

## Лекция № 14, 15, 16.

# Тема: РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКТОВ МАШИН

1. Постановка задачи и выбор критерия оптимизации.

Пусть имеется четыре комплекта машин  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ( $m = 4$ ) и подлежат строительству четыре объекта  $B_1, B_2, B_3, B_4$  ( $n = 4$ )

Известны годовая выработка каждого комплекта машин  $P_i$ , годовым объемом работ на объектах -  $Y_j$  и стоимость единицы объема работ -  $C_{ij}$ , каждой машины на каждом объекте.

Требуется так расставить комплекты машин по строящимся объектам чтобы суммарные затраты были **минимальны**.

# Матрица исходных данных

Табл. 1.

Комплект машин	Стоимость единицы объема работ- $C_{ij}$ при выполнении работ по объектам строительства - $B_j$				Годовая выработка машин, $P_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
A1	70	38	24	92	14
A2	58	18	56	72	20
A3	19	10	100	30	26
A4	3	36	121	8	41
Годовой объем работ, $Y_j$	30	22	15	34	101

- Объем работ, выполняемый  $i$  комплектом машин на  $J$  объекте обозначим через  $X_{ij}$ . Значения  $X_{ij}$  в дальнейшем будем проставлять в правых углах клетки таблиц.

### Основные закономерности.

- 1. Годовой объем выработки всех комплектов машин равен общему объему работ на всех объектах.

$$\sum_{i=1}^m \Pi_i = \sum_{j=1}^n Y_j \quad (m = 4; \quad n = 4)$$

## 2. Построение математической модели.

Критерий оптимизации - суммарные затраты на выполнение всех работ можно записать так:

$$\begin{aligned} Y &= C_{11} \cdot X_{11} + \dots + C_{ij} \cdot X_{ij} + \dots + C_{mn} \cdot X_{mn} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot X_{ij} \longrightarrow \min \end{aligned}$$

Таким образом, задача свелась к нахождению таких значений переменных, которые удовлетворяют вышеперечисленному равенству и минимизируют суммарные затраты на выполнение всего объема работ.

Решение математической модели, как правило, разбивается на два этапа.

На первом этапе находят какое-нибудь решение хотя и далекое от оптимального, но удовлетворяющее совокупности линейных равенств или убеждаются в том, что решения не существует. Этот этап называется отысканием опорного плана.

(6 способов)



- На втором этапе производится последовательное улучшение опорного плана по определенным правилам до тех пор, пока дальнейшее улучшение станет невозможным.
- От того каким будет опорный план, зависит время решения распределительной задачи на втором этапе.
- Существует много способов построения опорного плана, рассмотрим наиболее употребительные в порядке повышения их эффективности в нашем примере.

- **1. СПОСОБ СЕВЕРО - ЗАПАДНОГО УГЛА.**

Часто применяется при решении задач, но он приводит к плану весьма далекому от оптимального.

- Построение опорного плана, т.е. распределение объемов работ начинается с клетки расположенной в левом верхнем углу таблицы 2 (северо - западном).
- Сначала выполняют работы на первом объекте (правая часть клетки) насколько возможно, затем на втором и т. д. по строкам.
- При этом способе объемы работ располагаются, начиная от левого верхнего угла матрицы и кончая нижним правым углом.



Таблица 2. (до заполнения)

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - $C_{ij}$ по объектам строительства - $B_j$								Годовая выработка машин, $P_i$
	B1		B2		B3		B4		
A1	70		38		24		92		14
A2	58		18		56		72		20
A3	19		10		100		30		26
A4	3		36		121		8		41
Годовой объем работ, $\sum_j$	30		22		15		34		101



Таблица 2. (после заполнения)

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - $C_{ij}$ по объектам строительства - $B_j$								Годовая выработка машин, $P_i$
	B1		B2		B3		B4		
A1	70	14	38		24		92		14
A2	58	16	18	4	56		72		20
A3	19		10	18	100	8	30		26
A4	3		36		121	7	8	34	41
Годовой объем работ, $\sum_j$	30		22		15		34		101

## 1. СПОСОБ СЕВЕРО - ЗАПАДНОГО УГЛА.

- В результате построения опорного плана данным способом значение целевой функции будет равно:
- $Y = 70 \cdot 14 + 58 \cdot 16 + 18 \cdot 4 + 10 \cdot 18 + 100 \cdot 8 + 121 \cdot 7 + 8 \cdot 34 = 4079$



## 2. СПОСОБ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В СТОЛБЦЕ.

- Поочередно в столбцах матрицы находится клетка с минимальным элементом затрат, куда и вносится максимально-возможный объем работ ( в столбце - В1 клетка - А4 В1 имеет наименьшее значение - 3 куда вносим объем работ - 30 ). Таблица - 3.
- Если объемы работ по столбцу не выполнены, то находится другая клетка в этом столбце с наименьшим элементом, куда и вносится оставшийся объем работ и так до выполнения всего объема работ по столбцу.

Далее переходят к следующему столбцу и т.д.



## 2. СПОСОБ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В СТОЛБЦЕ.

Таблица 3. (До заполнения)

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - $C_{ij}$ по объектам строительства $B_j$								Годовая выработка машин, $P_i$
	$B_1$		$B_2$		$B_3$		$B_4$		
A1	70		38		24		92		14
A2	58		18		56		72		20
A3	19		10		100		30		26
A4	3		36		121		8		41
Годовой объем работ, $\sum_j$	30		22		15		34		101

## 2. СПОСОБ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В СТОЛБЦЕ.

Таблица 3. (после заполнения)

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - $C_{ij}$ по объектам строительства $B_j$								Годовая выработка машин, $P_i$
	$B_1$		$B_2$		$B_3$		$B_4$		
A1	70		38		24	14	92		14
A2	58		18		56	1	72	19	20
A3	19		10	22	100		30	4	26
A4	3	30	36		121		8	11	41
Годовой объем работ, $\sum_j$	30		22		15		34		101

## 2. СПОСОБ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В СТОЛБЦЕ.

- В результате целевая функция будет равна :

$$Y = 24 \cdot 14 + 56 \cdot 1 + 72 \cdot 19 + 10 \cdot 22 + 30 \cdot 4 + 3 \cdot 30 + 8 \cdot 11 = \mathbf{2278}.$$



### 3. СПОСОБ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В СТРОКЕ. Аналогичен рассмотренному в той же последовательности, но для строк.

Таблица 4. (до заполнения)

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - $C_{ij}$ по объектам строительства $B_j$								Годовая выработка машин, $P_i$
	B1		B2		B3		B4		
A1	70		38		24		92		14
A2	58		18		56		72		20
A3	19		10		100		30		26
A4	3		36		121		8		41
Годовой объем работ, $Y_j$	30		22		15		34		101

3. СПОСОБ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В СТРОКЕ. Аналогичен рассмотренному в той же последовательности, но для строк.

Таблица 4. (после заполнения)

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - $C_{ij}$ по объектам строительства $B_j$								Годовая выработка машин, $P_i$
	B1		B2		B3		B4		
A1	70		38		24	14	92		14
A2	58		18	20	56		72		20
A3	19	24	10	2	100		30		26
A4	3	6	36		121	1	8	34	41
Годовой объем работ, $Y_j$	30		22		15		34		101



### 3. СПОСОБ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В СТРОКЕ.

- Целевая функция  $Y = 14 \cdot 24 + 18 \cdot 20 + 19 \cdot 24 + 10 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 121 \cdot 1 + 8 \cdot 34 = 336 + 360 + 456 + 20 + 18 + 121 + 272 = 1583$



#### 4. СПОСОБ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В МАТРИЦЕ.

- Этот способ дает, как правило, лучшие результаты, особенно в крупных матрицах, но его использование требует большего времени и внимания.
- В матрице стоимостей таблица 5. ищется клетка с минимальным элементом (  $A_4 B_1$  ) в которую помещается максимально-возможный объем работ (в нашем случае - 30). Затем ищутся клетки со следующими минимальными стоимостными элементами, куда и помещается оставшийся объем работ и т. д.  
табл. 5
- Целевая функция  $Y = 24 \cdot 14 + 56 \cdot 1 + 72 \cdot 19 + 10 \cdot 22 + 30 \cdot 4 + 3 \cdot 30 + 8 \cdot 11 = 2278$ .

Таблица 5

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - С <sub>ij</sub> по объектам строительства - В <sub>l</sub>								Годовая выработка машин, П <sub>i</sub>
	В1		В2		В3		В4		
А1	70		38		24 <sub>4</sub>	14	92		14
А2	58		18		56 <sub>6</sub>	1	72 <sub>7</sub>	19	20
А3	19		10 <sub>3</sub>	22	100		30 <sub>5</sub>	4	26
А4	3 <sub>1</sub>	30	36		12		8 <sub>2</sub>	11	41
Годовой объем работ, У <sub>l</sub>	30		22		15		34		101

## 5. СПОСОБ ДВОЙНОГО ПРЕДПОЧТЕНИЯ

- Очень удобен при решении распределительных задач вручную и может дать наилучшие результаты.
- В матрице затрат (табл. 6 ) находится клетка с минимальным элементом в каждой строке. Клетки, имеющие минимальные элементы, отмечаем звездочкой.
- Затем ищем клетки с минимальными затратами в столбцах и помечаем звездочками. В клетки, имеющие две звездочки, размещаем максимально возможные объемы работ. Затем, в клетки, помеченные одной звездочкой, размещаем оставшиеся объемы работ.
- Если объемы работ не размещены полностью на этом этапе, то ищутся клетки, не помеченные звездочкой, но с наименьшими значениями, куда и вносится оставшийся объем работ.



Таблица 6.

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - С <sub>ij</sub> по объектам строительства В <sub>j</sub>								Годовая выработка машин, П <sub>i</sub>
	В1		В2		В3		В4		
А1	70		38		24		92		14
А2	58		18		56		72		20
А3	19		10		100		30		26
А4	3		36		121		8		41
Годовой объем работ, У <sub>j</sub>	30		22		15		34		101

Таблица 6.

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - С <sub>ij</sub> по объектам строительства В <sub>j</sub>								Годовая выработка машин, П <sub>i</sub>
	В1		В2		В3		В4		
А1	70		38		24 **		92		14
А2	58		18 *		56		72		20
А3	19		10 **		100		30		26
А4	3 **		36		121		8 *		41
Годовой объем работ, У <sub>j</sub>	30		22		15		34		101

Таблица 6.

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - С <sub>ij</sub> по объектам строительства В <sub>j</sub>								Годовая выработка машин, П <sub>i</sub>
	В1		В2		В3		В4		
А1	70		38		24 **	14	92		14
А2	58		18 *		56	1	72	19	20
А3	19		10 **	22	100		30	4	26
А4	3 **	30	36		121		8 *	11	41
Годовой объем работ, У <sub>j</sub>	30		22		15		34		101

## 5. СПОСОБ ДВОЙНОГО ПРЕДПОЧТЕНИЯ

В результате построения опорного плана способом двойного предпочтения целевая функция будет равна:

$$\begin{aligned} Y &= 3 \cdot 30 + 10 \cdot 22 + 24 \cdot 14 + 56 \cdot 1 \\ &+ 72 \cdot 19 + 30 \cdot 4 + 8 \cdot 11 = \\ &90 + 220 + 336 + 56 + \\ &1368 + 120 + 88 = 2278. \end{aligned}$$



## 6. СПОСОБ АППРОКСИМАЦИИ ФОГЕЛЯ

- В большинстве случаев дает опорный план самый близкий к оптимальному. Поэтому его рекомендуют использовать при расчетах вручную по матрицам большого размера. При данном способе, ищутся разности в каждой строке и в каждом столбце матрицы (таблица 7) между наименьшей и ближайшей к ней по величине затрат.
- Разности по строкам записываются справа в столбце разностей, разности по столбцам - в строке разностей (внизу). В нашем случае для строки А 1 разность  $(A1 B2 - A1/B3) - 38 - 24 = 14$  и т.д. После проведения расчетов по столбцу и строке выбирают максимальную разность и выделяют ее ( 38 ). В строке (или столбце), где помечена максимальная разность, находится наименьшее значение затрат, куда и вносится максимально-возможный объем работ. Табл. 7А
- В нашем случае в строке - А2 клетка- А2В2 размещаем объем работ равный 20. т.е, всей годовой выработке комплекта машин А2. Поскольку годовая выработка комплекта машин А2 исчерпана, строку А2 исключаем из дальнейших расчетов, для чего отметим все клетки этой строки звездочками. Табл. 7Б



- После этого снова вычисляем разности по столбцам и строкам, не принимая во внимание приведенные затраты, имеющие объемы работ и помеченные звездочками.
- Во втором расчетном случае (по второй строке и столбцу разностей наибольшее значение разности - ( $B3=76$ ), по столбцу  $B3$  ищем наименьшее значение приведенных затрат (клетка  $A1B3 = 24$ ) в которую помещаем объем работ равный 14. и выводим из дальнейших расчетов строку  $A1$ . помечая звездочками клетки соответствующей строки.
- Таким образом, проводим все расчеты до полного распределения объема работ по клеткам матрицы, что соответствует распределению машин по объектам строительства с указанным объемом работ на каждом объекте табл. 7 см. на сл. странице.







Таблица 7Б

Комплек т машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - С <sub>ij</sub> по объектам строительства - В <sub>j</sub>								Годов ая выр, П <sub>i</sub>	Столбец разностей						
	В1		В2		В3		В4									
А1	70		38		24		92		14	14						
А2	58	*	18	20	56	*	72	*	20	38	-	-	-	-	-	
А3	19		10		100		30		26	9						
А4	3		36		121		8		41	5						
Годовой объем работ, У <sub>j</sub>	30		22		15		34		101							
Строки разно- стей	16		8		32		22									

- Приступаем к заполнению 2-й строки и 2-го столбца



Таблица 7Б

Комплек т машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - С <sub>ij</sub> по объектам строительства - В <sub>j</sub>								Годов ая выр, П <sub>i</sub>	Столбец разностей						
	В1		В2		В3		В4									
А1	70		38		24		92		14	14						
А2	58	*	18	20	56	*	72	*	20	38	-	-	-	-	-	
А3	19		10		100		30		26	9						
А4	3		36		121		8		41	5						
Годовой объем работ, У <sub>j</sub>	30		22		15		34		101							
Строки разно- стей	16		8		32		22									

Таблица 8

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ - С <sub>ij</sub> по объектам строительства - В <sub>j</sub>								Годовая выр, П <sub>i</sub>	Столбец разностей					
	В1		В2		В3		В4								
А1	70	*	38	*	24	14	92	*	14	14	14	-	-	-	-
А2	58	*	18	20	56	*	72	*	20	38	-	-	-	-	-
А3	19	23	10	2	100	1	30	*	26	9	9	9	21	81	81
А4	3	7	36	*	121	*	8	34	41	5	5	5	5	118	-
Годовой объем работ, У <sub>j</sub>	30		22		15		34		101						
Строки разностей	16		8		32		22								
	16		26		76		22								
	16		26		21		22								
	16		-		21		22								
	16		-		21		-								
	19		-		100		-								



## 6. СПОСОБ АППРОКСИМАЦИИ ФОГЕЛЯ

Окончательно целевая функция равна:

$$Y = 24 \cdot 14 + 18 \cdot 20 + 19 \cdot 23 + 10 \cdot 2 + 100 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 8 \cdot 34 = 336 + 360 + 437 + 20 + 100 + 21 + 272 = 1546$$

- В качестве опорного (начального) плана для дальнейшего решения нашей задачи выберем наиболее удачный (имеющий наименьшее значение целевой функции  $Y - 1546$ ) т. е. способ аппроксимации Фогеля. Табл.8



- После этого переходим ко второму этапу решения распределительной задачи.
- На втором этапе производится дальнейшее улучшение опорного плана. В настоящее время существует несколько методов последовательного улучшения опорного плана. К наиболее распространенным относятся:

Распределительный метод

Метод потенциалов и другие.

- Основой вычислительного процесса (алгоритма) этих методов является определение критерия оптимальности

$$P_{ij} = C_{ij} - K_{ij}$$

- где :  $C_{ij}$  - затраты связанные с выполнением единицы объема работ  $i$  комплектом машин на  $J$  объекте.

$K_{ij}$  - расчетные затраты, связанные с выполнением единицы объема работ  $i$  комплектом машин на  $J$  объекте, определяемые для клеток, в которые не распределены объемы работ.

- Если все  $P_{ij} \geq 0$ , то данный опорный план оптимален, если нет, то с помощью этого критерия можно указать способ улучшения данного опорного плана. Для этого необходимо:
- Составить и решить систему уравнений с некоторыми переменными

$$U_j - P_i = C_{ij}$$

- При этом использовать те индексы  $ij$  на пересечении которых в соответствующих клетках распределены объемы работ.



- Для нашей задачи система уравнений будет выглядеть так :

$$У3 - П1 = 24$$

$$У2 - П2 = 18$$

$$У1 - П3 = 19$$

$$У2 - П3 = 10$$

$$У3 - П3 = 100$$

$$У1 - П4 = 3$$

$$У4 - П4 = 8$$

Имеем 7 уравнений и 8 неизвестных, поэтому одному из неизвестных желательно наиболее часто встречающемуся в уравнениях, дать произвольное значение, как правило, для облегчения счета равное нулю,

В нашей системе уравнений наиболее часто встречающееся неизвестное – П 3. Положим П 3 = 0.



Решая последовательно соответствующие уравнения, получим:

$$y_3 - p_1 = 24,$$

$$y_1 = 19$$

$$p_1 = 76$$

$$y_2 - p_2 = 18,$$

$$y_2 = 10$$

$$p_2 = -8$$

$$y_1 - 0 = 19,$$

$$y_3 = 100$$

$$p_3 = 0$$

$$y_2 - 0 = 10,$$

$$y_4 = 24$$

$$p_4 = 16$$

$$y_3 - 0 = 100,$$

$$y_1 - p_4 = 3,$$

$$y_4 - p_4 = 8.$$



- 2. Определить значения
- $K_{ij} = Y_j - P_i$
- При этом используются те индексы, на пересечении которых в соответствующих клетках не распределены объемы работ:

$$K_{11} = Y_1 - P_1 = 19 - 76 = -57$$

$$K_{12} = Y_2 - P_1 = 10 - 76 = -66$$

$$K_{14} = Y_4 - P_1 = 24 - 76 = -52$$

$$K_{21} = Y_1 - P_2 = 19 + 8 = 27$$

$$K_{23} = Y_3 - P_2 = 100 + 8 = 108$$

$$K_{24} = Y_4 - P_2 = 24 + 8 = 32$$

$$K_{34} = Y_4 - P_3 = 24 - 0 = 24$$

$$K_{42} = Y_2 - P_4 = 10 - 16 = -6$$

$$K_{43} = Y_3 - P_4 = 100 - 16 = 84$$

- 3. Определить значения

$$P_{ij} = C_{ij} - K_{ij}$$

и проверить условие оптимальности, если все  $P_{ij} \geq 0$ , то исходный план оптимален, Если некоторые  $P < 0$ , то переходят к новому опорному плану.

- $P_{11} = C_{11} - K_{11} = 70 + 57 = 127$

- $P_{12} = C_{12} - K_{12} = 38 + 66 = 104$

- $P_{14} = C_{14} - K_{14} = 92 + 52 = 144$

- $P_{21} = C_{21} - K_{21} = 58 + 27 = 31$

- $P_{23} = C_{23} - K_{23} = 56 - 108 = - 52$

- $P_{24} = C_{24} - K_{24} = 72 - 32 = 40$

- $P_{34} = C_{34} - K_{34} = 30 - 24 = 6$

- $P_{42} = C_{42} - K_{42} = 36 + 6 = 42$

- $P_{43} = C_{43} - K_{43} = 121 - 84 = 37$

- В нашем случае  $P_{23} < 0$  - переходим к новому опорному плану.



- 4. Построить новый опорный план, которому отвечает меньшее значение целевой функции. Для чего в опорный план вводится переменная  $X_{ij}$ , которой отвечает наименьшее отрицательное значение  $P_{23}$ . Вводя новую переменную одновременно изменяют другие переменные по меньшей мере в трех заполненных клетках (чтобы не нарушить итоговые величины в строках и столбцах таблицы).
- Для этого строят многоугольник, в котором одна из вершин находится в свободной клетке, для которой  $P_{23} < 0$  и имеет наименьшее значение, а остальные - в заполненных объемами работ (загружены)\* при этом все углы многоугольника должны быть прямыми (многоугольник отмеченный пунктирной линией в таблице 7). В пределах клеток, лежащих в вершинах многоугольника Рис. 1 а, производят перераспределение объемов работ.



# Рис 1

а)

и

б)

20			19	1
18	56		18	56
2	1		3	
10	100		10	100

- Если для свободной клетки поставить знак  $+$  , а в следующей вершине  $-$  , затем  $+$  и т.д. поочередно изменяя знак, то в свободную клетку переносится меньшее из чисел стоящих в клетках с отрицательными знаками. В результате она исключается из опорного базиса как базисная переменная. Одновременно необходимо установить равновесие по всему многоугольнику. Используя правило перераспределения объемов работ в пределах многоугольника, проводим распределение объемов работ Рис. 1,б.
- После чего сумма объемов работ по строкам и столбцам должна остаться без изменения. В нашем примере многоугольник имеет простой вид, На практике при решении задач большой размерности многоугольник может принимать самые замысловатые виды, образуя множество пересекающихся линий.



- Проводя соответствующие изменения в исходном опорном плане, окончательно получим новый опорный план таблица 9.
- Суммарные затраты на выполнение объемов работ (целевая функция)  $Y = 24 \cdot 14 + 18 \cdot 19 + 56 \cdot 1 + 19 \cdot 23 + 10 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 8 \cdot 34 = 1494$ .
- По сравнению с исходным планом ( $y - 1546$ ) суммарные затраты на выполнение всех объемов работ уменьшились на 3,3 % .
- Нахождением нового опорного плана заканчивается первое приближение. Дальше начинается повторение операций с новой матрицей таблица 8.



Таблица 9

Комплект машин	Затраты на выполнение единицы объема работ -С <sub>ij</sub> по объектам строительства В <sub>j</sub>								Годовая выработка машин, П <sub>i</sub>
	В1		В2		В3		В4		
А1	70		38		24	14	92		14
А2	58		18	19	56	1	72		20
А3	19	23	10	3	100		30		26
А4	3	7	36		121		8	34	41
Годовой объем работ, У <sub>j</sub>	30		22		15		34		101

- 1. Составить и решить систему уравнений (для клеток с распределенными объемами работ).

$$y_j - \pi_i = c_{ij}$$

$$y_3 - \pi_1 = 24: y_2 - \pi_2 = 18: y_3 - \pi_2 = 56: y_1 - \pi_3 = 19: y_2 - \pi_3 = 10:$$
$$y_1 - \pi_4 = 3: y_4 - \pi_4 = 8:$$

$$\pi_1 = 32: \pi_2 = 0: \pi_3 = 8: \pi_4 = 24:$$

$$y_1 = 27: y_2 = 18: y_3 = 56: y_4 = 32.$$

- 2. Определить значения (для клеток с нераспределенными объемами работ).

$$k_{ij} = y_j - \pi_i$$

$$k_{11} = y_1 - \pi_1 = 27 - 32 = -5$$

$$k_{12} = y_2 - \pi_1 = 18 - 32 = -14$$

$$k_{14} = y_4 - \pi_1 = 32 - 32 = 0$$

$$k_{21} = y_1 - \pi_2 = 27 - 0 = 27$$

$$k_{24} = y_4 - \pi_2 = 32 - 0 = 32$$

$$k_{33} = y_3 - \pi_3 = 56 - 8 = 48$$

$$k_{34} = y_4 - \pi_3 = 32 - 8 = 24$$

$$k_{42} = y_2 - \pi_4 = 18 - 24 = -6$$

$$k_{43} = y_3 - \pi_4 = 56 - 24 = 32$$

- 3. Определить значения.

$$P_{ij} = C_{ij} - K_{ij}$$

$$P_{11} = C_{11} - K_{11} = 70 + 5 = 75:$$

$$P_{12} = C_{12} - K_{12} = 38 + 14 = 52:$$

$$P_{14} = C_{14} - K_{14} = 92 - 0 = 92:$$

$$P_{21} = C_{21} - K_{21} = 58 - 27 = 31:$$

$$P_{24} = C_{24} - K_{24} = 72 - 32 = 40:$$

$$P_{33} = C_{33} - K_{33} = 100 - 48 = 52:$$

$$P_{34} = C_{34} - K_{34} = 30 - 24 = 6:$$

$$P_{42} = C_{42} - K_{42} = 36 + 6 = 42:$$

$$P_{43} = C_{43} - K_{43} = 121 - 32 = 89$$

- В нашем случае  $P_{ij} > 0$ . т.е. опорный план оптимален, задача решена и расстановка машин по объектам строительства соответствует ТАБЛИЦЕ 9.