РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Исторические сведения

В естествознании и технике часто приходится иметь дело с периодическими процессами: колебательными и вращательными движениями различных деталей и приборов, периодическими движениями небесных тел и приборов, электромагнитными колебаниями и т.п. Математически такие процессы описываются периодическими функциями.

Начиная примерно с 1749г. Бернулли, Даламбер, Лагранж, обсуждали вопрос о возможности представления достаточно произвольной 2π-периодической функции в виде суммы тригонометрического ряда

В естествознании

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

В 1811г. Фурье выразил уверенность в возможности такого представления и привел много примеров. За период 1823-1827г. Пуассон и Коши получили доказательства представления функций определенного класса тригонометрическими рядами. Позже выяснилось, что на функции были наложены излишние ограничения.

Дирихле, начав изучение с 1827г. Тесно связал тригонометрические ряды с исследованием понятия функции.

Особая ценность тригонометрических рядов (рядов Фурье) заключается в том, что тригонометрические ряды являются мощным и гибким средтвом исследования периодических процессов.

Из определения периодической функции следует, что

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \cdots = f(t+nT), n \in \boldsymbol{N}.$$

Далее

$$f(t) = f((t-T)+T) = f(t-T) = f(t-2T) = f(t-nT).$$

Таким образом, если $f(t)$ периодическая функция с периодом T, то для любого целого числа n:

$$f(t) = f(t+nT).$$

Теперь отметим, что если $f(t)$ интегрируемая T-периодическая функция, то интеграл по отрезку длиной равной периоду есть постоянная величина, не зависящая от положения этого отрезка на числовой оси, т.е.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Отметим, что в природе нет бесконечной повторяемости процессов (как предписывает определение периодической функции). Изучаемые процессы обладают свойством повторяемости в течении некоторого конечного временного промежутка. Поэтому периодические процессы изучаются в течении такого временного промежутка.

2. Периодические функции. Гармоники

Среди огромного многообразия функций особое место занимают функции, обладающие следующим свойством: для любых двух значений аргумента, отличающихся на постоянное число, соответствующие значения функций равны. Это периодические функции.

Определение. Функция $f(t)$ называется периодической, если существует постоянное число $T > 0$ такое, что $f(t+T) = f(t)$ для любых значений аргумента t из область определения функции $f(t)$; число T называется периодом функции $f(t)$.

Если переменная t периодической функции $f(t)$ означает время, то можно считать, что данная функция $f(t)$ описывает явление, повторяющееся через промежуток времени $f(t)$.

2. Периодические функции. Гармоники

Простейшей периодической функцией является функция вида

$$y = A\sin(\omega t + \varphi),$$

где A, ω, φ – постоянные.

Эта функция называется простой гармоникой, так как она описывает простейшее колебательное движение, называемое гармоническим. Постоянная $A > 0$ называется амплитудой колебания, выражение $(\omega t + \varphi)$ – фазой колебания, φ– начальной фазой, ω– круговой частотой колебания, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебания (период простой гармоники).

Легко убедится, что всякую гармонику можно представить в виде

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t.$$

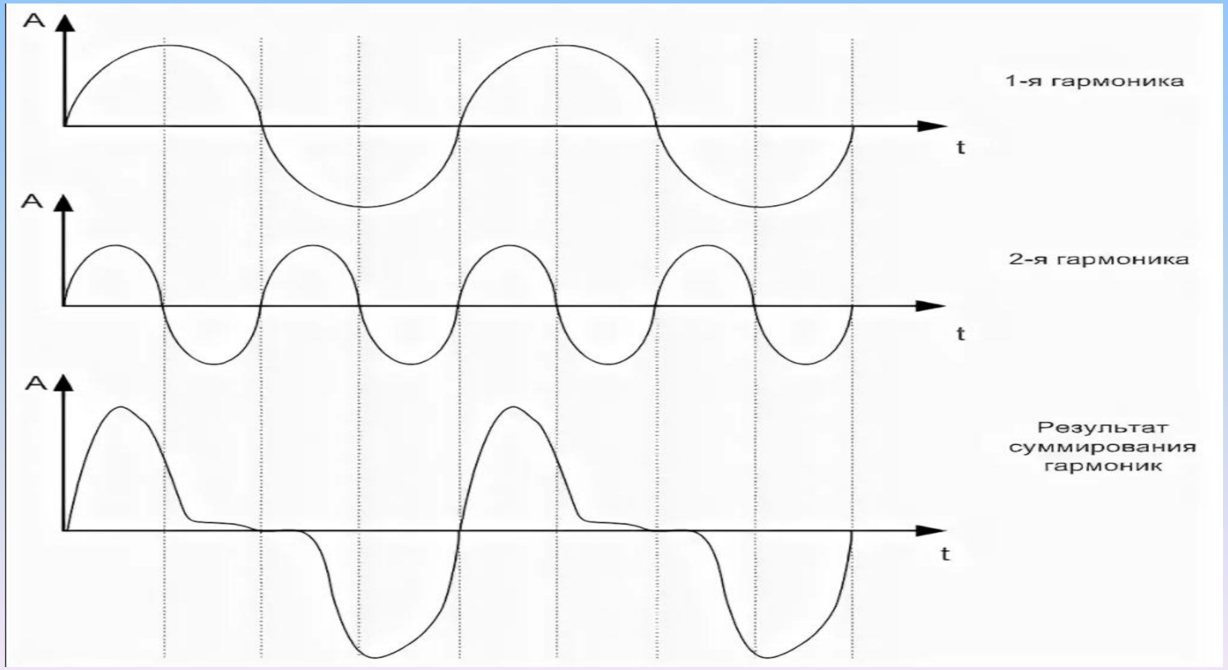
Обратно, любая функция вида $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ представляет собой гармонику с амплитудой $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ и начальной фазой $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. Колебания, которые получаются в результате наложения (суммы) нескольких гармонических колебаний называются <u>сложными гармоническими</u> колебаниями.

Можно показать, что если сложить простые гармоники с частотами $\omega_1, \omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 3\omega_1, \dots, \omega_k = k\omega_1$, то результатом наложения (сложения) будет периодическая функция с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Частота ω_1 называется <u>основной частотой</u>, T_1 – <u>основным периодом</u>. Складывая гармоники, начиная с основой частоты ω_1 и заканчивая частотой $\omega_k = k\omega_1$, получим периодическую функцию с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k} A_n \sin(\omega_1 t + \varphi_n) =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Оказывается, что функция $f(t)$ по своей форме может сильно отличаться от исходной простой гармоники $y = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi)$.



3. Ортогональные системы функций

Определение 1. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две интегрируемые функции $f(t)$ и $g(t)$. Число

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \qquad (1)$$

называется скалярным произведением функций $f(t)$ и $g(t)$.

Формулу (1) можно рассматривать как некоторый аналог скалярного произведения векторов со всемс свойствами, присущими свойствам скалярного произведения.

Определение 2. Функции $f(t)$ и $g(t)$ называются ортогональными на отрезке $[a, b]$, если их скалярное произведение равно нулю

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0.$$

Определение 3. Система функций $\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots\}$, определенных на отрезке $[a, b]$ называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если любые две функции этой системы ортогональны на отрезке $[a, b]$.

Утверждение. Тригонометрическая система функций $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots$ ортогональна на любом отрезке длиной 2π.

Достаточно доказать выполнение следующих равенств:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos it \cdot \cos jt dt = 0, \ i, j: 0,1,2, \ldots, i \neq j;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin it \cdot \sin jt dt = 0, \ i, j: 0,1,2, \ldots, i \neq j;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos it \cdot \sin jt dt = 0, \ i, j: 0,1,2, \ldots,$$

Которые следуют из формул тригонометрии и свойств определенного интеграла

$$\cos mt \cdot \cos nt = \frac{1}{2}[\cos(m+n)t + \cos(m-n)t],$$

$$\sin mt \cdot \sin nt = \frac{1}{2}[\cos(m-n)t - \cos(m+n)t],$$

$$\cos mt \cdot \sin nt = \frac{1}{2}[\sin(m+n)t + \sin(n-m)t].$$

Но может быть заданную Т-периодическую функцию представить в виде бесконечного числа простых гармоник, т.е. в виде тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt \ ? \qquad (2)$$

Оказывается, что это действительно так. Практически любую Т-периодическую функцию можно представить суммой бесконечного числа простых гармоник. Над решением этой проблемы работали ведущие математики XVIII века.

Сформулируем задачу. Дана Т-периодическая функция $f(t)$; можно ли найти тригонометрический ряд, который сходится и сумма которого равна именно $f(t)$. Иначе: можно ли представить $f(t)$ в виде ряда (2)? Если Т=2π, то в виде ряда $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$?

4. Тригонометрический ряд. Ряд Фурье, коэффициенты Фурье.

Пусть 2π-периодическая функция $y = f(t)$ разлагается в тригонометрический ряд

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt \qquad (1)$$

Это означает, что ряд сходится и его сумма равна $f(t)$. Ввиду периодичности $f(t)$ сходимость имеет место для всех t. Наша задача заключается в том, чтобы найти коэффициенты a_0, a_n, b_n этого ряда, зная исходную функцию $f(t)$.

Теорема. Если равенство

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt$$

имеет место для всех значений $t \in (-\infty, \infty)$ и ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt$$

сходится правильно для любого t, то

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt\,.$$

Доказательство. Для определения коэффициента a_0 проинтегрируем левую и правую части равенства (1). Интеграл от $f(t)$ существует, так как ряд по условию сходится правильно и, следовательно, $f(t)$ равная сумме этого ряда, состоящего из непрерывных функций, есть непрерывная функция, а интеграл от непрерывной функции существует. Сам ряд можно почленно интегрировать, так как правильно сходящиеся ряды допускают почленное интегрирование.

Интегрируя разложение (1) в пределах от - π до π, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \pi a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos ntdt + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin ntdt\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \pi a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos ntdt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin ntdt\right) =$$

$$= \pi a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nt - \frac{b_n}{n}\cos nt\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_0.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \qquad (2)$$

Для того, чтобы найти коэффициенты a_m, умножим обе части равенства (1) на $\cos mt$ (от этого правильная сходимость не нарушится, так как $\cos mt$ ограниченная функция) и снова проинтегрируем в пределах от - π до π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\,dt +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mtdt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos ntdt\right)$$

Так как

$$\cos mt \cdot \cos nt = \frac{1}{2}[\cos(m+n)t + \cos(m-n)t],$$

$$\cos mt \cdot \sin nt = \frac{1}{2}[\sin(m+n)t + \sin(n-m)t],$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)t + \cos(m-n)t]dt =$$

$$= \begin{cases} 0, m = n; \\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nt) = \pi. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)t + \sin(m-n)t]dt = 0$$

для любых m и n как интеграл от нечетной функции.

Окончательно получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt = a_m \pi,$$

Откуда

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt \qquad (3)$$

Совершенно аналогично, предварительно умножая ряд (1) на $\sin mt$, интегрируя почленно и учитывая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\sin mt dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)t - \cos(m+n)t]dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nt) = \pi \end{cases}$$

определяем коэффициенты

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt \qquad (4)$$

Коэффициенты a_n, b_n, определяемые по формулам (2), (3), (4) называются коэффициентами Фурье функции $f(t)$, а тригонометрический ряд, в котором коэффициентами служат коэффициенты Фурье, называется рядом Фурье функции $f(t)$.

Заметим, что коэффициенты Фурье определяются однозначно!

5. Ряд Фурье функции произвольного периода

Пусть теперь периодическая функция $f(t)$ имеет период $T = 2l$ и разлагается в тригонометрический ряд

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n t}{l}. \qquad (1)$$

Аналогично тому, как это было сделано в теореме для нахождения коэффициентов a_0, a_n, b_n поступают следующим образом: интегрируя разложение (1) в пределах от $-l$ до l, находим коэффициент a_0

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt.$$

Далее, умножая обе части равенства (1) сначала на $\cos\frac{\pi m t}{l}$, а затем на $\sin\frac{\pi m t}{l}$ и интегрируя почленно, найдем

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi m t}{l}dt, \quad b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi m t}{l}dt,$$

$$m = 1,2,3, \ldots \quad .$$

Коэффициенты a_m, b_m также называются коэффициентами Фурье функции $f(t)$, а тригонометрический ряд (1), в котором коэффициентами служат коэффициенты Фурье, называется рядом Фурье функции $f(t)$ периода $T = 2l$.

5. Ряды Фурье четных и нечетных функций

Часто периодические функции, описывающие периодические процессы обладают каким-либо видом симметрии, это облегчает разложение таких функций в ряд Фурье.

Периодическая функция называется четной, если для любых $t \in R$: $f(-t) = f(t)$ и называется нечетной, если для любых $t \in R$: $f(-t) = -f(t)$.

Если функция $\varphi(t)$ – четная, то $\int_{-a}^{a} \varphi(t)dt = 2\int_{0}^{a} \varphi(t)dt$; если же функция $\varphi(t)$ – нечетная , то $\int_{-a}^{a} \varphi(t)dt = 0$.

Пусть составляется ряд Фурье четной $2\pi -$ периодической функции $f(t)$. Тогда её коэффициенты Фурье равны

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, sin\, nt\,dt = 0.$$

Следовательно, ряд Фурье четной функции содержит только косинусы и постоянную составляющую и имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega nt.$$

Пусть теперь $f(t)$ нечетная $2\pi -$ периодическая функция. В этом случае все коэффициенты $a_n = 0$ и ряд Фурье такой функции содержит только синусы:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega nt, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\, sin\, nt\,dt.$$

Аналогично и для $2l -$ периодической функции.

Важно отметить следующее обстоятельство. Не всякий тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega n t+b_n \sin \omega n t$ является рядом Фурье периодической функции, если даже он сходится для всех значений t.

Например, тригонометрический ряд

$$\frac{\sin 2t}{ln2}+\frac{\sin 3t}{ln3}+\frac{\sin 4t}{ln4}+\ldots+\frac{\sin nt}{lnn}\ldots$$

сходится для всех $t \in (-\infty, \infty)$, но не является рядом Фурье, то есть не существует функции $f(t)$ такой, что

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, sin\, nt\, dt=\frac{1}{\ln 2}, n=2,3,\ldots \quad .$$

Если задана $2\pi-$ периодическая функция $f(t)$, то составление ряда Фурье этой функции не представляет труда. Достаточно, чтобы $f(t)$ была интегрируема на промежутке $[-\pi, \pi]$. Тогда вычисляются коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n функции $f(t)$ и составляется её ряд Фурье.

Но, и это очень важно, отсюда нельзя сделать вывод о возможности разложения функции $f(t)$ в ряд Фурье. Может оказаться, что построенный ряд Фурье будет расходящимся для некоторых или даже всех значений t. Если даже ряд сходится, то ничто не позволяет сделать вывод, что его сумма равна заданной функции $f(t)$.

Таким образом, вопрос о том, какими свойтвами должна обладать функция $f(t)$, чтобы её ряд Фурье сходился к ней, остаётся открытым.

6. Сходимость ряда Фурье

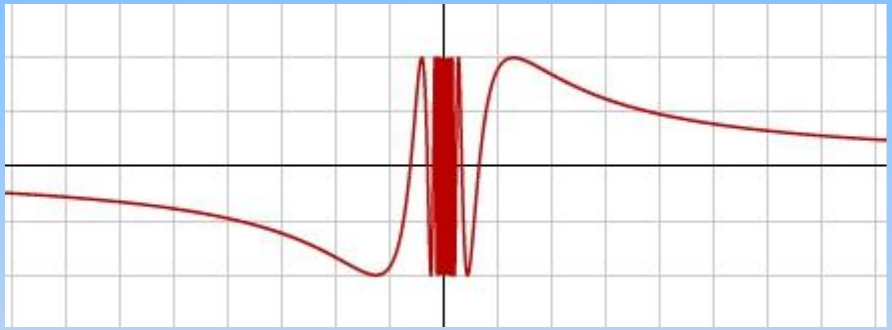
Рассмотрим следующую задачу: какими свойствами должна обладать функция $f(t)$, для того чтобы её ряд Фурье сходился и чтобы его сумма равнялась $f(t)$.

Минимум ограничений, необходимых для сходимости ряда Фурье к функции $f(t)$ ещё неизвестен. Дирихле в 1829г. Указал достаточно широкий класс функций, представимых рядом Фурье. Условия указанные Дирихле не очень обременительные и состоят в следующем:

1). Функция $f(t)$ имеет лишь конечное число максимумов и минимумов на отрезке $[a, b]$;

2). Функция $f(t)$ или непрерывна, или имеет конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[a, b]$.

Например, функция $f(t) = \frac{1}{1-t}$ не удовлетворяет второму условию Дирихле на отрезке $[a, b]$, содержащем точку $t = 1$, так как при $t \to 1$ $f(t) \to \infty$. Примером функции, для которой не выполняется первое условие является функция $f(t) = \sin\frac{1}{t}$. В любом интервале, содержащим точку 0 эта функция имеет бесконечное число максимумов и минимумов.



Теорема (Дирихле). Пусть функция $f(t)$ имеет период 2π и удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье этой функции сходится на всей числовой оси и сумма этого ряда равна

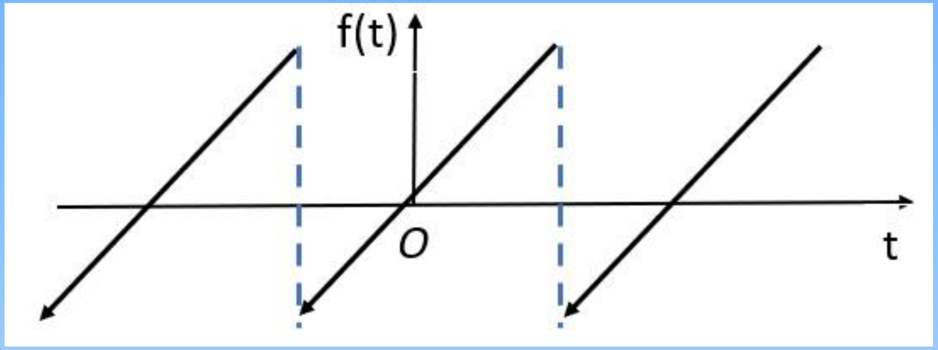
1. $f(t)$ во всех точках непрерывности;

2.Числу $\frac{1}{2}[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$ в каждой точке разрыва t_0 (т.е. среднему арифметическому предельных значений функции $f(t)$ слева и справа от точки разрыва t_0).

Доказательство этой теоремы выходит за рамки курса. Только обращаем внимание на то, что условия, накладываемые на функцию $f(t)$ при разложении её в ряд Фурье, значительно менее стеснительные, чем при разложении функций в ряд Тейлора.

Рассмотрим примеры разложения функции в ряд Фурье.

Пример 1. Периодическая функция (сигнал) $f(t)$ с периодом 2π определена следующим образом: $f(t) = t$, $-\pi < t \le \pi$. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, допускает разложение в ряд Фурье



Данная функция нечетная, а потому её ряд Фурье будет содержать только синусы, т.е. $a_0 = 0, a_n = 0$. Найдем коэффициенты Фурье b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t \sin nt\, dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t\cos nt}{n}\right]\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nt dt = -\frac{2\cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi},$$ n=1,2,… .

Таким образом, получаем разложение

$$f(t) = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \ \ldots . + (-1)^{n+1}\frac{\sin n t}{n} \ \ldots . \right).$$

Этот равенство имеет место лишь в точках непрерывности $f(t)$, т.е. при $2\pi k - \pi < t < 2\pi k + \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В точках, где $f(t)$ – разрывна, т.е. при $t = (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ сумма ряда равна среднему арифметическому её предельных значений слева и справа от этой точки. Например, при $t = \pi$ сумма ряда Фурье равна числу $\frac{1}{2}[f(\pi - 0) + f(\pi + 0)] = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$.

Пример 2. 2π-периодическая функция $f(t)$ функция на промежутке $[-\pi, \pi]$ определена следующим обрвзом:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \le t < 0; \\ 1, & 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

Условия Дирихле на отрезке $-\pi \le t \le \pi$ выполнены. Ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \ \dots . + \frac{\sin(2n+1)\,t}{2n} + 1 \dots .\right).$$

В точках разрыва первого рода $x_k = \pi k, k \in Z$ сумма ряда Фурье равна $f(x_k) = \frac{f(x_k-0)+f(x_k+0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

В приложениях обычно приходится разлагать в ряд Фурье периодическую функцию произвольного периода. Теорема Дирихле остается в силе и для функции периода $T = 2l$.

Пример 3. Периодическая функция $f(t)$ с периодом $T = 4$ определена следующим образом: $f(t) = e^t, -2 \le t < 2$.

Данная функция на отрезке $[-2,2]$ удовлетворяет условиям Дирихле. Находим коэффициенты Фурье. Здесь $T = 2l = 4, l = 2$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^t dt = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = sh\,2;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^t \cos\frac{\pi n t}{l}dt =$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^t \cos\frac{\pi n t}{l}\,dt = \frac{1}{2}\frac{e^t}{1+\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2}\left[\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n t}{2} + \cos\frac{\pi n t}{2}\right]\Big|_{-2}^{2}$$

$$=\ldots=\frac{4(-1)^n}{4+(\pi n)^2}\,\mathrm{sh}2;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt\ \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^t \sin\frac{\pi n t}{2}\,dt = \cdots = \frac{(-1)^{n+1}2\pi n}{4+(\pi n)^2}\,\mathrm{sh}2$$

В точках непрерывности сумма ряда равна $f(t)$. В точках разрыва $x_k = 2k, k \in Z$ сумма ряда равна $\frac{f(x_k-0)+f(x_k+0)}{2} = \frac{e^{-2}+e^2}{2} = ch\ 2.$

7. Разложение в тригонометрический ряд непериодической функции

Неоднократно упоминалось, что в тригонометрический ряд можно разлагать только периодические функции периода $T = 2\pi, T = 2l$. В приложениях часто приходится иметь дело с функцией $f(t)$, которая задана только на отрезках $[-\pi, \pi], [-l, l]$ или на $[0, \pi], [0, l]$ и требуется такую функцию представить тригонометрическим рядом.

1. Функция задана на отрезке $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$. Так как $f(t)$ непериодическая применить к ней вышеизложенную теорию нельзя. Введем вспомогательную функцию $\tilde{f}(t)$, определенную следующим образом:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), \text{при } -\pi < t < \pi; \\ \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, \text{при } t = \pm\pi. \end{cases}$$

На все остальные значения t функцию $\tilde{f}(t)$ распространим по закону периодичности, полагая $\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t + 2\pi k), k \in Z$. На концах отрезка $[-\pi, \pi]$ функции $\tilde{f}(t)$ придаются равные значения. Это необходимо, так как в противном случае она не была бы периодической с периодом $T = 2\pi$.

Построение 2π-периодической функции $\tilde{f}(t)$, совпадающей с заданной функцией $f(t)$ на интервале $(-\pi, \pi)$, называется периодическим продолжением функции $f(t)$. Полученную функцию $\tilde{f}(t)$ можно разложить в ряд Фурье. В интервале $(-\pi, \pi)$ сумма ряда Фурье функции $\tilde{f}(t)$ совпадает с функцией $f(t)$.

Обратим внимание на концы промежутка $[-\pi, \pi]$. В точках $\pm\pi$ ряд Фурье функции $\tilde{f}(t)$ может не сходится к значениям $f(\pm\pi)$.

Ряд Фурье функции $\tilde{f}(t)$ будет сходится к $\tilde{f}(\pm\pi)$, если периодическое продолжение, т.е. функция $\tilde{f}(t)$ непрерывна

в точках $t = \pm\pi$. Это возможно лишь, если

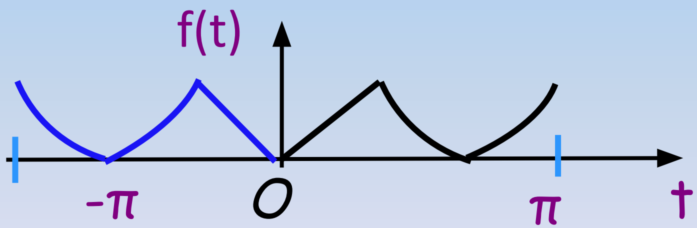
Это возможно лишь, если $f(-\pi) = f(\pi)$. Если же $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то $\tilde{f}(t)$ имеет разрывы первого рода в точках $t_k = (2k+1)\pi$ и в этих точках ряд Фурье функции $\tilde{f}(t)$ будет сходится к $\frac{f\left((2k+1)\pi\right)+f(-(2k+1)\pi)}{2}$.

2. Функция $\boldsymbol{f(t)}$ задана на интервале $\boldsymbol{(-\pi, \pi)}$. Доопределив её на концах интервала $(-\pi, \pi)$ произвольно придем к случаю 1.

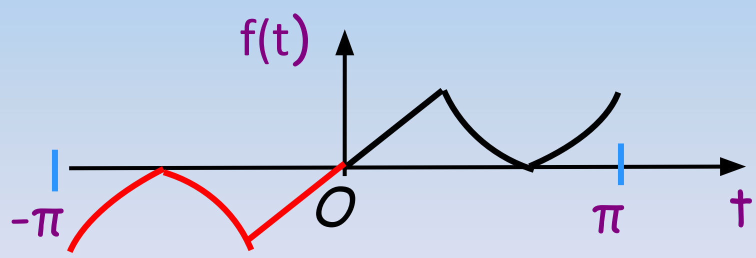
3. Функция $\boldsymbol{f(t)}$ задана на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \boldsymbol{2\pi}]$. Периодически продолжаем $f(t)$ на всю числовую ось. Для вычисления коэффициентов Фурье пользуемся теми же формулами, если бы $f(t)$ была задана на отрезке $[-\pi, \pi]$. Во всех точках непрерывности интервала $(-\pi, \pi)$ построенный ряд Фурье будет сходится к функции $f(t)$, а в точках разрыва к среднему арифметическому предельных значений слева и справа.

Если функцию $f(t)$ допределить на отрезок $[-\pi, 0]$ так, чтобы при $-\pi \le t \le \pi$ было $f(t) = f(-t)$, то в результате получится четная функция. Её разложение в ряд Фурье содержит только косинусы, так как коэффициенты $b_n = 0$.

Если же $f(t)$ же функцию $f(t)$ допределить на отрезок $[-\pi, 0]$ так, чтобы при $-\pi \le t \le \pi$ было $f(t) = -f(-t)$, то в результате получится нечетная функция. Её разложение в ряд Фурье содержит только синусы, так как коэффициенты $a_0 = 0, a_n = 0$.



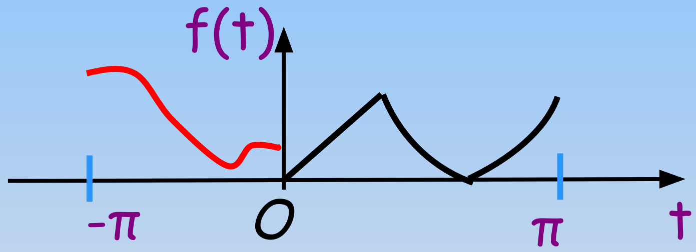
Четное продолжение



Нечетное продолжение

4. Функция $f(t)$ задана на промежутке $[0,\pi]$.

Рассмотрим возможность разложения в тригонометрический ряд функции $f(t)$, заданной на промежутке $[0,\pi]$. Этот случай легко сводится к рассмотренным. Для этого достаточно доопределить значения данной функции в промежутке $[-\pi, 0]$ *произвольным образом*



Теперь уже $f(t)$ будет определена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Далее снова поступаем также, как описано в пункте 1.

Из сказанного следует, что заданную на отрезке $[0, \pi]$ функцию $f(t)$ можно разложить в ряд по синусам или в ряд по косинусам.

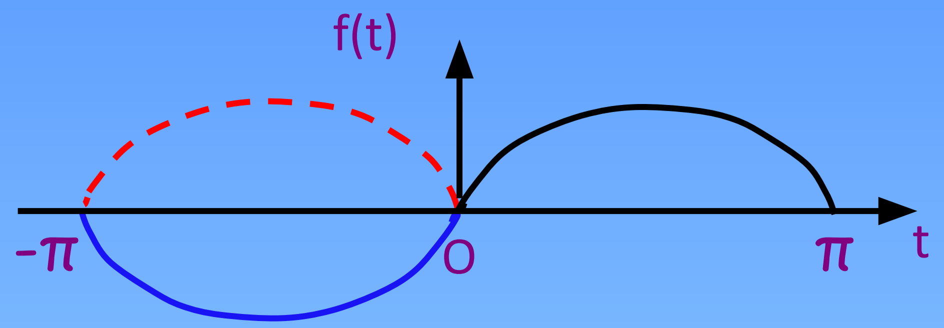
Для практического разложения важное значение имеет вопрос о том какое разложение по синусам или по косинусам лучше? Какой из рядов будет сходится лучше (быстрее)?

Оказывается, характер сходимости ряда Фурье определяется свойствами заданной функции в граничных точках $t = 0$ и $t = \pi$.

Если в точках $t = 0$ и $t = \pi$ функция $f(t) \neq 0$, то периодическое продолжение её по принципу нечетной функции приведёт к разрыву в двух точках $t = 0$ и $t = \pi$. Эти разрывы ликвидируются, если функцию $f(t)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ продолжить чётным образом.

По этой причине разложение в ряд по косинусам обладает лучшими свойствами сходимости, чем разложение в ряд по синусам. В этом случае коэффициенты Фурье a_n убывают со скоростью n^{-2}, а для разложения по синусам коэффициенты Фурье убывают со скоростью n^{-1}.

Если же $f(0) = f(\pi)$, то разложение в ряд по синусам дает гораздо лучшую сходимость, чем разложение в ряд по косинусам. Причина этого кроется в том, что периодическое продолжение $f(t)$ по принципу нечетной функции обеспечивает непрерывность $f(t)$ и её первой производной, в то время как четное продолжение приводит к разрыву производной в точках $t = 0$ и $t = \pi$. В случае нечетного продолжения скорость убывания коэффициентов Фурье b_n порядка n^{-3}.

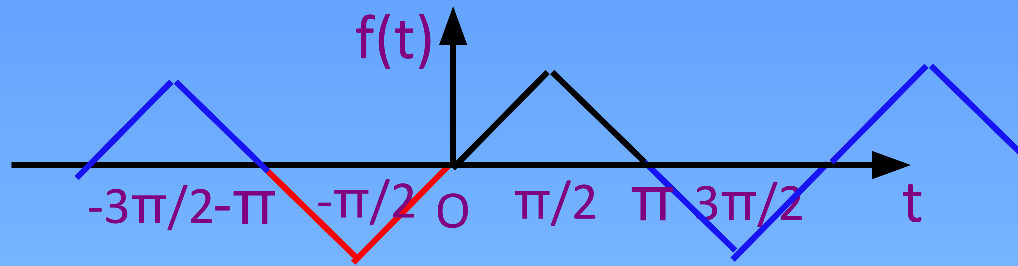


Чётное и нечётное продолжение на промежуток [-π,0]

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(t) = \begin{cases} t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}; \\ \pi - t, \frac{\pi}{2} < t \le \pi. \end{cases}$$

Продолжим $f(t)$ на отрезок [-π,0] нечетным образом (это выгоднее), а затеи продолжим периодически на всю ось t.



Нечётное продолжение с промежутка [0,π] на всю ось

Условия Дирихле на отрезке $[-\pi, \pi]$ выполняются. Находим коэффициенты Фурье. Коэффициенты a_0 и a_n равны нулю, вычисляем коэффициенты b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\sin nt\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\sin nt\,dt = \cdots = \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Использовалась формула: $\int t\sin nt dt = \frac{\sin nt}{n^2} - \frac{t\cos nt}{n}$.

Ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1^2} - \frac{\sin 3t}{3^2} + \frac{\sin 5t}{5^2} - \frac{\sin 7t}{7^2} + .. + (-1)^{n+1}\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^2}..\right)$$

8. Ряд Фурье в комплексной форме

До сих пор речь была о представлении 2π-периодической функции $f(t)$ рядом Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt\,, \qquad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt. \qquad (2)$$

В приложениях преимущественно пользуются другой более компактной формой записи $f(t)$ в виде ряда Фурье – комплексной формой ряда Фурье. Получим эту новую форму записи.

По формулам Эйлера

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t, \;\; e^{-jt} = \cos t - j \sin t.$$

Следовательно

$$\cos nt = \frac{e^{jnt} + e^{-jnt}}{2}, \qquad \sin nt = \frac{e^{jnt} - e^{-jnt}}{2j} \qquad (3)$$

Подставим выражения для $\cos nt$, $\sin nt$ через комплексную экспоненту в формулу (1), получим:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{jnt}+e^{-jnt}}{2} + b_n \frac{e^{jnt}+e^{-jnt}}{2j}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jnt} + \frac{a_n + jb_n}{2j} e^{-jnt}\right) \qquad (4)$$

Из формул (2) видно, что $a_n = a_{-n}$ (a_n – четная функция от n) и $b_n = -b_{-n}$ (b_n – нечетная функция от n). Учитывая это, формулу (4) можно переписать в виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jnt} + \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jnt}\right) = \pm 1, \pm 2,$$

При $n = 0$, $\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jnt} = \frac{a_0}{2}$, так как $b_n = -b_{-n} \Rightarrow b_0 = 0$.

Обозначая $c_n = a_n - jb_n$, окончательно получим

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt}, \qquad (5)$$

где

$$c_n = a_n - jb_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt - j\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ [\cos nt - j\sin nt] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ e^{-jnt} dt.$$

Итак, ряд Фурье в комплексной форме имеет вид (5), где комплексный коэффициент c_n (комплексная амплитуда) определяется по формуле

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ e^{-jnt} dt.$$

Комплексная форма ряда Фурье на отрезке $[-l, l]$ записывается в виде:

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{j\pi n}{l}t}, c_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\ e^{-\frac{j\pi n}{l}t} dt.$$

Амплитуда и фаза n-ой гармоники выражаются через a_n и b_n по формулам: $|c_n| = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$, $\varphi_n = arctg\,\frac{a_n}{b_n}$.

Пример. Функцию $f(t) = e^t, -\pi < t \le \pi$ разложить в ряд Фурье в комплексной форме.

Находим комплексные коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\, e^{-jnt} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-jn)t}\, dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{(1-jn)t}}{1-jn}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1-jn}\left[e^{(1-jn)\pi} - e^{-(1-jn)\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi(1-jn)}\left[e^{\pi} \cdot e^{-jn\pi} - e^{-\pi} \cdot e^{jn\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi(1-jn)}[e^{\pi} \cdot (\cos n\pi - j\sin n\pi) - e^{-\pi} \cdot$$

$$(\cos n\pi - j\sin n\pi)] = \frac{1}{\pi(1-jn)}[e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n] =$$

$$= \frac{2(-1)^n}{\pi(1-jn)} \cdot sh\,\pi.$$

Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} sh\,\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-jn)} e^{jnt} =$$

$$= \frac{sh\,\pi}{\pi}\left[+\cdots \frac{1}{1+2j} e^{-2jt} - \frac{1}{1+j} e^{-jt} + 1 - \frac{1}{1-j} e^{jt} + \frac{1}{1-2j} e^{2jt} + \cdots\right]$$

Чтобы перейти к действительной форме ряда Фурье следует объединить комплексные гармоники с номерами n и $-n$, т.е. подсчитать $\frac{1}{2}\left[c_n e^{jnt} + c_{-n} e^{-jnt}\right]$. В этом примере

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{(1-jn)} e^{jnt} + \frac{(-1)^n}{(1+jn)} e^{-jnt}\right) =$$

$$= (-1)^n \frac{e^{jnt}(1+jn) + e^{-jnt}(1-jn)}{2(1+n^2)} =$$

$$=(-1)^n \frac{\left(e^{jnt}+e^{-jnt}\right) + jn\left(e^{jnt}-e^{-jnt}\right)}{2(1+n^2)} = (-1)^n \frac{\cos nt - n\sin nt}{2(1+n^2)}.$$

Тогда действительная форма ряда Фурье такова:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} sh\,\pi \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nt - \frac{(-1)^n n}{1+n^2}\sin nt\right].$$

9. Спектры периодических функций

Пусть функция $f(t)$ периода $T = 2l$ представима рядом Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt\,, \qquad (1)$$

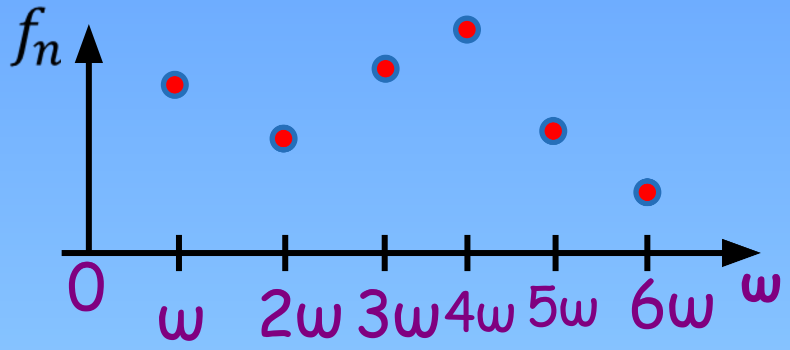
где $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$ – основная частота.

Для приложений также употребляется другая форма записи ряда Фурье

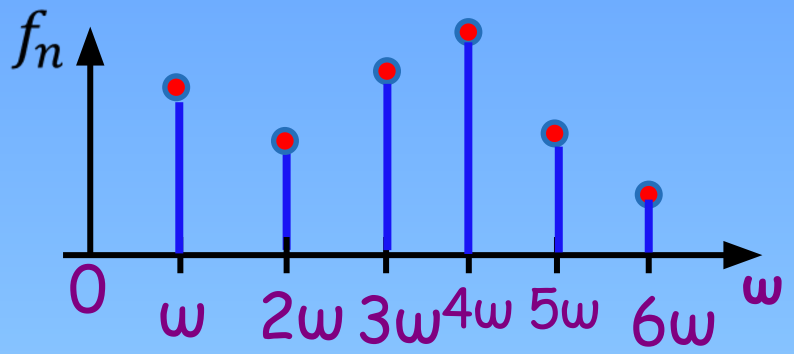
$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(\omega nt + \varphi_n)\,, \qquad (2)$$

где $f_0 = \frac{a_0}{2}$, $f_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = arc\,tg\frac{a_n}{b_n}$.

Величина f_n является амплитудой n-ой гармоники, а φ_n – фазой n-ой гармоники. Из формулы (2) видно, что сложная периодическая функция $f(t)$ вполне и однозначно определяется совокупностью амплитуд $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ и фаз $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$. Последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется амплитудным спектром, а последовательность $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – фазовым спектром функци $f(t)$.



f_n
0
ω
2ω
3ω
4ω
5ω
6ω
ω



f_n
0
ω
2ω
3ω
4ω
5ω
6ω
ω

3. Энергетические характеристики сигнала. Пусть $f(t)$ – сигнал (ток, напряжение). Основными энергетическими характеристиками сигнала $f(t)$ являются:

1) Мгновенная мощность сигнала $p(t) = f^2(t)$;

2) Средняя мощность сигнала за промежуток времени продолжительностью T.

Если сигнал $f_n(t) = a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt$ – гармоника периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$, то его средняя мощность за период равна

$$P_{n,\text{ср.}} = \frac{1}{T}\int_0^T f_n^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt)^2 =$$

$$=\ldots= \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2).$$

Следовательно, если $T -$ периодический сигнал $f(t)$ разложен на гармоники

Искомым тригонометрическим многочленом буде частичная сумма ряда Фурье функции $f(t)$, т.е. многочлен

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega nt+b_n\sin\omega nt),$$

то в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right].$$

Таким образом, средняя за период мощность $T-$ периодического сигнала $f(t)$ равна сумме средних за период мощностей гармонических составляющих.

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Аппарат теории интеграла Фурье находит применение в различных областях науки и технике. Особо важную роль применение интеграла Фурье играет в задачах передачи сигналов.

1. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Пусть функция $f(t)$ (сигнал) описывает некоторый непериодический процесс на промежутке конечной длины $[a, b]$. С целью исследования этого процесса можно *f(t)* разложить в ряд Фурье. Тогда на отрезке $[a, b]$ функция $f(t)$ представляется как сумма гармонических составляющих. За пределами отрезка $[a, b]$ сумма ряда Фурье совпадает со значениями функции *f(t)* на отрезке $[a, b]$.

Если $f(t)$ непериодическая функция, заданная на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$, то для исследования этого непериодического процесса разложение в ряд Фурье не представляется возможным. Из этого положения можно выйти следующим образом: принять, что непериодический сигнал периодический, но с периодом $T \to \infty$ или с частотой $\omega = \frac{2\pi}{T} \to 0$. Тогда гармонические составляющие

$$a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(\omega nt + \psi_n),$$

на которые разлагается сигнал $f(t)$ с периодом T будут отличаться друг от друга на бесконечно малую величину.

Тогда амплитудный спектр становится почти сплошным и следует ожидать, что при $\omega \to 0$ ряд Фурье перейдет в интеграл.

Таким образом, для исследования непериодического сигнала представим функцию $f(t)$ на отрезке $[-l, l]$ рядом Фурье, а затем в полученном разложении перейдем к пределу при $l \to \infty$.

Запишем ряд Фурье такой $2l$-периодической функции

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\omega_n t + b_n \sin \omega_n t)\,, \qquad (1)$$

Где $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$, а коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{\pi n t}{l}\, dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t) \sin\frac{\pi n t}{l}\, dt. \qquad (2)$$

Подставим выражения для коэффициентов a_0, a_n, b_n в ряд Фурье (1) . Обозначая переменную интегрирования τ, получим:

$$f(t)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\tau)d\tau++\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\omega_n\tau d\tau\ \cdot\cos\omega_n t$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sin\omega_n\tau d\tau\ \cdot\sin\omega_n t=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\tau)d\tau+$$

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(\tau)[\cos\omega_n\tau d\tau\ \cdot\cos\omega_n t+\sin\omega_n\tau d\tau\ \cdot\sin\omega_n t]d\tau$$

$$+\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)d\tau \qquad (3)$$

Формула (3) записана в предположении, что на отрезке $[-l,l]$ удовлетворяет условиям Дирихле. Предположим, кроме того, что функция $f(t)$ на интервале $(-\infty,\infty)$ абсолютно интегрируема, т.е. сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$. Заметим, что при $n=0, \omega_n=\frac{\pi n}{l}=0$ и тогда можно записать:

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)d\tau = \int_{-l}^{l} f(\tau)\cos 0\cdot(t-\tau)\tau d\tau =$$
$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\omega_0(t-\tau)\,\tau d\tau$$

Поэтому, прибавляя и вычитая справа в равенстве (3) интеграл $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)d\tau$ можно записать:

$$f(t) = -\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)d\tau \quad (4)$$

Введем новую переменную ω, которая изменяется непрерывно на промежутке $[0,\infty)$ и принимает значения

$$\omega_0 = 0, \omega_1 = \frac{\pi}{l}, \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \ldots, \omega_n = \frac{\pi n}{l}, \ldots \quad .$$

Теперь положим

$\Delta\omega_0 = \omega_1 - \omega_0 = \frac{\pi}{l}$, $\Delta\omega_1 = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\pi}{l}$, $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l} \ldots$. Тогда равенство (4) принимает вид:

$$f(t) = -\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\cdot\Delta\omega_n \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)d\tau \quad (5)$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $l \to \infty$. Первое слагаемое в (5) будет стремиться к нулю. Действительно, функция $f(t)$ по предположению на интервале $(-\infty, \infty)$ абсолютно интегрируема поэтому

$$-\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)d\tau \le \left|-\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)d\tau +\right| \le \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|d\tau \to_{l\to\infty} 0$$

Следовательно,

$$f(t) = \lim_{l\to\infty,\Delta\omega_{n\to 0}} \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\omega_n \int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)d\tau \quad (6)$$

Обозначим

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\,(t-\tau)d\tau.$$

Этот интеграл сходится абсолютно, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)\cos\omega\,(t-\tau)|\,d\tau \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\,d\tau < \infty$$

Заметим, что при больших значениях l интеграл

$$\int_{-L}^{l} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)d\tau \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)d\tau \approx \varphi(\omega_n)$$

сходится и сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta\omega_n \int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)d\tau \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\omega_n)\Delta\omega_n$$

является интегральной суммой для интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)\,d\omega.$$

Поэтому из (6) получаем:

$$f(\tau) = \int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\,(t-\tau)d\tau \qquad (7)$$

Как и для рядов Фурье в точках разрыва значение функции по формуле (7) равно $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$.

Формула (7) называется интегральной формулой Фурье, а её правая часть интегралом Фурье функции $f(t)$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси и на каждом частичном отрезке $[-l, l]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то

1) $f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos\omega\,(t-\tau)d\tau$

во всех точках непрерывности $f(t)$;

2) если t_0 – точка разрыва первого рода функции $f(t)$, то

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos\omega\,(t-\tau)d\tau = \frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}.$$

Функцию

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1;\\ 0{,}5, & |t|=1;\\ 0; & |t|>1\end{cases}$$

представить интегралом Фурье.

Различные формы записи интеграла Фурье

1. **Интеграл Фурье как разложение в сумму гармоник**

В дальнейшем для простоты записи будем считать, что функция $f(t)$ непрерывна на всей числовой оси и абсолютно интегрируема. В таком случае справедлива формула Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\,(t-\tau)d\tau \qquad (1)$$

так как $\cos\omega(t-\tau) = \cos\omega t\cos\omega\tau + \sin\omega t\sin\omega\tau$, то формулу (1) можно переписать в виде

$$f(t) = \int_0^{\infty}\cos\omega t\, d\omega\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau +$$

$$+\int_0^{\infty}\sin\omega t\, d\omega\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau.$$

Обозначим внутренние интегралы через $A(\omega)$, $B(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau, B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau \qquad (2)$$

Тогда формула (1) запишется в виде:

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t]\, d\omega \qquad (3)$$

Нетрудно заметить сходство между интегральной формулой (3) и рядом Фурье. Подынтегральная формула напоминает общий член ряда Фурье, только здесь частота ω меняется непрерывно и пробегает все значения от 0 до ∞ и поэтому вместо суммы стоит интеграл. Функции $A(\omega)$ и $(B(\omega)$ аналогичны формулам для коэффициентов Фурье и при изменении ω от 0 до ∞ указывают закон изменения амплитуд и начальных фаз тех гармонических функции «суммирование» которых осуществляется интегралом Фурье.

Смысл формулы Фурье заключается в представлении функции $f(t)$ суммой синусоидальных составляющих. Действительно, формулу (3) легко записать в виде

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(\omega)\sin(\omega t + \Psi(\omega))\, d\omega, \qquad (4)$$

где $F(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$, $\operatorname{tg}\Psi(\omega) = \frac{A(\omega)}{B(\omega)}$.

Так как $f(t)$ – непериодическая функция, то она может быть задана только суммой бесконечного числа бесконечно малых гармонических слагаемых бесконечно близких по частоте. Ряд Фурье представляет периодическую функцию суммой хоть и бесконечного числа синусоид, но с дискретными частотами. Интеграл Фурье задает непериодическую функцию суммой синусоид с непрерывной последовательностью частот. В этом случае говорят, что в составе непериодической функции имеются все частоты.

2. Интеграл Фурье чётной и нечётной функции.

Представление непериодической функции $f(t)$ интегралом Фурье значительно упрощается, если функция обладает свойством чётности или нечётности.

Пусть $f(t)$ – чётная функция. Тогда

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau = 0.$$

Следовательно, интеграл Фурье для чётной функции принимает вид

$$f(t) = \int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right)\cos\omega t\, d\omega$$

Если же $f(t)$ – нечётная функция, тогда

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau = 0,$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

и

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} B(\omega)\sin\omega t\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right)\sin\omega t\, d\omega$$

Функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ называются соответственно <u>косинус- и синус- преобразованиями Фурье</u>.

В случае четной функции $f(t)$ запишем в симметричном виде, полагая

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

и тогда для четной функции $f(t)$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega \,.$$

В случае нечетной функции $f(t)$ запишем в симметричном виде, полагая

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau$$

и тогда для нечетной функции $f(t)$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega \,.$$

Функции $F_c(\omega)$, $F_s(\omega)$ также называются косинус- и синус- преобразованиями Фурье.

Найти синус преобразование Фурье функции

$$f(t)=\begin{cases}\cos t\,, 0\le t\le\pi;\\ 0, t>\pi.\end{cases}$$

Синус-преобразование определено для нечетных функций, поэтому продолжим $f(t)$ на всю числовую ось нечетным образом

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases}\cos t\,,\ 0\le t\le\pi;\\ -\cos t\,,\ -\pi\le t\le 0;\\ 0, \qquad |t|>\pi.\end{cases}$$

3. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье.

Комплексная форма интеграла Фурье находит широкое применение в практике.

Считая $f(t)$ заданной функцией, запишем интегральную формулу Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\,(t-\tau)d\tau \qquad (1)$$

Легко заметить, что в этой формуле подынтегральная функция $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\,(t-\tau)d\tau$ является четной по переменной ω.

Поэтому можно вместо (1) записать

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\,(t-\tau)d\tau \qquad (2)$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\,(t-\tau)d\tau = 0, \qquad (3)$$

так как здесь подынтегральная функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\,(t-\tau)d\tau$$

– Нечётная функция по переменной ω. Умножая (3) на $j=\sqrt{-1}$, складывая с (2) и учитывая, что $e^{j\alpha}=\cos\alpha+j\sin\alpha$, найдём

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \qquad (4)$$

Это и есть комплексная форма интеграла Фурье.

Рассмотрим интегральную формулу Фурье (интеграл Фурье в комплексной форме) (4).

Введем функцию

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau)}d\tau. \qquad (5)$$

Функция называется прямым преобразованием Фурье или спектральной функцией сигнала; $|F(\omega)|$ называется амплитудным спектром; $\Psi(\omega)=argF\omega)$ – фазовым спектром

Используя (5), формулы (4) запишем в виде

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega. \qquad (6)$$

Переход от функции $F(\omega)$ к функции $f(t)$ по формуле (6) называется обратным преобразованием Фурье.

Рассматривая интеграл Фурье, как предельный случай ряда Фурье при $l \to \infty$, можно заметить, что спектральные линии в пределе сливаются. Поэтому амплитудный спектр непериодического сигнала будет сплошным и его изображают непрерывной линией.

Формулы (5) и (6) показывают, что если известна спектральная плотность $F(\omega)$ сигнала $f(t)$, то можно восстановить сигнал $f(t)$, и, наоборот, по известному сигналу $f(t)$ можно определить его спектральные характеристики: $F(\omega)$ и $\Psi(\omega)$.

Таким образом, описание процессов временными функциями (сигналами) и спектральными функциями равноправны.

При решении конкретных задач, связанных с распространением сигналов, используют ту или иную форму представления, исходя из простоты анализа.

4. О спектре непериодической функции

В рядах Фурье говорилось о спектре периодической функции. А именно, если $T = 2l$–периодическая функция представлена рядом Фурье в комплексной форме

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega nt},$$

то последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$

$$c_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\ e^{-\,j\omega nt} dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$$

называлась спектральной последовательностью или спектром. Периодическая функция $f(t)$ имеет дискретный (не сплошной спектр).

Рассматривая интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье при $T \to \infty$ была получена пара преобразований Фурье

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (1)$$

и

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau)} d\tau. \qquad (2)$$

Из формулы (1) видно, что заданная непериодическая функция $f(t)$представляется «суммой» (интеграл – это сумма!) бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

Ещё точнее суммой бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами?

В результате предельного перехода к интегралу Фурье интервалы между отдельными спектральными линиями неограниченно сближаются ($\omega = \frac{2\pi}{T} \to 0, T \to \infty$) и в пределе спектральные линии сливаются. Это означает, что спектр дискретных точек будет изображаться непрерывной кривой. Такой спектр называется сплошным, а функция $F(\omega)$, определенная формулой (2) называется спектральной функцией (спектральной плотностью, спектром).

Формула (2) позволяет по функции $f(t)$ найти её спектр $F(\omega)$, а формула (1) позволяет вычислить мгновенное значение сигнала $f(t)$ по спектральной функции.

Функция $|F(\omega)|$ называется амплитудным спектром, а функция $\Psi\ (\omega) = arg(\omega)$ называется фазовым спектром.

Очевидно, что $F(\omega) = |F(\omega)|e^{-j\Psi\ (\omega)}$.

Говорят, что периодический сигнал $f(t)$ имеет дискретный спектр (ему соответствует спектральная числовая последовательность $\{c_n\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$), а непериодический сигнал $f(t)$ имеет непрерывный спектр (ему соответствует спектральная функция $F(\omega)$.

С точки зрения физики это означает, что рассматриваемый процесс уже нельзя пострить из гармонических колебаний с определенными изолированными частотами $\omega_n = \frac{\pi l}{n}$. Теперь для построения процесса необходимы колебания всех частот.

Чтобы лучше понять механизм перехода от разложения в ряд Фурье к интегралу Фурье, рассмотрим следующий пример.

Дана последовательность прямоугольных импульсов высоты 1 и ширины 2σ, т.е. периодический сигнал

Дана последовательность прямоугольных импульсов высоты 1 и ширины 2σ, т.е. периодический сигнал с периодом $T = 2l$ определен следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } -\sigma < t < \sigma, \\ 0, \text{при } -l \leq t < -\sigma \text{ и при } \sigma < t \leq l. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты Фурье этой последовательности прямоугольных импульсов.

$c_n =$

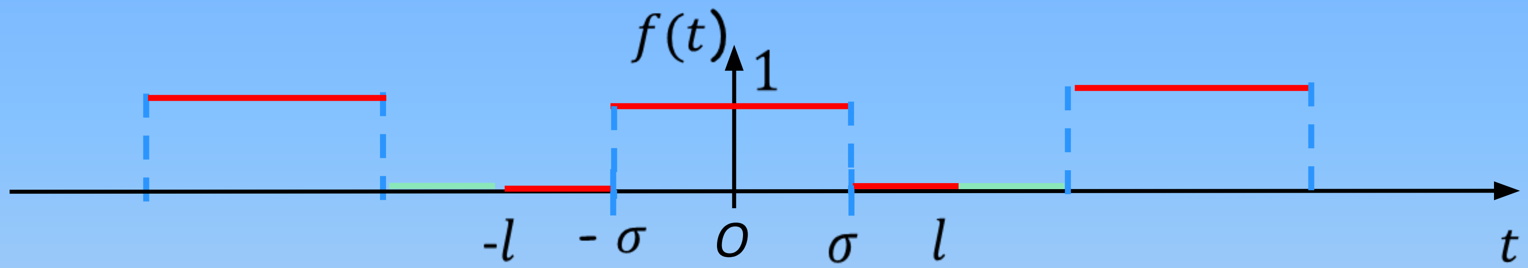
$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{l}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-j\frac{\pi n}{l}t}dt = \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{-j\pi n} e^{-j\frac{\pi n}{l}t}\Big|_{-\sigma}^{\sigma} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi n\sigma}{l}}{\pi n} = \frac{2\sigma}{l} \cdot \frac{\sin\frac{\pi n\sigma}{l}}{\frac{\pi n\sigma}{l}}.$$

Следовательно, амплитудный спектр

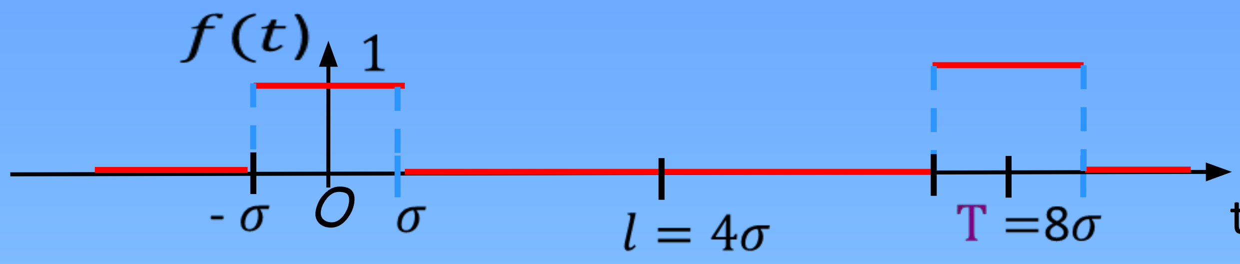
$$|c_n| = \frac{2\sigma}{l} \cdot \left|\frac{\sin\frac{\pi n\sigma}{l}}{\frac{\pi n\sigma}{l}}\right|.$$

Как видно, амплитуды гармоник зависят от отношения $\left|\frac{\sin\frac{\pi n\sigma}{l}}{\frac{\pi n\sigma}{l}}\right|$. Построим спектральные линии $|c_n|$ при различных значениях отношения $\frac{\sigma}{l}$. 1) $\frac{\sigma}{l} = \frac{1}{2}$, $(l = 2\sigma, \sigma = 1, l = 2)$.



$$c_n = \frac{|\sin\pi n/2|}{\pi n/2} \qquad \varphi(x) = \frac{|\sin\pi x/2|}{\pi x/2}$$

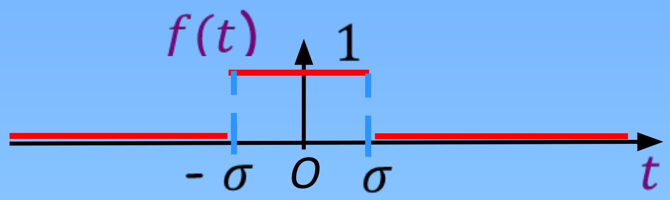
2) $\frac{\sigma}{l} = \frac{1}{4}, (l = 4\sigma, \sigma = 1, l = 4).$



$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left|\sin\frac{\pi n}{4}\right|}{\frac{\pi n}{4}} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left|\sin\frac{\pi x}{4}\right|}{\frac{\pi x}{4}}$$

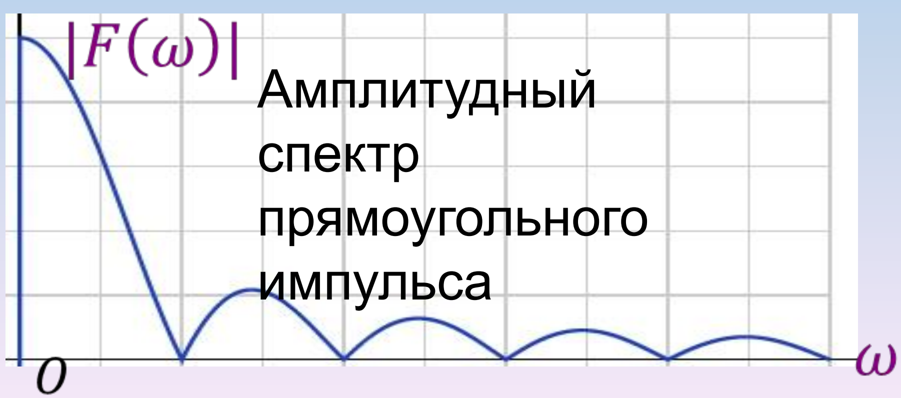
Замечаем, что при увеличении периода импульсы всё дальше отстоят друг от друга, линии спектра сближаются. В пределе при $l \to \infty$ ($\sigma = 1$ остается прежним) функция $f(t)$ сводится к одиночному импульсу

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } |t| < \sigma, \\ 0, & \text{при } |t| > \sigma. \end{cases}$$



Найдем спектральную функцию и амплитудный спектр этого импульса

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau)} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-j\omega\tau)} d\tau = \frac{\sin \omega\sigma}{\pi\omega}$$



5. Спектральные плотности некоторых сигналов.

1. Единичная функция Хевисайда $\chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$

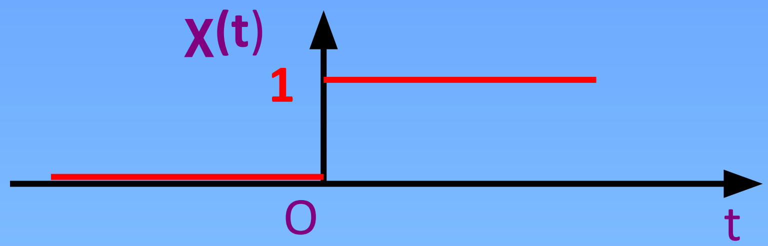
Функция Хевисайда не является абсолютно интегрируемой. Поэтому найти спектральную плотность непосредственно не удаётся. Умножим функцию $\chi(t)$ на затухающую экспоненту $e^{-\alpha t}, \alpha > 0$ и найдем спектр функции $\chi(t)e^{-\alpha t}$, а затем перейдем к пределу при $\alpha \to 0$.

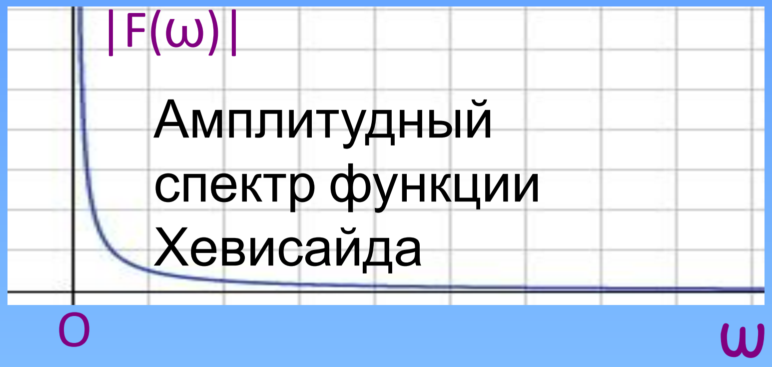
Получаем:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha \to 0} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha \to 0} \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{-(\alpha + j\omega)\tau}}{-(\alpha + j\omega)\tau} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} j\omega}.$$





2. **Косинусоидальный импульс**.

$$f(t)=\begin{cases} h\cos\dfrac{\pi t}{\sigma},\ \text{при } |t|<\dfrac{\sigma}{2};\\ 0,\ \text{при } |t|>\dfrac{\sigma}{2}. \end{cases}$$

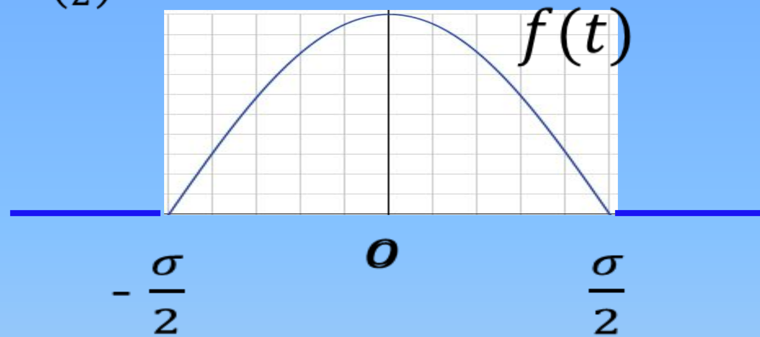
Найдем спектральную плотность. При вычислении спектральной функции использовалась формула Эйлера:

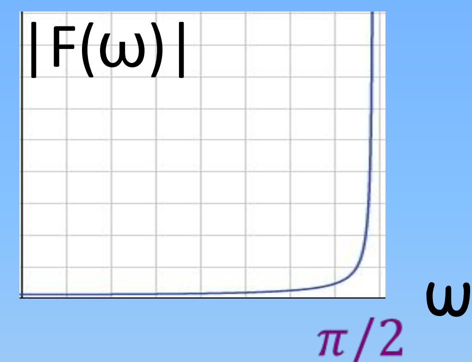
$$\cos\varphi=\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} h\cos\frac{\pi t}{\sigma}e^{-j\omega t}=$$

$$=\frac{h}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma/2}^{\sigma/2}\left(e^{\frac{j\pi t}{2}}+e^{-\frac{j\pi t}{2}}\right)e^{-j\omega t}=\frac{h}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma/2}^{\sigma/2}e^{\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right)jt}=\dots$$

$$\dots=\frac{h}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\cos\frac{\omega\sigma}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\omega^2}.$$



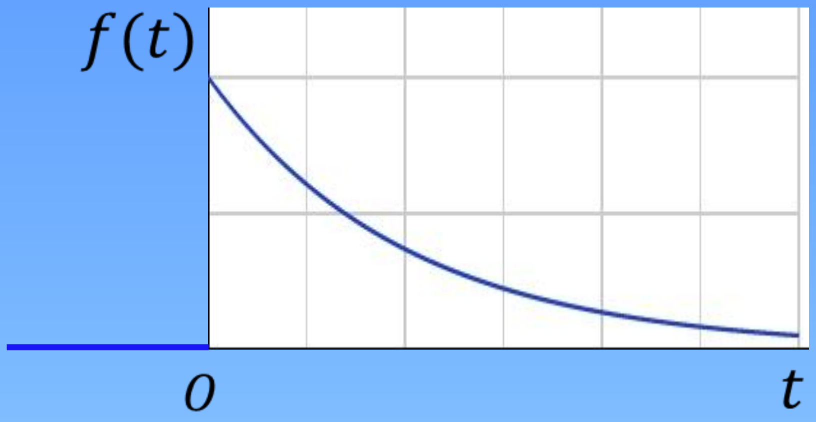


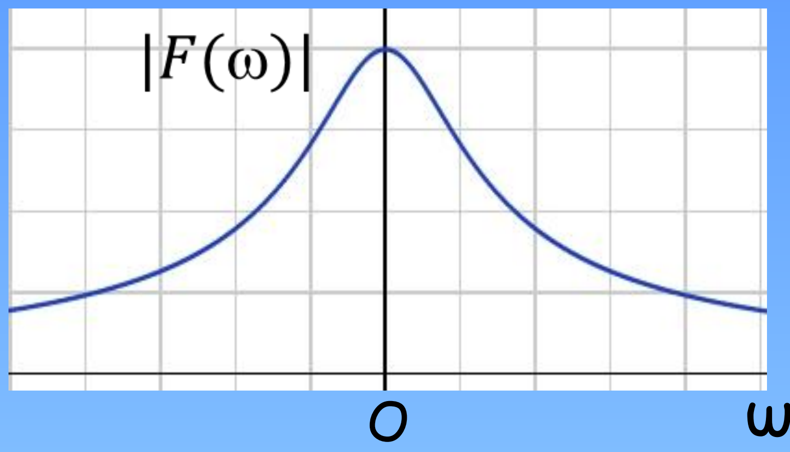
Косинусоидальный импульс и его амплитудный спектр

3. **Спектр экспоненты.**

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at}, & \text{при } t>0, a>0; \\ 0, & \text{при } |t|<0. \end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-(a+j\omega)t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+j\omega)}.\quad |F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$





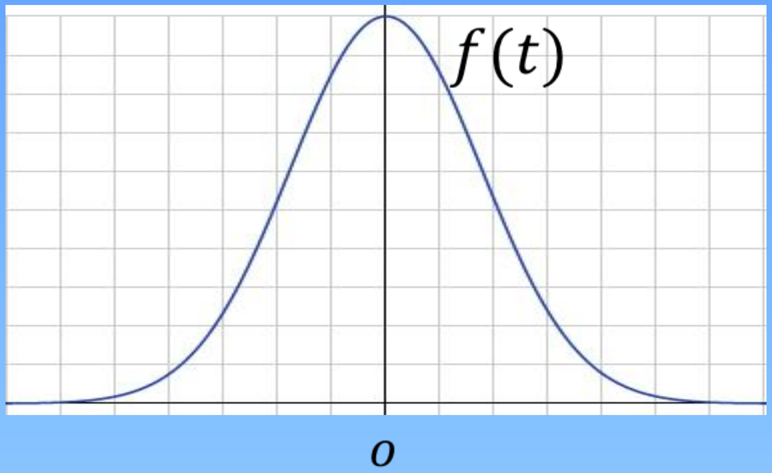
Экспоненциальный импульс и его амплитудный спектр

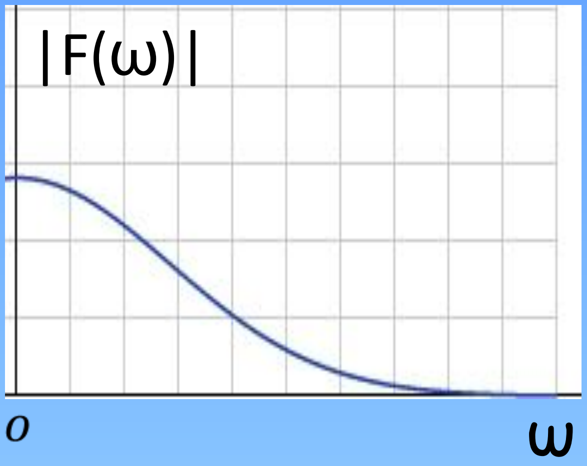
4. **Спектр «колокольного импульса»** $\boldsymbol{f(t) = e^{-\beta^2 t^2}}$.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 t^2} e^{-j\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\beta t + j\frac{\omega}{2\beta}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_{0}^{\infty} e^{-u} du = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}}{\beta}.$$

Проверить вычисления!





«Колокольный» импульс и его амплитудный спектр

Сферы применения аппарата интеграла Фурье

Аппарат теории интеграла Фурье находит применение в различных областях науки и технике. Особо важную роль применение интеграла Фурье играет в задачах передачи сигналов. См. Дудина Ю.В., Чукова О.В. Преобразование Фурье.