельны.
Пусть у прямых a и b есть общая точка L.
Это означает, что через точку L проведены две прямые a и b, которые параллельны прямой c. Но по второй теореме это невозможно. Поэтому предположение неверное, и прямые a и b не имеют общих точек.
Так как прямые a и b находятся в одной плоскости α и у них нет общих точек, то они параллельны.

ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ:

ЕСЛИ ПРЯМАЯ, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩАЯ ПЛОСКОСТИ, ПАРАЛЛЕЛЬНА КАКОЙ-ЛИБО ПРЯМОЙ, ЛЕЖАЩЕЙ В ЭТОЙ ПЛОСКОСТИ, ТО ОНА ПАРАЛЛЕЛЬНА ДАННОЙ ПЛОСКОСТИ.

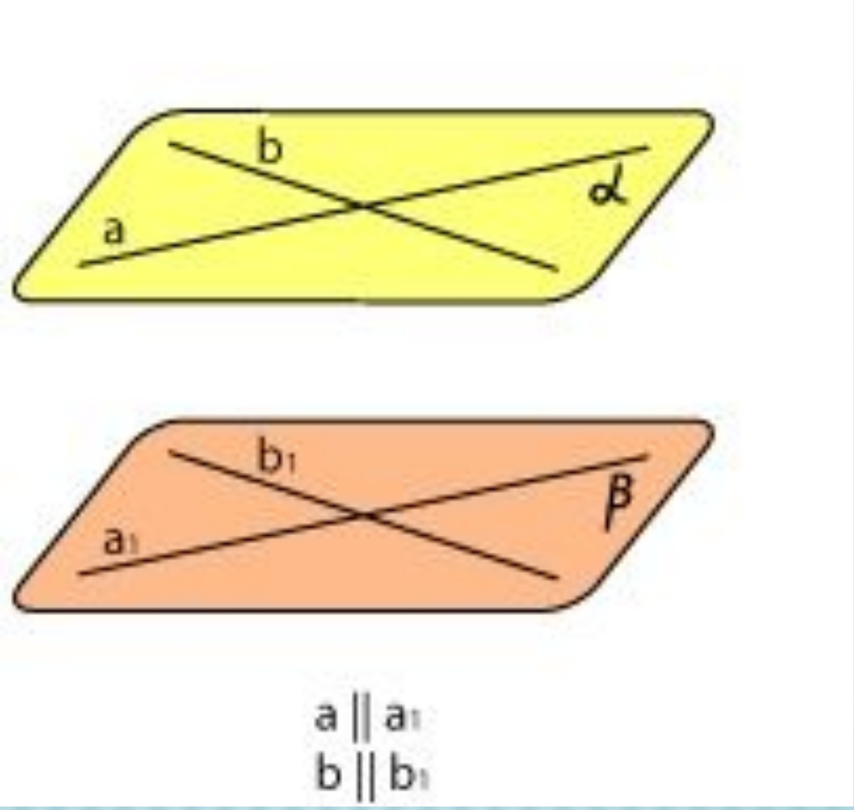


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Доказательство проведем от противного. Пусть a не параллельна плоскости α, тогда прямая a пересекает плоскость в некоторой точке A. Причем A не находится на b, так как a // b. Согласно признаку скрещивающихся прямых, прямые a и b скрещивающиеся. Мы пришли к противоречию. Так как согласно данной информации a // b, они не могут быть скрещивающимися. Значит прямая a должна быть параллельна плоскости α.

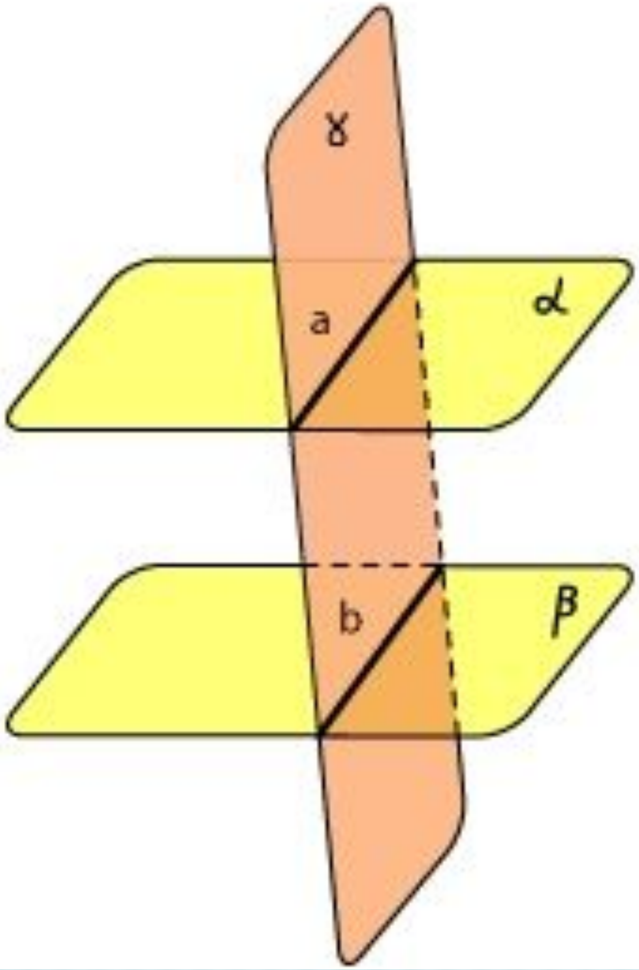
ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ:

ЕСЛИ ДВЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ, ЛЕЖАЩИЕ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ, СООТВЕТСТВЕННО ПАРАЛЛЕЛЬНЫ ДВУМ ПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ПРЯМЫМ, ЛЕЖАЩИМ В ДРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ТО ЭТИ ПЛОСКОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ ДРУГ ДРУГУ.



СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ:

ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ТРЕТЬЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ.

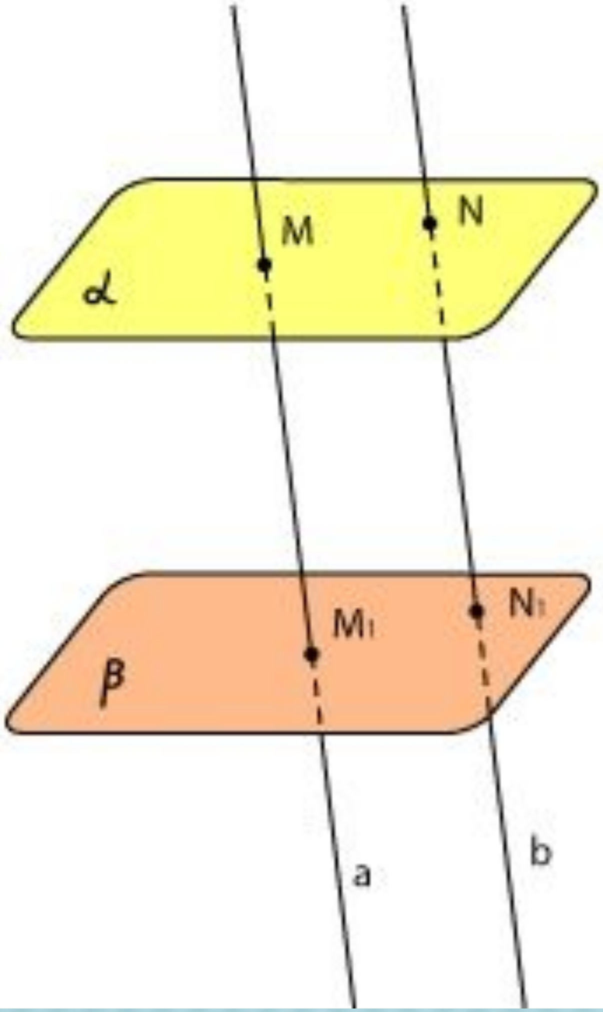


$$\left.\begin{array}{l} \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \\ \alpha \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны

Свойства параллельных плоскостей

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \\ a \parallel b\end{array}\right\} \Rightarrow MM_1 = NN_1$$

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны

Задача 1: Укажите модели параллельных плоскостей на предметах классной обстановки.

Задача 2:Одна сторона параллелограмма пересекает плоскость. Докажите, что прямая, которая содержит противоположную сторону параллелограмма, тоже пересекает эту плоскость.

Задача 3: Докажите, что если прямые AB и CD скрещиваются, то и прямые AC и BD тоже скрещиваются.

Домашнее задание:

1. Доказать: признак параллельности двух плоскостей.
2. Доказать: свойства параллельных плоскостей.
3. Задача. Точка М не лежит в плоскости прямоугольника ABCD. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости ABM.
4. Точка С лежит на отрезке АВ. Через точку А проведена плоскость, а через точки В и С – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках В1 и С1. Найдите длину отрезка СС1, если точка С – середина отрезка АВ, а ВВ1=7см.