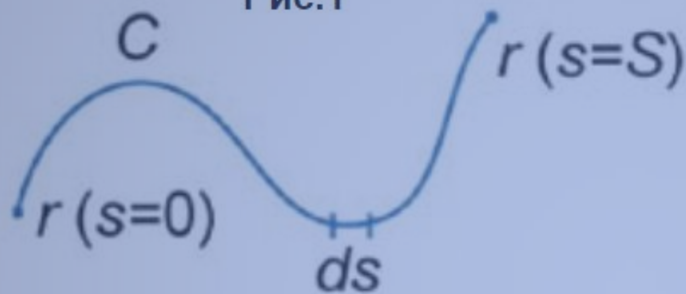
Криволинейные интегралы первого рода

Определение

Пусть кривая C описывается векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $0 \leq s \leq S$, где переменная s представляет собой *длину дуги* кривой (рисунок 1).

Рис.1



Если на кривой C определена *скалярная функция* F, то интеграл

$\int_0^S F(\mathbf{r}(s))\,ds$ называется *криволинейным*

интегралом первого рода от скалярной функции F вдоль кривой C и обозначается как

$$\int_C F(x, y, z)\,ds \quad \text{или} \quad \int_C F ds.$$

Криволинейный интеграл $\int_C F ds$ существует, если функция F непрерывна на кривой C.

Свойства криволинейного интеграла первого рода

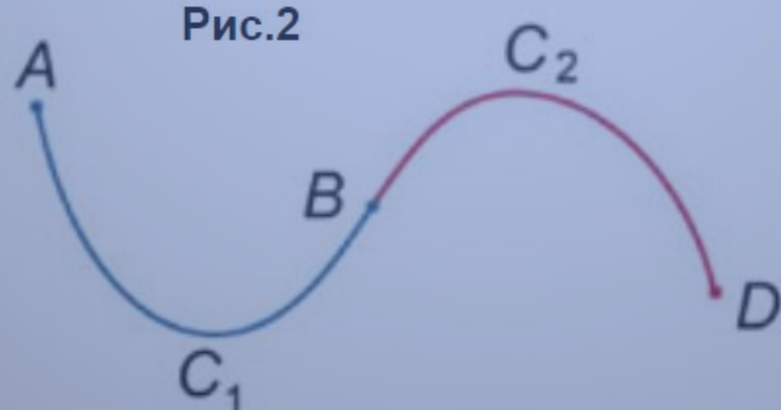
Криволинейный интеграл I рода обладает следующими свойствами:

1. Интеграл не зависит от ориентации кривой;

2. Пусть кривая C_1 начинается в точке A и заканчивается в точке B, а кривая C_2 начинается в точке B и заканчивается в точке D (рисунок 2). Тогда их объединением будет называться кривая $C_1 \cup C_2$, которая проходит от A к B вдоль кривой C_1 и затем от B к D вдоль кривой C_2. Для криволинейных интегралов первого рода справедливо соотношение

$$\int\limits_{C_1 \cup C_2} F ds = \int\limits_{C_1} F ds + \int\limits_{C_2} F ds;$$

Рис.2



3. Если гладкая кривая C задана параметрически соотношением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ и скалярная функция F непрерывна на кривой C, то

$$\int\limits_C F(x,y,z)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt;$$

4. Если C является гладкой кривой в плоскости Oxy, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int\limits_C F(x,y)\,ds = \int\limits_a^b F(x,f(x))\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx;$$

5. Если гладкая кривая C в плоскости Oxy определена уравнением $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, то

$$\int\limits_C F(x,y)\,ds = \int\limits_c^d F(\varphi(y),y)\sqrt{1 + \left(\varphi'(y)\right)^2}dy;$$

6. В полярных координатах интеграл $\int\limits_C F(x,y)\,ds$ выражается формулой

$$\int\limits_C F(x,y)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta,$$

где кривая C задана в полярных координатах функцией $r(\theta)$.

Пример 1

Найти интеграл $\int\limits_C x^2 y ds$ вдоль отрезка прямой $y = x$ от начала координат до точки $(2, 2)$ (рисунок 3).

Решение.

$$\int\limits_C x^2 y ds = \int\limits_0^2 x^2 \cdot x\sqrt{1+1^2}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^2 x^3 dx = \sqrt{2}\left[\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2\right] = 4\sqrt{2}.$$

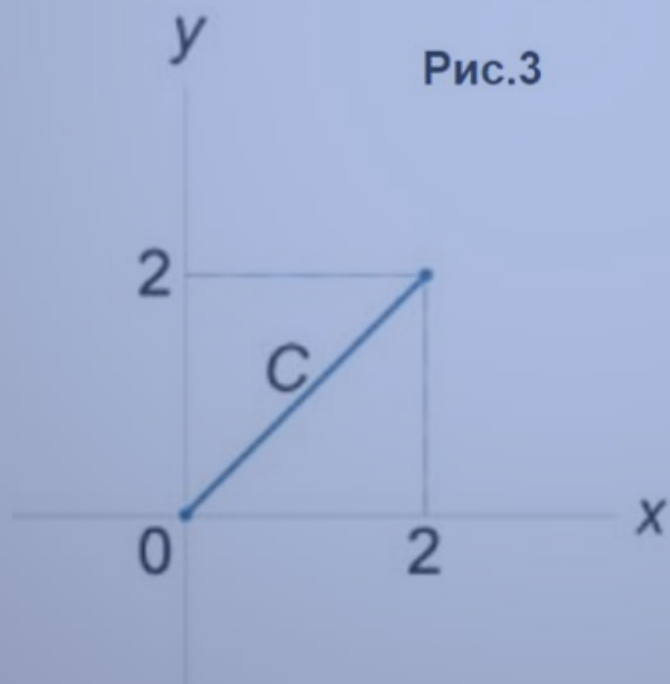


Рис.3

Пример 2

Вычислить интеграл $\int\limits_C y^2 ds$, где C – дуга окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Запишем дифференциал дуги кривой:

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt = adt.$$

Тогда, применяя формулу

$$\int\limits_C F(x,y,z)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt$$

в плоскости Oxy, получаем

$$\int\limits_C y^2 ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\cdot adt = a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left[\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^3\pi}{4}.$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\int\limits_C x^2 ds$, где C – кривая, заданная уравнением

$$y = f(x) = \ln x,\ 1 \le x \le e.$$

Решение.

Используем формулу

$$\int\limits_C F(x,y)\,ds = \int\limits_a^b F(x, f(x))\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Здесь

$$\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{1 + \left[(\ln x)'\right]^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_C x^2 ds = \int\limits_1^e x^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \int\limits_1^e \sqrt{1+x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^e \sqrt{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^e\right] = \frac{1}{3}\left[\left(1+e^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\sqrt{\left(1+e^2\right)^3} - \sqrt{8}}{3} \approx 7,16.$$

Пример 4

Вычислить интеграл $\int\limits_C ds$, где C является отрезком прямой от точки $O\,(0,0)$ до $A\,(1,2)$ (рисунок 4).

Решение.

Найдем сначала уравнение отрезка OA.

$$\frac{y-y_O}{y_A-y_O}=\frac{x-x_O}{x_A-x_O},\ \Rightarrow \frac{y-0}{2-0}=\frac{x-0}{1-0},\ \Rightarrow \frac{y}{2}=\frac{x}{1}\ \text{ или }\ y=2x.$$

Применяя формулу

$$\int\limits_C F\,(x,y)\,ds=\int\limits_a^b F\,(x,f\,(x))\sqrt{1+\left(f'\,(x)\right)^2}dx,$$

находим искомый криволинейный интеграл.

$$\int\limits_C ds=\int\limits_0^1\sqrt{1+2^2}dx=\sqrt{5}\int\limits_0^1 dx=\sqrt{5}\cdot\left[x|_0^1\right]=\sqrt{5}.$$

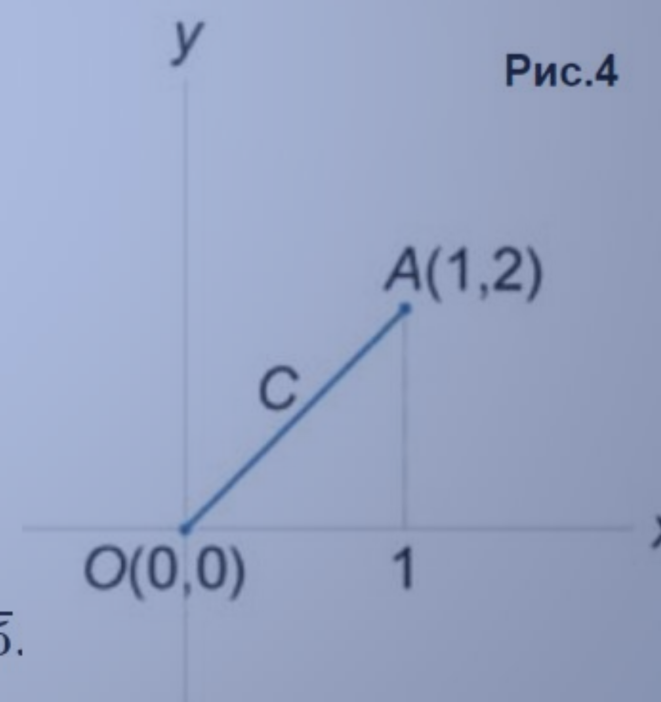


Рис.4

Пример 5

Вычислить интеграл $\int\limits_C (x^2+y^2)\,zds$, где кривая C задана параметрически в виде $\mathbf{r}(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 4t)$, $0 \le t \le \pi$.

Решение.

Применяя формулу

$$\int\limits_C F(x,y,z)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt,$$

можно записать

$$\int\limits_C (x^2+y^2)\,zds = \int\limits_0^\pi (\sin^2 3t + \cos^2 3t)\cdot 4t \cdot \sqrt{(3\cos 3t)^2 + (-3\sin 3t)^2 + 16}\,dt$$

$$= 4\int\limits_0^\pi t\sqrt{9(\cos^2 3t + \sin^2 3t) + 16}\,dt = 20\int\limits_0^\pi tdt = 20\left[\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^\pi\right] = 10\pi^2.$$

Пример 6

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C \frac{ds}{y-x}$, где кривая C − отрезок прямой от точки $(0, -2)$ до $(4, 0)$ (рисунок 5).

Решение.

Найдем уравнение отрезка AB. $\dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A}, \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y+2}{0+2} = \frac{x-0}{4-0}, \Rightarrow \frac{y+2}{2} = \frac{x}{4} \text{ или } y = \frac{x}{2} - 2.$$

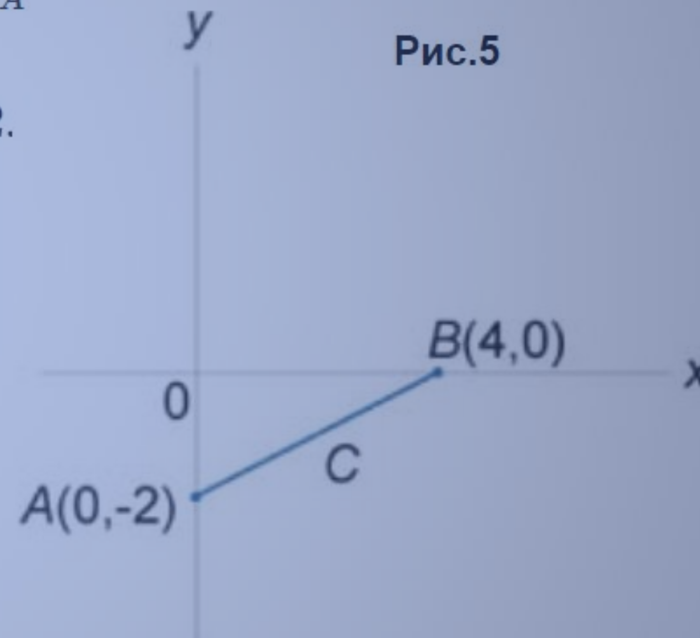


Рис.5

По формуле

$$\int\limits_C F(x,y)\,ds = \int\limits_a^b F(x, f(x))\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$

находим заданный интеграл:

$$\int\limits_C \frac{ds}{y-x} = \int\limits_0^4 \frac{1}{\frac{x}{2} - 2 - x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}dx = \int\limits_0^4 \frac{1}{-2 - \frac{x}{2}}\sqrt{\frac{5}{4}}dx = -\frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^4 \frac{dx}{x+4}$$

$$= -\sqrt{5}\left[(\ln|x+4|)\Big|_0^4\right] = -\sqrt{5}\,(\ln 8 - \ln 4) = -\sqrt{5}\ln 2 \approx -1,55.$$

Пример 7

Найти криволинейный интеграл $\int\limits_C xyds$, где кривая C является дугой эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$ лежащей в первом квадранте (рисунок 6).

Решение.

Запишем уравнение эллипса в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

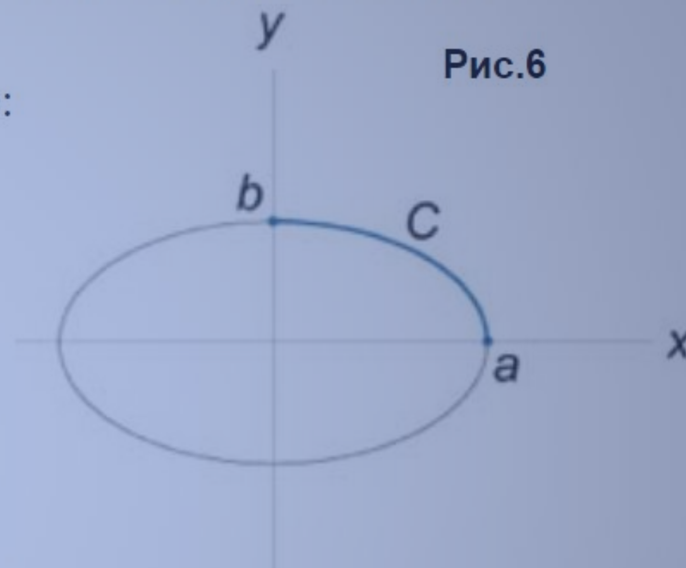


Рис.6

Диапазон изменений t для первого квадранта равен

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Следовательно, по формуле

$$\int\limits_C F(x,y)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

заданный интеграл преобразуется следующим образом:

$$I = \int\limits_C xyds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot b\sin t \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot b\sin t \cdot \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt.$$

Сделаем замену переменной. Положим $a\sin t = u$ или $\sin t = \dfrac{u}{a}$. Тогда

$$a\cos t dt = du, \quad b^2\cos^2 t = b^2\left(1-\sin^2 t\right) = b^2\left[1-\left(\frac{u}{a}\right)^2\right].$$

Уточним пределы интегрирования. Если $t=0$, то $u=0$, а при $t=\dfrac{\pi}{2}$ получаем $u=a$.
В результате интеграл становится равным

$$I=\int\limits_0^a u\cdot b\cdot\frac{du}{a}\cdot\sqrt{u^2+\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-u^2\right)}du=\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{u^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}u^2}udu=\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{b^2+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)u^2}udu.$$

Для вычисления полученного интеграла удобно сделать еще одну замену.

$$p=b^2+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)u^2, \;\Rightarrow dp=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cdot 2udu, \;\Rightarrow udu=\frac{a^2dp}{2\left(a^2-b^2\right)}.$$

Если $u=0$, то $p=b^2$ и, соответственно, если $u=a$, то $p=a^2$. Таким образом,

$$I=\frac{b}{a}\int\limits_{b^2}^{a^2}\sqrt{p}\frac{a^2}{2\left(a^2-b^2\right)}dp=\frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\int\limits_{b^2}^{a^2}\sqrt{p}dp=\frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\left[\left.\left(\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right|_{b^2}^{a^2}\right]$$

$$=\frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\cdot\frac{2}{3}\left(a^3-b^3\right)=\frac{ab}{3\left(a-b\right)}\cdot\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)=\frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3\left(a+b\right)}.$$

Криволинейные интегралы второго рода

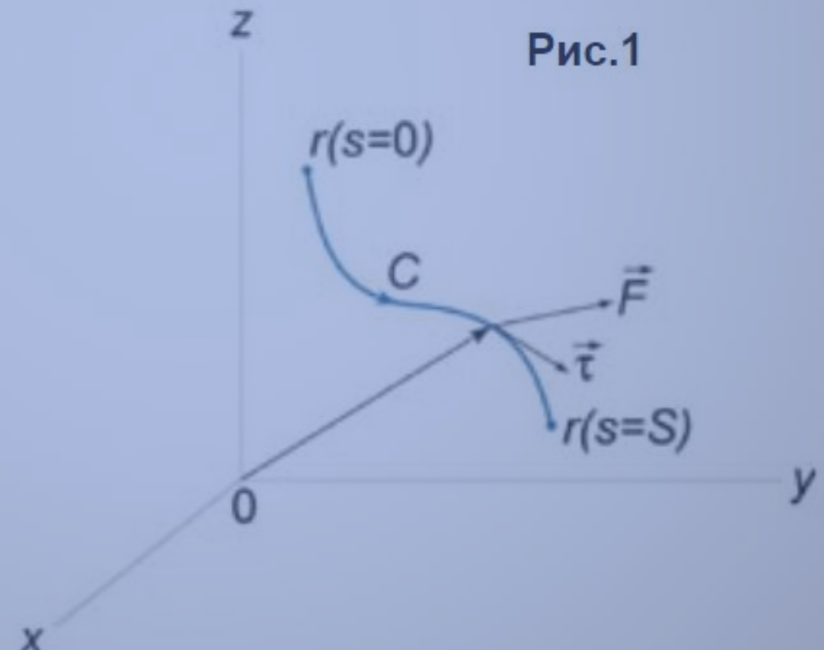
Определение

Предположим, что кривая C задана векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $0 \le s \le S$, где переменная s – длина дуги кривой. Тогда производная векторной функции

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

представляет собой единичный вектор, направленный вдоль касательной к данной кривой (рисунок 1).

Рис.1



В приведенной выше формуле α, β и γ – углы между касательной и положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz, соответственно.

чтобы для скалярной функции

$$\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

существовал криволинейный интеграл $\int\limits_C (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau})\,ds$. Такой интеграл $\int\limits_C (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau})\,ds$ называется *криволинейным интегралом второго рода* от векторной функции $\mathbf{F}$ вдоль кривой C и обозначается как

$$\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_0^S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds,$$

где $\boldsymbol{\tau}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор касательной к кривой C.

Последнюю формулу можно переписать также в векторной форме:

$$\int\limits_C (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}) = \int\limits_0^S (\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))\cdot\boldsymbol{\tau})\,ds, \quad \text{где } d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)\,.$$

Если кривая C лежит в плоскости Oxy, то полагая $R=0$ получаем

$$\int_C P dx + Q dy = \int_0^S (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\, ds.$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода

Криволинейный интеграл II рода обладает следующими свойствами:

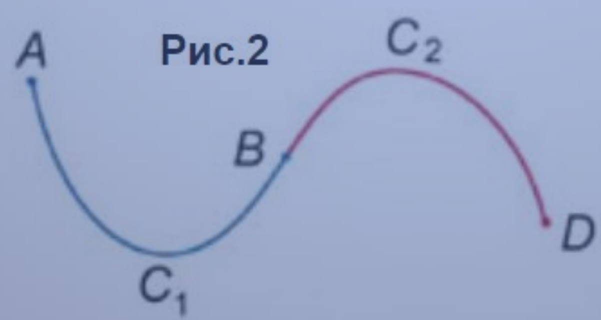
1. Пусть C обозначает кривую с началом в точке A и конечной точкой B. Обозначим через $-C$ кривую противоположного направления − от B к A. Тогда

$$\int_{-C} (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}) = -\int_C (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r});$$

2. Если C − объединение кривых C_1 и C_2 (рисунок 2), то

$$\int_C (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}) = \int_{C_1\cup C_2} (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}) = \int_{C_1} (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}) + \int_{C_2} (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r});$$

Рис.2



3. Если кривая C задана параметрически в виде $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int\limits_C P dx + Q dy + R dz = \int\limits_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + \right.$$

$$\left. + Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt.$$

4. Если кривая C лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = f(x)$ (предполагается, что $R = 0$ и $t = x$), то последняя формула записывается в виде

$$\int\limits_C P dx + Q dy = \int\limits_a^b \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \frac{df}{dx} \right] dx.$$

Пример 1

Вычислить интеграл $\int\limits_C y dx - x dy$, где кривая C задана параметрически в виде $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Используя формулу

$$\int\limits_C P dx + Q dy = \int\limits_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt,$$

находим ответ:

$$\int\limits_C y dx - x dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \frac{d(\cos t)}{dt} - \cos t \frac{d(\sin t)}{dt} \right) dt$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t(-\sin t) - \cos t \cos t)\, dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2

Найти интеграл $\int\limits_C xdy - ydx$ вдоль кривой C, заданной уравнением $y = x^3$, от точки $(0,0)$ до $(2,8)$.

Решение.

Для вычисления данного криволинейного интеграла воспользуемся формулой

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\frac{df}{dx}\right]dx.$$

Подставляя $y = x^3$ и $dy = 3x^2dx$ в подынтегральное выражение, получаем

$$\int\limits_C xdy - ydx = \int\limits_0^2 x \cdot 3x^2dx - x^3dx = \int\limits_0^2 2x^3dx = 2\left[\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^8\right] = 8.$$

Пример 3

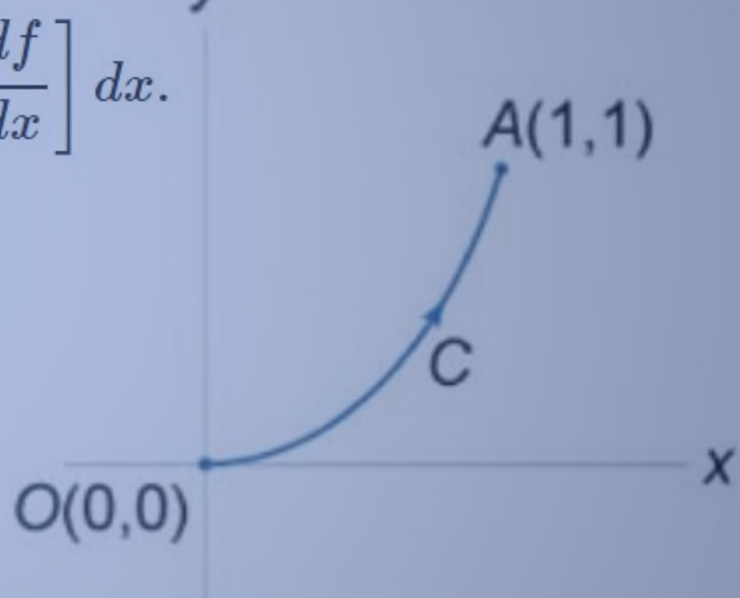
Вычислить $\int\limits_C \sqrt{x}dx + \sqrt{y}dy$ вдоль кривой $y = x^2$ от точки $O(0,0)$ до $A(1,1)$ (рисунок 3).

Решение.

Используем формулу

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\frac{df}{dx}\right]dx.$$

Рис.3



Подставляя $y = x^2$ и $dy = 2xdx$ в подынтегральное выражение, находим ответ:

$$\int\limits_C \sqrt{x}dx + \sqrt{y}dy = \int\limits_0^1 \sqrt{x}dx + x \cdot 2xdx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^2\right)dx = \left.\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{2x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Пример 4

Вычислить $\int\limits_C y dx + x dy$ вдоль кривой $y = x^2$ от точки $O(0,0)$ до $A(1,1)$ (рисунок 3).

Решение.

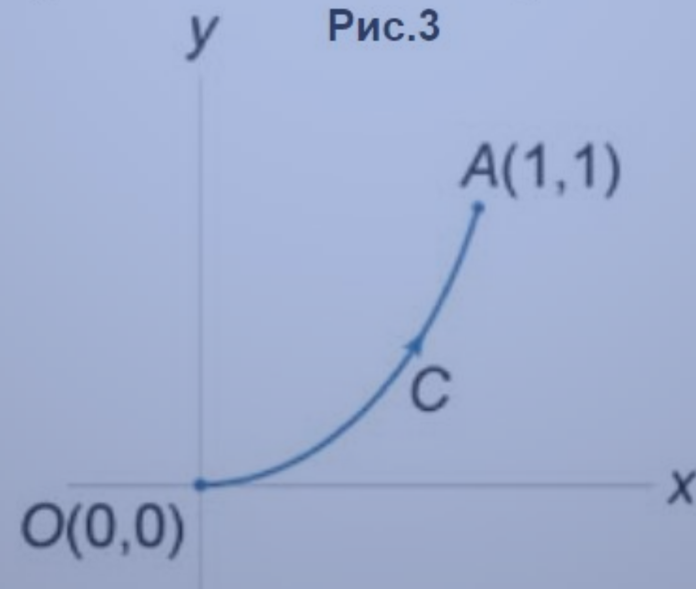
Если $y = f(x) = x^2$, то по формуле

$$\int\limits_C P dx + Q dy = \int\limits_a^b \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \frac{df}{dx} \right] dx.$$

получаем

$$\int\limits_C y dx + x dy = \int\limits_0^1 \left(x^2 + x \cdot 2x\right) dx = \int\limits_0^1 3x^2 dx = 3 \cdot \left.\left(\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = 1.$$

Рис.3



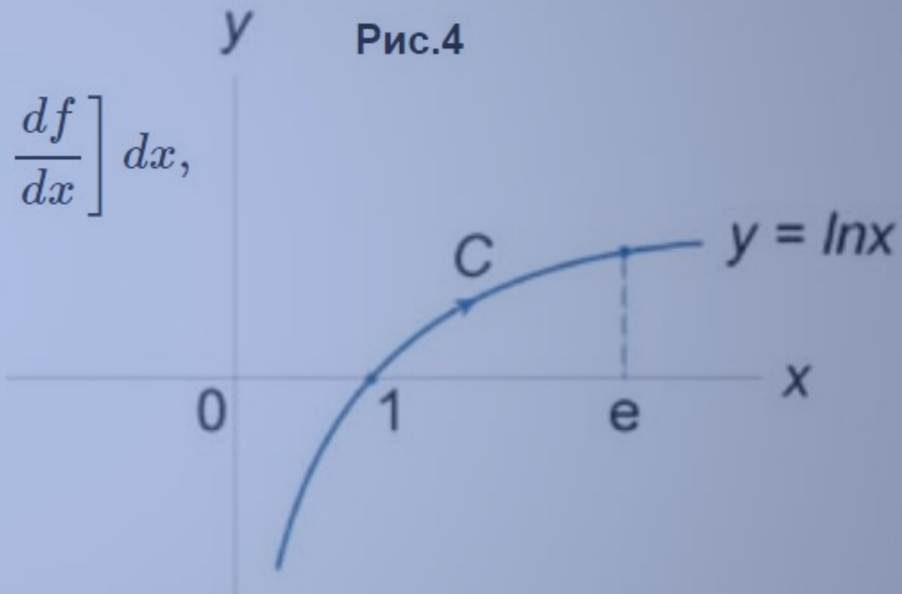
Пример 5

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C \frac{y}{x}dx + dy$ вдоль кривой $y = \ln x$ в интервале $1 \le x \le e$ (рисунок 4).

Решение.

Поскольку $y = \ln x$, то дифференциал равен $dy = \frac{dx}{x}$. В соответствии с формулой

Рис.4



$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, f\left(x\right)\right) + Q\left(x, f\left(x\right)\right)\frac{df}{dx}\right]dx,$$

находим решение:

$$\int\limits_C \frac{y}{x}dx + dy = \int\limits_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx + \int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \int\limits_1^e \ln x d\left(\ln x\right) + \int\limits_1^e \frac{dx}{x}$$

$$= \left[\frac{\left(\ln x\right)^2}{2} + \ln x\right]\Bigg|_1^e = \left(\frac{\left(\ln e\right)^2}{2} + \ln e\right) - \left(\frac{\left(\ln 1\right)^2}{2} + \ln 1\right) = \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{3}{2}.$$

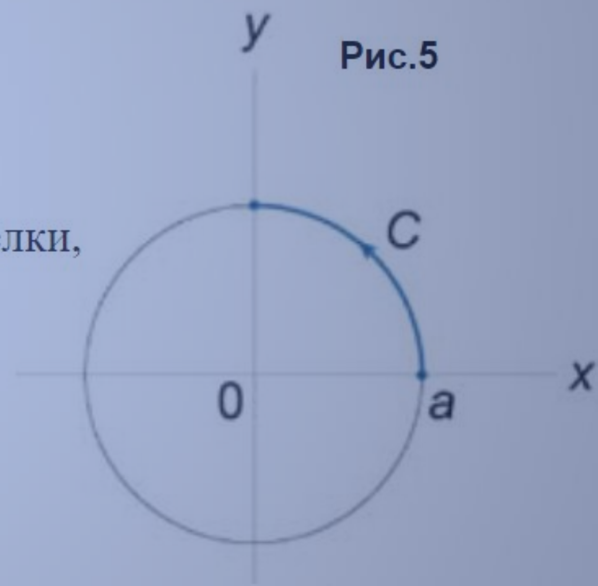
Пример 6

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C x^2dx - xydy$, где C − дуга окружности, лежащая в первом квадранте,
обход которой осуществляется против часовой стрелки (рисунок 5).

Решение.
Очевидно, что дуга окружности описывается функцией $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, a − радиус окружности. (поскольку $y > 0$ в первом квадранте.) Тогда дифференциал равен

$$dy = \frac{dy}{dx}dx = \frac{d\sqrt{a^2 - x^2}}{dx}dx = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Рис.5



Поскольку мы обходим кривую в направлении против часовой стрелки, то нижний и верхний пределы интегрирования равны, соответственно, a и 0. Следовательно,

$$\int\limits_C x^2dx - xydy = \int\limits_a^0 x^2dx - x\sqrt{a^2 - x^2}\left(-\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx =$$

$$= \int\limits_a^0 2x^2dx = 2\left[\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^0\right] = -\frac{2a^3}{3}.$$

Пример 7

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C y^2dx + xydy$, где C – дуга эллипса (рисунок 6), заданного параметрически в виде $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Запишем все выражения через параметр t :

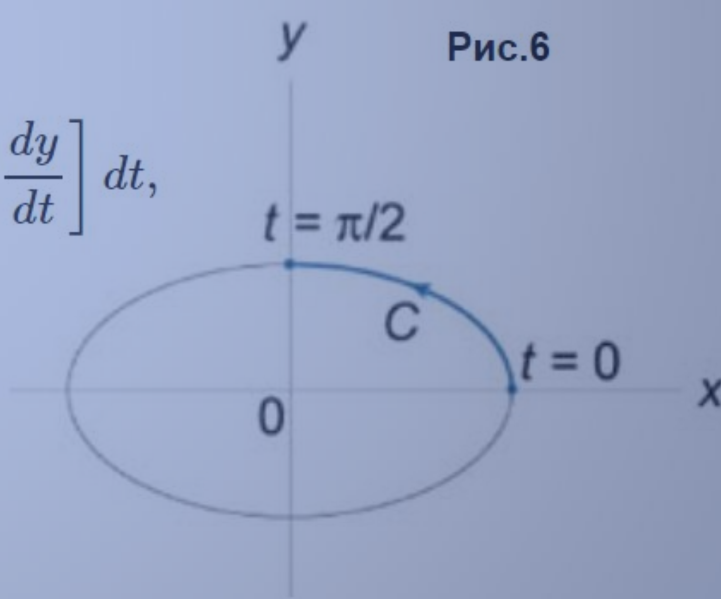
$$y^2 = b^2\sin^2 t, \ \frac{dx}{dt} = -a\sin t, \ xy = ab\cos t\sin t, \ \frac{dy}{dt} = b\cos t.$$

Далее, используя формулу

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right]dt,$$

можно записать

Рис.6



можно записать

$$\int\limits_C y^2dx + xydy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[b^2\sin^2 t \cdot (-a\sin t) + ab\cos t\sin t \cdot b\cos t\right] dt$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-ab^2\sin^3 t + ab^2\cos^2 t\sin t\right] dt = ab^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin t\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)\right] dt = ab^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos 2t dt$$

$$= ab^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(\sin 3t + \sin(-t))\right] dt = \frac{ab^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3t - \sin t)\, dt = \frac{ab^2}{2}\left[\left(-\frac{\cos 3t}{3} + \cos t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

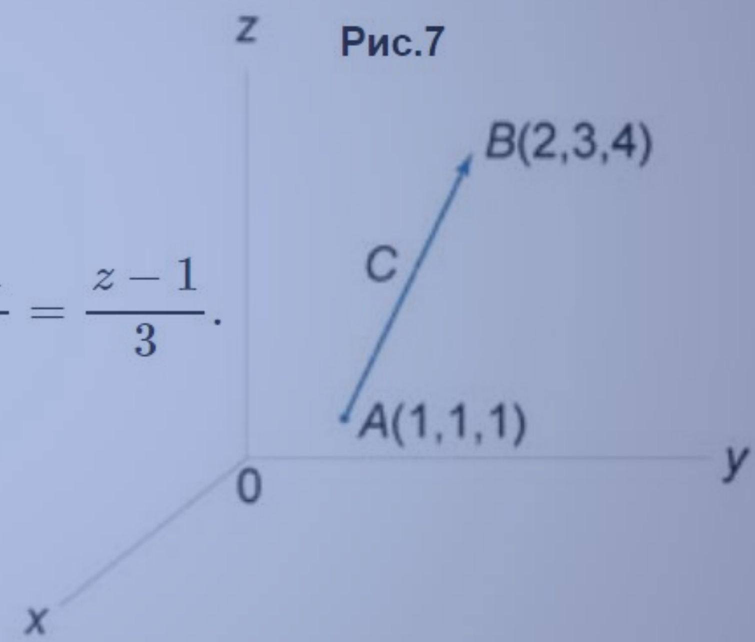
$$= \frac{ab^2}{2}\left[0 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right] = -\frac{ab^2}{3}.$$

Пример 8

Найти интеграл $\int\limits_C xdx + ydy + (x+y-1)\,dz$ вдоль линии C, представляющей собой отрезок прямой от точки $A\,(1,1,1)$ до точки $B\,(2,3,4)$ (рисунок 7).

Решение.

Сначала составим уравнение прямой AB :



$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A},\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{4-1},\ \Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Введем параметр t :

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}=t,$$

и перепишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x-1=t \\ y-1=2t \\ z-1=3t \end{cases},\ \Rightarrow\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=3t+1 \end{cases}.$$

Далее применяем формулу

$$\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left[P\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)\frac{dx}{dt} + Q\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)\frac{dy}{dt} + R\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)\frac{dz}{dt}\right]dt.$$

Очевидно, что параметр t изменяется в интервале $[0, 1]$. Тогда криволинейный интеграл равен

$$\int\limits_C xdx + ydy + \left(x + y - 1\right)dz$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\left(t+1\right)\frac{d\left(t+1\right)}{dt} + \left(2t+1\right)\frac{d\left(2t+1\right)}{dt} + \left(t+1+2t+1-1\right)\frac{d\left(3t+1\right)}{dt}\right]dt$$

$$= \int\limits_0^1 \left[t + 1 + \left(2t+1\right)\cdot 2 + \left(3t+1\right)\cdot 3\right]dt = \int\limits_0^1 \left(14t + 6\right)dt = \left.\left(7t^2 + 6t\right)\right|_0^1 = 13.$$