Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы

Литература:

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов. - М.: Издательство Юрайт, 2015
2. Боголюбов А.В. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие. – М.: МГТУ «Станкин», 2007
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для вузов. - М.: Издательство Юрайт, 2015
4. Владимиров А.Л. «Математическая статистика. Методические указания к выполнению расчётно-графической работы»-М.,: Станкин, 2001

§ 1. Понятие случайного события

- Определение. Событие A называется случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий оно может либо произойти, либо не произойти. Осуществление определенной совокупности условий называется испытанием или экспериментом.

- Определение. События называются равновозможными, если есть основания считать, что ни одно из них не является более предпочтительным, чем другое.

- Определение. Случайные события называются несовместными (или взаимоисключающими), если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление других.

- Определение. Вся совокупность несовместных исходов экспериментов называется пространством элементарных событий Ω. Исходы ω_i, входящие в эту совокупность, называются элементарными событиями.

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n \}$$

§2. Математическая модель испытания

Аналогия между понятиями теории вероятностей и теории множеств

Пространство элементарных событий ↔ Множество

Элементарное событие ↔ Элемент этого множества

Событие ↔ Подмножество

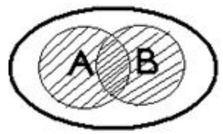
- Определение. Случайным событием называется любое подмножество пространства элементарных исходов.
- Определение. Событие называется невозможным, если оно не может произойти в данном эксперименте.
- Определение. Событие называется достоверным, если в данном эксперименте оно происходит всегда.

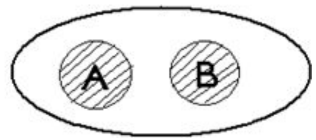
Замечание. Пространство элементарных событий может быть построено не единственным способом, выбор математической модели зависит от условий поставленной задачи.

§3. Операции над событиями. Алгебра случайных событий.

- Событие *C*, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из случайных событий *A* или *B*, называется суммой событий *A* и *B*.

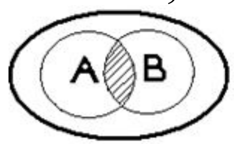
  $C = A+B = A \cup B$

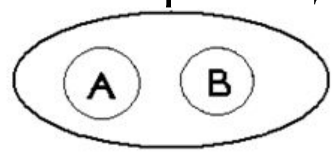




- Событие *C*, заключающееся в том, что произошли и событие *A*, и событие *B* одновременно, называется произведением событий *A* и *B*.

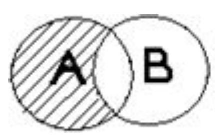
  $C = AB = A \cap B$





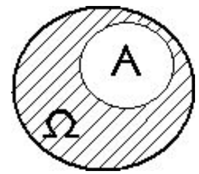
- Событие *C*, заключающееся в том, что *A* произошло, а *B* - нет, называется разностью событий *A* и *B*.

  $C = A \setminus B = A - B$



- Событие $\bar{A}$ противоположно событию A, если оно содержит все исходы, не принадлежащие A.

  $$\bar{A} = \Omega \setminus A$$



- События A и B называются тождественными, если они содержат одни и те же элементарные исходы.

  $$A = B$$

Говорят, что A влечет за собой B , если при наступлении A произойдет B.

$$A \subset B$$

Свойства введенных операций

1. Коммутативность: $A + B = B + A; \quad AB = BA$
2. Ассоциативность : $(A + B) + C = A + (B+C); \qquad (AB)C = A(BC)$
3. Дистрибутивность умножения относительно сложения:
   $(A + B)C = AC + BC$

Некоторые полезные соотношения

а) $A + A = A$ $\quad$ $A + \Omega = \Omega$

$AA = A$ $\quad$ $A\Omega = A$

$A\bar{A} = \varnothing$ $\quad$ $A + \bar{A} = \Omega$

б) правила де Моргана: $\overline{A + B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\quad$ $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

в) разложение на несовместные события:

$$A + B = A + (B - A) = A\bar{B} + AB + \bar{A}B = A + \bar{A}B$$

г) $A - B = A\bar{B}$

- **Определение.** *Пусть Ω – пространство элементарных событий, и – множество всех подмножеств Ω, включая невозможное событие и достоверное событие. Множество и называют* *алгеброй событий**, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения.*

Замечание: для испытаний с конечным числом исходов n и всегда является алгеброй и содержит 2^n элементов.

Вероятность события

- Классическое определение вероятности
- Геометрическая вероятность
- Статистический подход к понятию вероятности
- Аксиоматическое определение вероятности события

§4. Классическое определение вероятности

- Определение. Пусть $\Omega = \{\omega_{1,}\ \omega_{2,\ldots,}\ \omega_n\}$ – пространство элементарных <u>равновозможных</u> событий, *u*- алгебра событий ($N(u) = 2^n$)

Тогда:

а) $P(\omega_i) = 1/n$, $i= 1, 2,\ldots, n$

б) $P(A) = m/n$, где $A = \{\omega_{i1,}\ \omega_{i2,\ldots,}\ \omega_{im}\}$

(вероятность события *A* – есть отношение числа исходов, благоприятствующих *A*, к общему числу исходов n).

Пример 1: подбрасывание игральной кости

Пример 2: вытаскивание карты из колоды

Пример 3: двукратное подбрасывание монеты

§5. Геометрическая вероятность. Статистическая вероятность.

1^0.Геометрическая вероятность

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят понятие *геометрической вероятности.*

- Определение. Геометрической вероятностью P(A) наступления некоторого события A в испытании называют отношение G_A/G_Ω, где G_Ω – геометрическая мера, выражающая общее число всех равновозможных исходов данного испытания, а G_A – мера, выражающая количество благоприятствующих событию исходов.

$$P(A)= G_A/G_\Omega$$

2^0. Относительная частота события и статистическая вероятность

- Определение. Относительной частотой W(A) события A называют отношение числа испытаний m, в которых данное событие появилось, к общему числу   фактически проведённых испытаний n

$$W(A) = m/n$$

Относительная частота рассчитывается исключительно ПОСЛЕ опытов на основе фактически полученных данных.

В том случае, если серии испытаний проводятся в неизменных условиях, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости, то есть колеблется около определённого значения.

Пример.

Количество бросков монеты, n	Число появлений орла, m	Относительная частота, $\omega = \frac{m}{n}$
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Если в одинаковых (примерно одинаковых) условиях проведено достаточно много испытаний, то за статистическую вероятность события принимают относительную частоту данного события либо близкое число.

Геометрические вероятности

Если площадь S(A) фигуры A разделить на площадь S(X) фигуры X, которая целиком содержит фигуру A, то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A:

$$P(A) = S(A)/S(X)$$

Пример 1

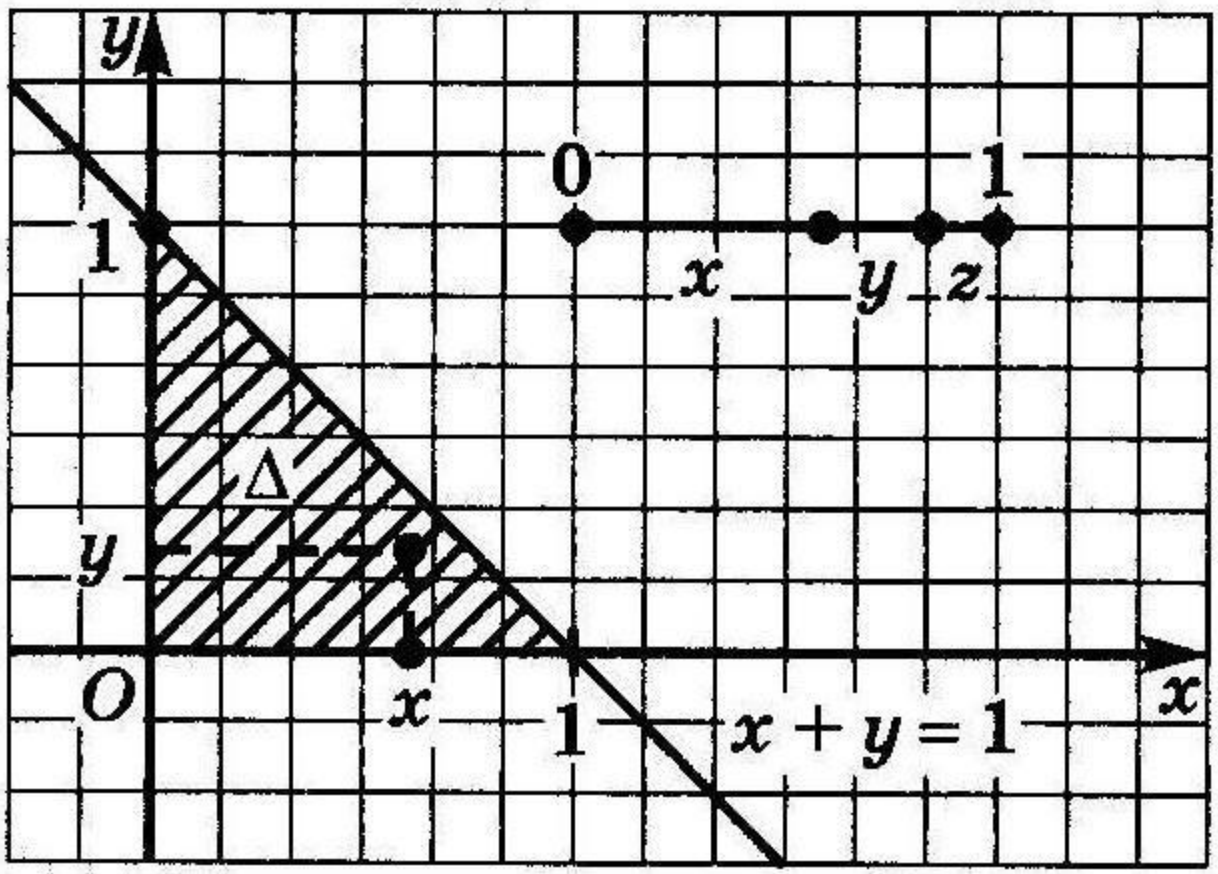
Отрезок единичной длины случайным образом разделяют на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно сложить треугольник?

Построение модели

Пронумеруем отрезки слева направо и обозначим их длины за x, y и z. Так как $x+y+z=1$, то $z=1-x-y>0$. Значит, $x>0$, $y>0$ и при этом $x+y<1$. В координатной плоскости изобразим множество решений системы трех неравенств:

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+y<1 \end{cases}$$

Получим треугольник с вершинами (0;0) (1;0) (0;1) без учета его сторон. Каждому способу деления заданного отрезка на три части x,y,z поставим в соответствие точку (x,y) из треугольника. Выбрав точку(x,y) мы однозначно зададим и разбиение заданного отрезка единичной длины на три отрезка [0;x] [x;x+y] [x+y;1].



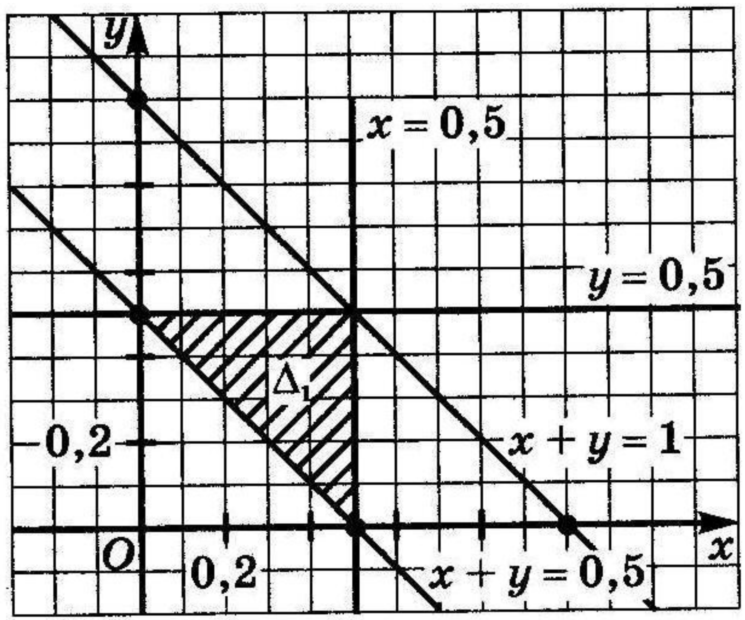
y
0
1
1
x
y
z
Δ
y
O
x
1
x
x + y = 1

Работа с моделью

$$\begin{cases} x+y>z \\ x+z>y \\ y+z>x \end{cases} \quad \begin{cases} x+y>1-x-y \\ x+1-x-y>y \\ y+1-x-y>x \end{cases} \quad \begin{cases} x+y>0.5 \\ y<0.5 \\ x<0.5 \end{cases}$$

Получаем треугольник, подобный первому с коэффициентом подобия 0,5

S1/S2=1/4



Вероятность того, что точка окажется окажется в меньшем треугольнике
P(A)=0.25

Пример 2

Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным?

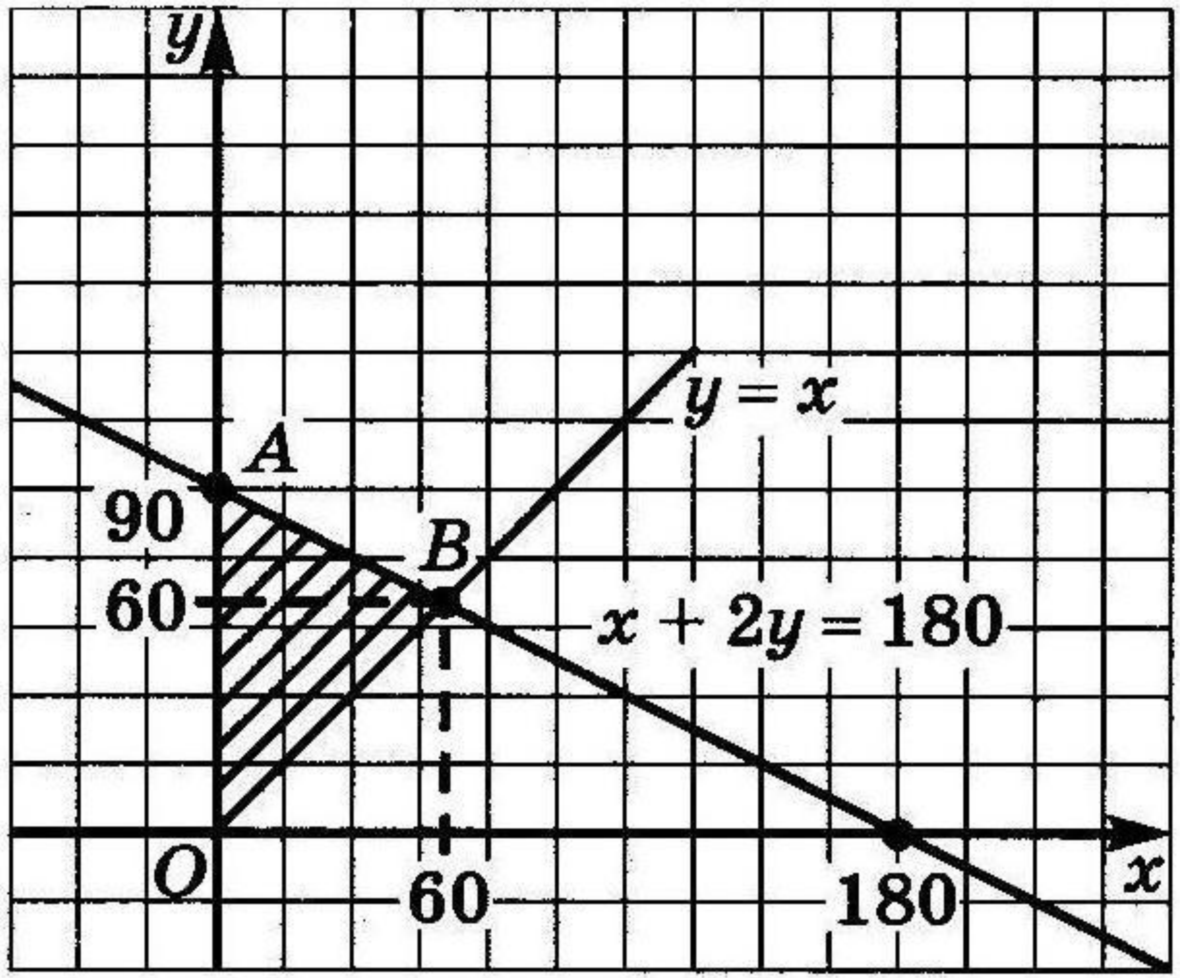
Построение модели

Переформулируем задачу:
Число 180 случайным образом представили в виде суммы трех положительных слагаемых. Какова вероятность того, что все слагаемые меньше 90?

Пусть $0<x<y$ $x+y+z=180$ $z=180-x-y$

$$\begin{cases} 0<x \\ x<y \\ y<180-x-y \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<x \\ x<y \\ x+2y<180 \end{cases}$$

Получим треугольник с вершинами O(0;0) A(0;90) B(60;60). Каждая точка однозначно «отвечает» за треугольник с углами x, y, 180-x-y.



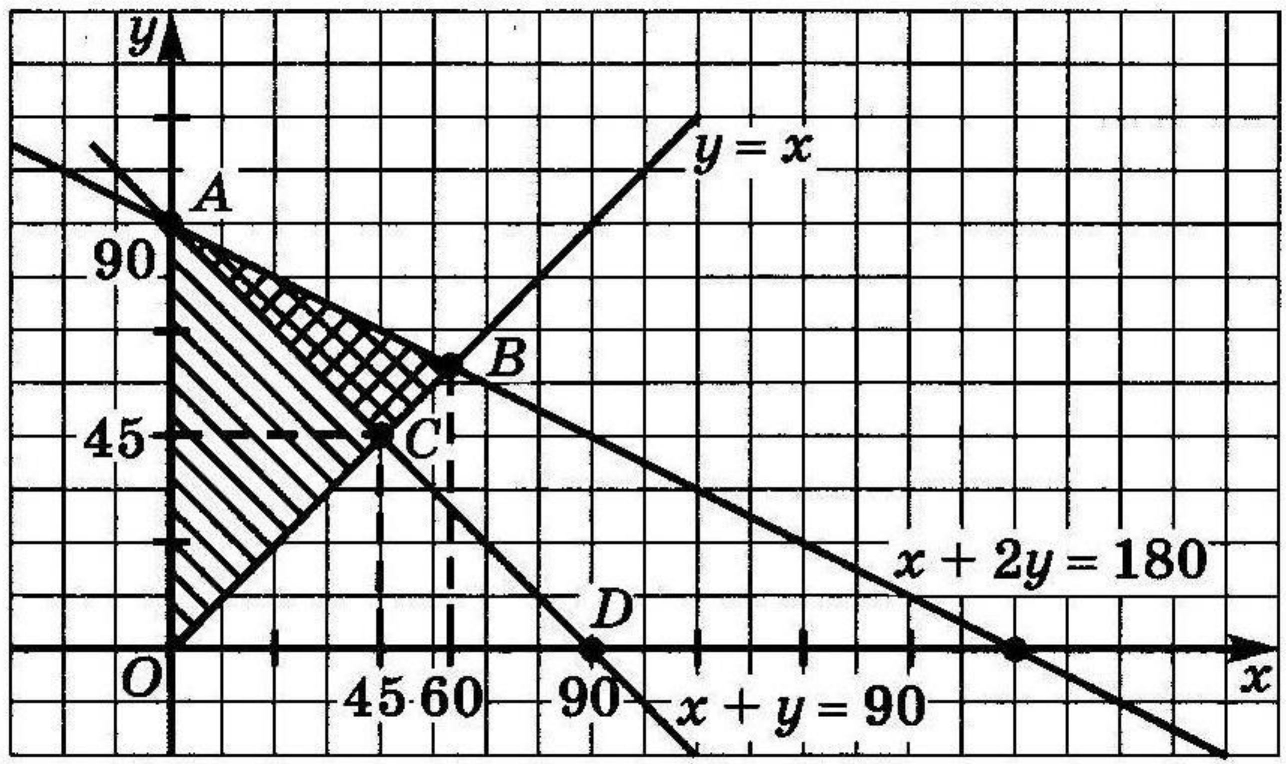
y
A
90
B
60
y = x
x + 2y = 180
O
60
180
x

Работа с моделью

Отметим в нашей модели точки, соответствующие остроугольным треугольникам.

$$\begin{cases} x<y<90 \\ y<180-x-y<90 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<y<90 \\ x+2y<90 \\ x+y>90 \end{cases}$$

Получаем треугольник с вершинами A(0;90) B(60;60) C(45;45)



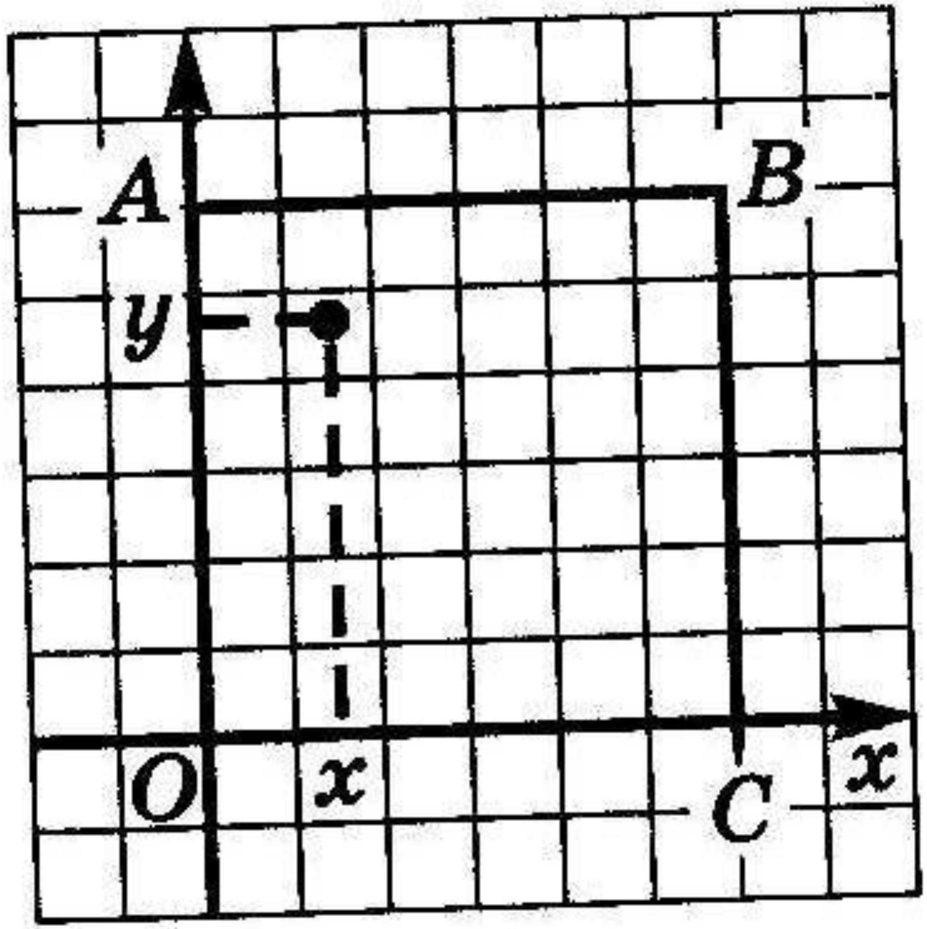
- *S(ABC)/S(AOB)=(0.5 AC*BC)/(0.5AC*OB)= BC/OB*
- *По теореме Фалеса BC/OB=0,25*
- *P(A)=0.25*

Пример 3

Два студента решили встретиться у фонтана. Каждый из них может гарантировать только то, что он появится у фонтана с 12-00 до 13-00. По инструкции студент после прихода ждет встречи у фонтана 15 минут и по их истечении (или ровно в 13:00) уходит. Какова вероятность встречи?

Построение модели

За единицу отсчета возьмем 1 час, а за начало отсчета возьмем 12:00. Пусть x - время прихода первого шпиона, а y - время прихода второго. Тогда о≤x≤1, 0 ≤y ≤1 и точка (x,y) квадрата с вершинами O(0;0) A(0;1) B(1;1) C(1;0) будет соответствовать времени прихода первого и второго студента.

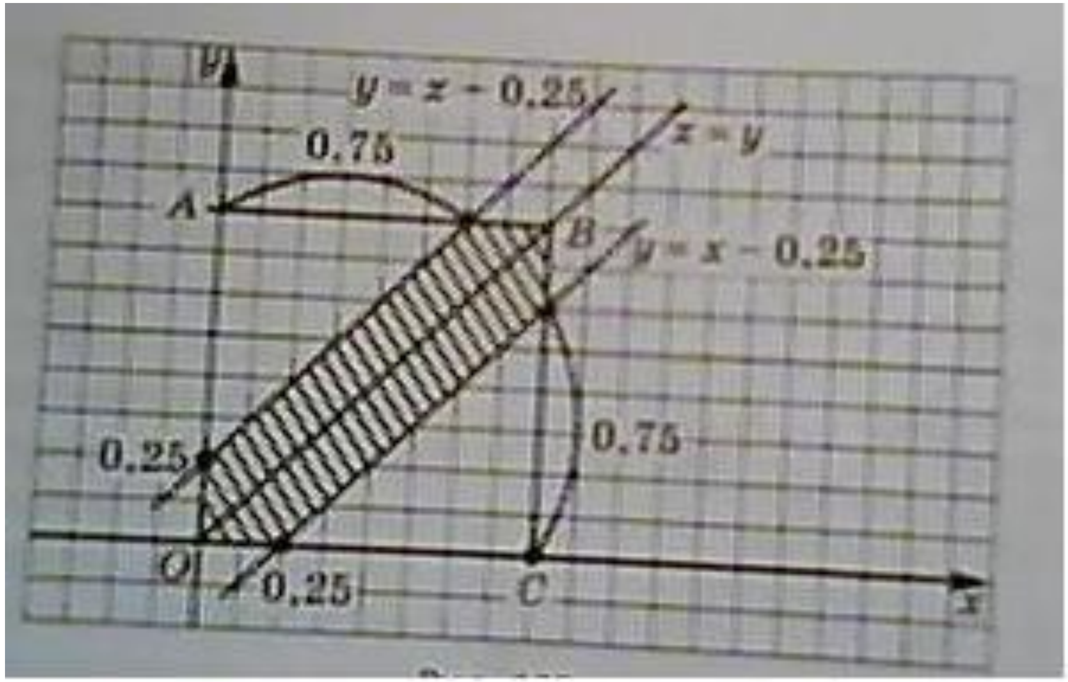

A
B
y
O
x
C
x

Работа с моделью

- *Встреча произойдет, только если время прихода первого шпиона отличается от времени прихода второго не более чем на 15 минут. Т.е.*

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ |y-x| \le 0.25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ x-0.25 \le y \le x+0.25 \end{cases}$$

- *Получается часть квадрата OABC, лежащая между прямыми* $y=x-0.25$ *и* $y=x+0.25$



- *Незаштрихованная часть состоит из двух прямоугольных треугольников, катеты которых равны 0,75. Значит их площадь равна 0,5625. Т.е. заштрихованная часть составляет 0,4375 от площади всего квадрата. Это и есть искомая вероятность P(A)=0.4375*

Комбинаторика

1. *Правило сложения*
2. *Правило умножения*
3. *Понятие факториала числа*
4. *Размещения*
5. *Перестановки*
6. *Сочетания*
7. *Алгоритм решения комбинаторных задач*

Элементы комбинаторики

- Принцип произведения комбинаций. Если какое-либо действие осуществляется за k последовательных шагов, при этом первый шаг может быть реализован n_1 числом способом, второй шаг n_2 числом способов, k-й шаг — n_k способами, то общее число способов реализации действия равно:

$$N=n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k.$$

- Перестановками из n элементов называют всевозможные упорядоченные соединения из данных элементов. Число таких перестановок P_n равно:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

Правило суммы

Пусть имеется n попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ содержащих $m_1, m_2, \ldots, m_n$ элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать один элемент из всех этих множеств, равно

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

Пример. На курсе имеется 3 группы. В первой – 25 человек, во второй – 30, в третьей – 20. Сколькими способами из них можно выбрать одного студента?

Пример. На курсе имеется 3 группы. В первой – 25 человек, во второй – 30, в третьей – 20. Сколькими способами из них можно выбрать одного студента?

Решение:

У нас три множества A_1, A_2, A_3 содержащих $m_1 = 25, m_2 = 30, m_3 = 20$ элементов соответственно.

Из первой группы одного человека можно выбрать 25 способами, из второй – 30, из третьей – 20. Чтобы найти ответ, нужно сложить все эти способы: 25+30+20=75. Таким образом, выбрать одного студента из трех групп можно 75 способами.

Правило произведения

В дальнейшем будет часто использоваться Определение:

Кортеж - конечная последовательность (допускающая повторения) элементов какого-нибудь множества.

Пусть имеется n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ содержащих $m_1, m_2, \ldots, m_n$ элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества, то есть построить кортеж ($a_1, a_2, \ldots, a_n$), где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ равно

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$$

<u>Пример</u>. На курсе имеется 3 группы. В первой – 25 человек, во второй – 30, в третьей – 20. Сколькими способами можно выбрать троих делегатов конференции - по одному из каждой группы?

Решение: *У нас три множества содержащих*

$$A_1, A_2, A_3$$

элементов соответственно. Из первой группы

$$m_1 = 25, m_2 = 30, m_3 = 20$$

одного человека можно выбрать 25 способами, из второй – 30, из третьей – 20. Чтобы найти ответ, нужно перемножить эти числа .
Получили, что выбрать по одному студенту из каждой группы можно 15000 способами.

$$25 \cdot 30 \cdot 20 = 15000$$

Понятие факториала числа

<u>Определение.</u> Факториал – произведение натуральных чисел от единицы до какого-либо данного натурального числа n.

По договоренности 0!=1.

Термин «факториал» ввел Л. Арбогаст в 1800г.

<u>Обозначение</u> n! было придумано в 1808 г. К. Крампом.

$$0!=1 \qquad 3!=1\cdot 2\cdot 3=6$$

$$1!=1 \qquad 4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$$

$$2!=1\cdot 2=2 \qquad 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$$

Размещения

Размещениями *из n элементов по m элементов (m<n) называются комбинации, составленные из данных n элементов множества по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов. Для обозначения числа всех размещений из n элементов по m, элементов применяется специальный символ: A_n^m, который читается как «число размещений из n по m».*

Размещения без повторений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

<u>Пример.</u> В группе 30 студентов. Сколькими способами могут быть выбраны староста и представитель студенческого актива, если каждый учащийся может быть избран на одну из этих должностей?

$$n=30,\ m=2$$

$$A_{30}^2 = \frac{30!}{(30-2)!} = 29 \cdot 30 = 870$$

Размещения с повторениями. *Различные кортежи длины m, составленные из элементов данного множества, содержащего n элементов, так, что эти элементы в кортеже могут повторяться, называются размещениями с повторениями из n элементов по m элементов. Их число равно:*

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Пример. Группа из 25 студентов сдает экзамен. Возможные оценки – 2, 3, 4, 5. Сколькими способами может быть заполнена экзаменационная ведомость? Решение: n=4, m=25. Получаем: .

$$\overline{A_4^{25}} = 4^{25}$$

Перестановки

Перестановками из n элементов называются размещения из этих n элементов по n элементов. Перестановки – частный случай размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов. Число перестановок из n элементов обозначают через P_n.

Перестановки без повторений – это различные кортежи, которые можно построить из элементов данного множества, взятых ровно по одному разу:

$$P_n = n!$$

<u>Пример.</u> Для дежурства в общежитии в течение учебной недели (5 дней) выделены 5 студентов. Сколькими способами можно установить очередность дежурств, если каждый студент дежурит один раз?

$$P_5 = 5! = 120$$

<u>Пример.</u> Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом?

$$P_5 = 10! = 3628800$$

Перестановки с повторениями:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}$$

это кортежи, в которых элемент a_l *повторяется* m_l *раз.*

Пример. *Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «мама»?*

Решение:

В слове «мама» 4 буквы: n=4

Буква «м» встречается в слове 2 раза: $m_1 = 2$

Буква «а» - 2 раза: $m_2 = 2$*. По формуле получаем:*

$$P_4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Сочетания

Сочетаниями *из n элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые* ***отличаются хотя бы одним элементом****.*

Отличие сочетаний от размещений в том, что в сочетаниях не учитывается порядок элементов. Число всех сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом: C_n^m. ***Сочетания без повторений*** *(n различных элементов, взятых по m):*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

<u>Пример.</u> Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить, если есть пять преподавателей?

$$n=5,\ m=2$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

*Различные неупорядоченные наборы, составленные из m элементов этого множества так, что элементы в наборе могут повторяться, и порядок их не важен, называются **сочетаниями с повторениями** из n по m. Их число равно:*

$$\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

Пример. *Возьмем плоды банан, ананас, киви, яблоко и репа . Какие сочетания из этих плодов, взятых по два, можно получить? Сколько таких наборов получится, если*

1) плоды в наборе не повторяются;

2) можно брать по два одинаковых плода?

Решение:

$$n=5,\ m=2$$

1)

2) $$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=10$$

$$\overline{C}_5^2=\frac{(5+2-1)!}{2!(5-1)!}=15$$

Название	Формула	Характеристика
Размещения без повторений с повторениями	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ $\overline{A_n^m} = n^m$	отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов (порядок важен)
Перестановки без повторений с повторениями	$P_n = n!$ $P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!}$	отличаются друг от друга только порядком следования элементов ($m=n$)
Сочетания без повторений с повторениями	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ $\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}$	отличаются хотя бы одним элементом (порядок не важен)

Алгоритм решения комбинаторных задач

При решении комбинаторных задач следует ответить на следующие вопросы:

1. *Из какого множества осуществляется выбор (найти n – количество элементов из которых составляются комбинации)?*
2. *Определить сколько элементов в одной комбинации (найти m; если n=m – это перестановки, переходим к вопросу 4)?*
3. *Важен ли порядок (изменится ли комбинация, если в ней поменять элементы местами)?*
   если важен – это размещения A_n^m,
   если нет – это сочетания C_n^m.
4. *Возможны ли повторения элементов в одной комбинации?*

<u>Пример.</u> В фортепианном кружке дома детского творчества занимается 10 человек, в кружке художественного слова – 15, в вокальном – 12 и в фотокружке – 20. Сколькими способами можно составить команду из 4 чтецов, 3 пианистов, 5 певцов и одного фотографа для выезда на экскурсию?

Решение: Разобьем решение задачи на подзадачи.

1. *Сначала найдем сколькими способами можно выбрать чтецов:*

- производим выбор из 15 человек, *n=15*;
- выбираем 4 человека, *m=4*;
- порядок не важен, т.е. используем правило сочетаний C_{15}^4;
- сочетания без повторений, так как люди выбираются разные.

2. Проводя подобные рассуждения, выбираем пианистов: 3 из 10 – C_{10}^{3} способов.

3. Певцов: 5 из 12 – C_{12}^{5} способов.

4. Фотографа: 1 из 20 – C_{20}^{1} способов.

Поскольку выбор производится по всем четырем позициям, а не по одной, применяем правило произведения:

.

$$C_{15}^{4}\cdot C_{10}^{3}\cdot C_{12}^{5}\cdot C_{20}^{1}$$

$$C_{15}^{4}\cdot C_{10}^{3}\cdot C_{12}^{5}\cdot C_{20}^{1}=\frac{15!}{4!(15-4)!}\cdot\frac{10!}{3!(10-3)!}\cdot\frac{12!}{5!(12-5)!}\cdot\frac{20!}{1!(20-1)!}$$

Ответ: команду можно составить $2{,}595\cdot 10^{9}$ *способами.*

Задание 1.

Среди студентов, собравшихся на лекцию, выбирают наудачу одного.

Событие A — выбран юноша, B — он не курит, C — он живет в общежитии.

1. Описать событие ABC;
2. При каком условии имеет место тождество ABC = A?
3. Когда справедливо соотношение $C \subset B$?

Задание 2.

На курсе изучается 5 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на субботу, если в этот день должны быть две различные пары?