МАТЕМАТИКА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Наталья Владимировна Крупина

Москва, 2021

Уравнения, решаемые разложением левой части

Задача 9 Решить уравнение $\sin 2x - \sin x = 0$.

► Используя формулу синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде $2\sin x \cos x - \sin x = 0$. Вынося общий множитель $\sin x$ за скобки, получаем $\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

2) $2\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ $x = \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. ◁

Уравнения, решаемые разложением левой части

Задача 10 Решить уравнение $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

▶ Используя формулу приведения $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, запишем уравнение в виде $\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$.

Используя формулу суммы косинусов, получаем

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Уравнения, решаемые разложением левой части

Задача 11 Решить уравнение $\sin 7x + \sin 3x = 3\cos 2x$.

► Применяя формулу для суммы синусов, запишем уравнение в виде

$$2\sin 5x\cos 2x = 3\cos 2x,$$

$$2\sin 5x\cos 2x - 3\cos 2x = 0,$$

откуда $\cos 2x\left(\sin 5x - \frac{3}{2}\right) = 0.$

Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, а уравнение $\sin 5x = \frac{3}{2}$ не имеет корней.

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. ◁

Уравнения, решаемые разложением левой части

Задача 12 Решить уравнение $\cos 3x \cos x = \cos 2x$.

▶ $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$,
поэтому уравнение примет вид $\sin x \sin 3x = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

2) $\sin 3x = 0$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Заметим, что числа πn содержатся среди чисел вида $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$, так как если $n = 3k$, то $\frac{\pi n}{3} = \pi k$.
Следовательно, первая серия корней содержится во второй.

Ответ $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. ◁

Уравнения, решаемые разложением левой части

Иногда при решении тригонометрических уравнений ответ записывают в виде серий корней, имеющих общую часть.

Например, для уравнения $\cos 3x \sin 2x = 0$ ответ можно записать в виде двух серий корней:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \ x = \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z.$$

Так как все корни уравнения $\cos x = 0$ являются корнями уравнения $\cos 3x = 0$, то ответ можно записать в виде двух непересекающихся серий:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \ x = \pi n, \ n \in Z.$$

Уравнения, решаемые разложением левой части

Задача 13* Решить уравнение $(\operatorname{tg} x+1)\left(2\cos\frac{x}{3}-\sqrt{3}\right)=0$.

▶ 1) $\operatorname{tg} x+1=0$, $\operatorname{tg} x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Эти значения x являются корнями исходного уравнения, так как при этом первый множитель левой части равен нулю, а второй не теряет смысла.

2) $2\cos\frac{x}{3}-\sqrt{3}=0$, $\cos\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$,

$x=\pm\frac{\pi}{2}+6\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

При этих значениях x второй множитель левой части исходного уравнения равен нулю, а первый не имеет смысла. Поэтому эти значения не являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. ◁

Уравнения, решаемые разложением левой части

Задача 14* Решить уравнение $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

▶ Выразим $\sin^2 x$ через $\cos 2x$. Так как $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, то $\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, откуда $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Поэтому исходное уравнение можно записать так:

$$3(1 - \cos 2x) + 2(1 - \cos^2 2x) = 5,$$

или $2\cos^2 2x + 3\cos 2x = 0$, откуда

$$\cos 2x(2\cos 2x + 3) = 0.$$

1) $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

2) уравнение $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ корней не имеет.

Уравнения, решаемые разложением левой части

Задача 15* Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

▶ Складывая уравнения данной системы и вычитая из второго уравнения первое, получаем равносильную систему $\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0, \\ \cos x \sin y - \sin x \cos y = 1, \end{cases}$

откуда $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(y-x) = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = \pi n, \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Решая последнюю систему, находим

$$x = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi k = \pi\left(\frac{n}{2} - k - \frac{1}{4}\right),$$

$$y = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k = \pi\left(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{4}\right).$$

Ответ $\left(\pi\left(\frac{n}{2} - k - \frac{1}{4}\right); \pi\left(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{4}\right)\right)$, $n, k \in \mathbf{Z}$. ◁

Уравнения, решаемые разложением левой части

Упражнения

Решить уравнение (620—644).

620 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

3) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; 4) $2\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$.

621 1) $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$; 2) $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;

3) $4\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$; 4) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

622 1) $\operatorname{tg}^2 x = 2$; 2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$;

3) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

623 1) $1 + 7\cos^2 x = 3\sin 2x$; 2) $3 + \sin 2x = 4\sin^2 x$;

3) $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$;

4) $3\cos 2x + \sin^2 x + 5\sin x \cos x = 0$.

624 1) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$; 2) $\cos x = \sin x$;

3) $\sin x = 2\cos x$; 4) $2\sin x + \cos x = 0$.

625 1) $\sin x - \cos x = 1$; 2) $\sin x + \cos x = 1$;

3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$; 4) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

Уравнения, решаемые разложением левой части

626 1) $\cos x = \cos 3x$; 2) $\sin 5x = \sin x$;
3) $\sin 2x = \cos 3x$; 4) $\sin x + \cos 3x = 0$.

627 1) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$; 2) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$;
3) $\cos x + \cos 3x = 4 \cos 2x$; 4) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$.

628 1) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})\left(2 \sin \frac{x}{12} + 1\right) = 0$;

2) $\left(1 - \sqrt{2} \cos \frac{x}{4}\right)(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x) = 0$;

3) $\left(2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2 \operatorname{tg} x + 1) = 0$;

4) $\left(1 + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)(\operatorname{tg} x - 3) = 0$.

629 1) $\sqrt{3} \sin x \cos x = \sin^2 x$; 2) $2 \sin x \cos x = \cos x$;
3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; 4) $\sin 2x + 2 \cos^2 x = 0$.

630 1) $2 \sin^2 x = 1 + \frac{1}{3} \sin 4x$; 2) $2 \cos^2 2x - 1 = \sin 4x$;
3) $2 \cos^2 2x + 3 \cos^2 x = 2$; 4) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$.

631 1) $2 \sin 2x - 3 (\sin x + \cos x) + 2 = 0$;
2) $\sin 2x + 3 = 3 \sin x + 3 \cos x$;
3) $\sin 2x + 4 (\sin x + \cos x) + 4 = 0$;
4) $\sin 2x + 5 (\cos x + \sin x + 1) = 0$.

Уравнения, решаемые разложением левой части

632 1) $1-\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=0$;

2) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(\sin x+\cos x)^2$.

633 1) $4\sin x\cos x\cos 2x=\sin^2 4x$; 2) $1+\cos^2 x=\sin^4 x$.

634 1) $2\cos^2 2x+3\sin 4x+4\sin^2 2x=0$;

2) $1-\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$;

3) $2\sin^2 x+\frac{1}{4}\cos^3 2x=1$; 4) $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1+4\sin x$.

635 1) $\cos x\cos 2x=\sin x\sin 2x$; 2) $\sin 2x\cos x=\cos 2x\sin x$;

3) $\sin 3x=\sin 2x\cos x$; 4) $\cos 5x\cos x=\cos 4x$.

636 1) $4\sin^2 x-5\sin x\cos x-6\cos^2 x=0$;

2) $3\sin^2 x-7\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$;

3) $1-4\sin x\cos x+4\cos^2 x=0$; 4) $1+\sin^2 x=2\sin x\cos x$.

637 1) $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0$;

2) $6\cos 2x\sin x+7\sin 2x=0$.

638 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$;

2) $\sin x(1-\cos x)^2+\cos x(1-\sin x)^2=2$.

Уравнения, решаемые разложением левой части

639 1) $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

640 1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$; 2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$.

641 1) $\frac{\cos 2x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos 2x} = 1$; 2) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$.

642 1) $\sin x \sin 5x = 1$; 2) $\sin x \cos 4x = -1$.

643 1) $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2 \sin x$; 2) $\sqrt{\cos x + \cos 3x} = -\sqrt{2} \cos x$.

644 1) $4\,|\cos x| + 3 = 4 \sin^2 x$; 2) $|\operatorname{tg} x| + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

645 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \cos(x+y) = 0, \\ \cos(x-y) = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$