

ЛЕКЦИЯ № 1

«ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»



ПЛАН:

1. Случайные события. Предмет теории вероятности. Определение вероятности (статистическое и классическое).
2. Классификация событий. Понятие о совместных и несовместных, зависимых и независимых событиях. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
3. Непрерывные и дискретные случайные величины. Распределения дискретных случайных величин, их характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение.
4. Непрерывные случайные величины, их распределения и характеристики
5. Примеры распределений непрерывных случайных величин.



1. Случайные события. Предмет теории вероятности. Определение вероятности (статистическое и классическое)

В окружающем нас мире часто приходится сталкиваться с явлениями и фактами, которые при различных условиях могут происходить или не происходить. Такие явления или факты называются **случайными событиями**.

Понятие случайного события связано с единичными явлениями или их небольшим числом. При рассмотрении большого числа явлений обнаруживаются определенные закономерности (например, рождаемость 515 мальчиков из 1000, выпадение «орла» или «решки» и т.п.).

Изучение закономерностей однородных массовых случайных событий составляет предмет теории вероятности и основанной на ней математической статистики.



Изучение каждого отдельного явления с выполнением определенного комплекса условий называется **испытанием (опытом, экспериментом)**.

Всякий результат или исход испытания называется **событием**.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита А, В, С...

Возможность появления каждого события определяется специальной величиной – **вероятностью наступления события** – $P(A)$.



- Есть два способа определения вероятности.
- В «классическом» определении вероятности **вероятность случайного события определяется как отношение числа равновозможных исходов опыта, благоприятствующих наступлению события, к общему числу равновозможных исходов.**
-
- $P(A) = m/n$
-
- *Например, вероятность выпадения 6 при бросании игральной кости равна $1/6$, т.к. при однократном бросании кости все события (выпадение 1, 2, 3...) являются равновозможными, единственно возможными и несовместными.*



События называются **несовместными**, если в условиях испытания каждый раз возможно появление только одного из них.

Из классического определения вероятности вытекает ряд ее свойств:

Вероятность **достоверного события**, то есть события, которое происходит неизбежно в результате каждого испытания, равна 1.

Вероятность **невозможного события** равна 0.

Событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в результате испытания.

Строго говоря, как невозможное, так и достоверное события не являются случайными, поскольку они predetermined условиями испытания.

Вероятность любого события удовлетворяет неравенству

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$



2. Классическое определение вероятности случайного события применимо только к испытаниям с конечным числом исходов, причем исходов равновероятных.

Однако на практике часто рассматривают испытания, не удовлетворяющие этим условиям.

Например, о каких равновероятных событиях можно говорить, если требуется определить вероятность того, что среди произвольно выбранных 100 упаковок лекарственного препарата окажутся 2 упаковки, не соответствующие стандарту? Или какие равновероятные события следует рассмотреть для определения вероятности попадания спортсмена в «десятку» при стрельбе в мишень?



- В этих случаях пользуются так называемым **статистическим определением вероятности**.
- Пусть из N выниманий шара из урны с разноцветными шарами (при возвращении их обратно) было извлечено M белых шаров. Тогда M – частота наступления события, M/N – относительная частота или **частость**.
- При небольшом числе испытаний частость может принимать различные значения в различных сериях опытов. При значительном числе испытаний частость принимает практически устойчивое значение.
- **Вероятностью случайного события называется предел, к которому стремится частость при неограниченном увеличении числа испытаний.**
-
- $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} M/N$
-
-
- **Это статистическое определение вероятности.**



Статистическую вероятность события нельзя точно определить на основании конечного числа испытаний, каким бы большим оно ни было. Однако статистическую вероятность можно приближенно оценить по величине соответствующей относительной частоты.

Так, например, пусть проведено 5 серий по 100 выстрелов в цель, осуществленных одним и тем же спортсменом в одинаковых условиях.

Количество выстрелов	Количество попаданий в цель	Относительная частота попаданий в цель
100	98	0,98
100	99	0,99
100	97	0,97
100	98	0,98
100	99	0,99
100	97	0,97

Очевидно, что относительная частота попаданий в цель не является величиной постоянной, а изменяется от серии к серии. Вместе с тем, эта относительная частота не изменяется произвольно, а варьирует относительно среднего значения, равного 0,98. Таким образом, можно принять статистическую вероятность попадания в цель примерно равной 0,98. Для оценки статистической вероятности с большей точностью необходимо увеличить количество выстрелов в каждой серии.

2. Классификация событий. Понятие о совместных и несовместных, зависимых и независимых событиях. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Противоположное событие – происходит только тогда, когда событие A не происходит (пример – выпадение «орла» (событие A) и «решки» (событие \bar{A}));

Сумма вероятностей наступления случайного события A и противоположного ему события \bar{A} равна 1 [$P(A) + P(\bar{A}) = 1$];

Эквивалентные события – события с одинаковой вероятностью, независимо от их природы: $P(A) = P(B)$;

Несовместные события, если в условиях испытания каждый раз возможно появление только одного из них, т.е. никакие два не могут появиться вместе в этом испытании. В противном случае события называются **совместными**.

Например, если событие A_1 состоит в выпадении цифры 1 при однократном бросании игрального кубика, событие A_2 – в выпадении цифры 2 и т.д., то события A_1, A_2, \dots, A_6 являются несовместными, так как осуществление одного из них исключает наступление остальных.

Случайные события называются **совместными**, если осуществление одного из них не исключает осуществления при этом других из перечисленных событий.

Например, если событие A состоит в выпадении цифры 1 при однократном бросании кубика, а событие A_2 – в выпадении нечетного числа очков, то эти события являются совместными, так как 1 нечетное число.

На практике часто возникает необходимость определения вероятности наступления **одного из двух или более несовместных** событий (неважно какого) при однократном испытании.

Например, выпадение четного числа на верхней грани игральной кости. Эта вероятность определяется по **теореме сложения вероятностей**.



Вероятность появления одного (безразлично какого) события из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \text{ или } B \text{ или } C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Так, в нашем примере: $P(2 \text{ или } 4 \text{ или } 6) = P(2) + P(4) + P(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$.

Независимые события – вероятность события А не зависит от того, произошло ли событие В.

В противном случае события называются **зависимыми**.



□ Вероятность одновременного появления двух или более независимых событий равна произведению их вероятностей.

□

□ $P(A \text{ и } B \text{ и } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

□

□ **Пример:** Найти вероятность того, что в семье из трех детей родятся два сына и одна дочь.

□ Вероятность рождения мальчика $P(A) = P(B) = 0,515$;
вероятность рождения девочки $P(C) = 0,485$.

□ $P(A \text{ и } B \text{ и } C) = 0,515 \cdot 0,515 \cdot 0,485 = 0,129$.




Если вероятность события A меняется в связи с появлением или непоявлением события B , то событие A называется **зависимым** от события B .

Вероятность события A , вычисленная при условии, что имело место событие B , называется **условной вероятностью** события A ; обозначение $P(A/B)$.

Вероятность появления двух зависимых событий одновременно равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго при условии, что первое событие осуществилось.

Пример: студент пришел на экзамен, зная 40 вопросов из 50. Найти вероятность того, что он ответит на 3 вопроса билета.

Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос: $P(A) = 40/50 = 4/5$; вероятность того, что он ответит на второй вопрос, вычисленная при условии, что он ответил на первый вопрос, т.е. условная вероятность, равна: $P(B/A) = 39/49$. Вероятность того, что студент ответит на третий вопрос, при условии, что он ответил на первые 2 вопроса: $P(C/AxB) = 38/48$. Искомая вероятность: $P(AxBxC) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/AxB) = 40/50 \times 39/49 \times 38/48 = 0,5$.



3. Непрерывные и дискретные случайные величины. Распределения дискретных случайных величин, их характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение.

Науку об измерениях физических величин и способах обеспечения необходимой точности этих измерений называют **метрологией**.

Под **физической величиной** мы понимаем характеристики материальных объектов и явлений, которые могут быть количественно оценены (т.е. измерены).

Основой для количественной оценки физической величины является **единица измерения** физической величины. Единицы измерения физических величин группируются в **системы единиц**.

В Международной системе единиц (СИ) основными единицами являются метр (м), килограмм массы (кг), секунда (с), моль (М), ампер (А), кандела (кд), кельвин (К). Все остальные единицы являются производными (например, единица скорости (м/с), единица давления (Н/м²) и т.п.



Изучая какое-либо явление, мы всегда имеем дело с совокупностью величин, описывающих его. Эти величины даже в случае одного и того же явления несколько изменяются (варьируют) при повторных измерениях.

Особенно это относится к области биологии и медицины, где эти изменения могут быть весьма существенными, так как развитие живого организма определяется очень многими и разнообразными условиями внутренней и внешней среды.

Поэтому при изучении у ряда особей какого-либо количественного признака будет получено не одно значение, а целый ряд значений, обычно не совпадающих между собой.



Величины, которые в зависимости от обстоятельств могут принимать различные значения, причем заранее неизвестно, какое именно значение, называются *случайными величинами*.

Случайные величины принято обозначать заглавными буквами «второй половины» латинского алфавита (X, Y, Z), а их возможные значения – строчными буквами, например - $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Случайная величина называется *дискретной*, если совокупность всех ее возможных значений представляет собой конечное или бесконечное, но обязательно **счетное множество значений, то есть такое множество, все элементы которого могут быть (по крайней мере теоретически) пронумерованы и выписаны в соответствующей последовательности.**

Например, дискретными случайными величинами являются количество очков, выпадающих при броске игральной кости, оценки студентов на экзамене, число посетителей аптеки в течение дня, число букв на произвольной странице книги, число зерен в колосьях, энергия электрона в атоме и т.п.



Вероятность того, что дискретная случайная величина в i -м опыте примет значение x_i , равна $p_i = P(X=x_i)$.

Законом (или функцией) распределения дискретной случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между всеми возможными значениями этой случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон или функция распределения могут быть заданы графически, аналитически или в форме таблицы.



Например, имеется 10 студенческих групп, насчитывающих соответственно 12, 10, 11, 8, 12, 9, 10, 8, 10 и 11 студентов. Составить закон распределения случайной величины X , определяемой как число студентов в наугад выбранной группе.

Возможными значениями рассматриваемой случайной величины являются (в порядке возрастания) 8, 9, 10, 11 и 12.

Вероятность того, что $x_1 = 8$ (событие A), равна $P(A) = 2/10 = 0,2$.

Вероятность того, что $x_2 = 9$ (событие B), равна $P(B) = 1/10 = 0,1$.

Вероятность того, что $x_3 = 10$ (событие C), равна $P(C) = 3/10 = 0,3$.

Вероятности для x_4 и $x_5 = 0,2$.

Искомый закон распределения имеет вид:

X	8	9	10	11	12
P	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

Закон распределения дискретной случайной величины позволяет получить исчерпывающую информацию об этой случайной величине.



- На практике закон распределения дискретной случайной величины часто неизвестен, но для определения особенностей случайной величины используют основные числовые параметры (характеристики), связанные с законом распределения. Это математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
- **Математическим ожиданием случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений этой величины на вероятности этих значений.**

-
- $$M(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$
-

Например, если использовать данные предыдущего примера, то математическое ожидание $\mu = 8 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,3 + 11 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,2 = 10,1$.

Основной смысл математического ожидания дискретной случайной величины состоит в том, что оно представляет собой среднее значение данной величины. Иными словами, если произведено некоторое количество испытаний и по результатам этих испытаний вычислено среднее арифметическое всех наблюдавшихся значений дискретной случайной величины X , то это среднее арифметическое приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) математическому ожиданию этой случайной величины.



Отдельные значения случайной величины группируются около математического ожидания. Степень рассеивания (разброса) характеризуется дисперсией.

Дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = \sigma^2 = M[(x_i - \mu)^2]$$

Можно доказать, что
$$D(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2$$

На практике дисперсию часто удобнее вычислять по формуле

$$D(X) = \sigma^2 = M(X^2) - \mu^2$$

Например, в том же примере с группами студентов:

$$M(X^2) = 64 \cdot 0,2 + 81 \cdot 0,1 + 100 \cdot 0,3 + 121 \cdot 0,2 + 144 \cdot 0,2 = 103,9.$$

Подставляя это значение и найденное ранее значение математического ожидания ($\mu = 10,1$), получаем

$$D(X) = 103,9 - 10,1 = 1,89$$



- Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением) случайной величины называют корень квадратный из дисперсии.

-
- $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

-

- Для нашего примера $\sigma(X) = \approx 1,37$.

-

- Среднее квадратическое отклонение, как и дисперсия, является характеристикой разброса дискретной случайной величины относительно ее математического ожидания.



4. Непрерывные случайные величины, их распределения и характеристики

- Величина, принимающая любые значения в определенном интервале, называется **непрерывной**.
- Например, мгновенные значения скорости теплового движения молекул, температура тела человека, плотность воздуха в зависимости от высоты над поверхностью Земли и т.п.
- В отличие от дискретной величины непрерывную случайную величину невозможно задать в виде таблицы ее закона распределения, поскольку невозможно перечислить и выписать в определенной последовательности все ее значения, а также потому, что вероятность любого конкретного значения непрерывной случайной величины равна нулю.



- Так как невозможно перечислить все значения непрерывной случайной величины и указать их вероятности, то промежуток между крайними значениями делят на определенное количество интервалов и определяют вероятность того, что те или иные значения величины попадают в эти интервалы (так называемую **плотность вероятности**).
- Плотность вероятности показывает, как изменяется вероятность, отнесенная к интервалу dx некоторой величины, в зависимости от значений самой этой величины.

$$f(x) = \frac{dP}{dx}$$



Среди многих способов графического представления распределения чаще всего применяются два: построение полигона (многоугольника) и построение гистограммы (столбчатой диаграммы).

В первом случае экспериментальные точки соединяют последовательно прямыми линиями или линиями плавного перехода. Координатами точек здесь являются: по оси абсцисс – середина интервала $\langle x_i \rangle$, по оси ординат – значение плотности вероятности $f(x)$

$f(x)$



- Во втором случае графическое изображение имеет вид прямоугольников, основание которых соответствует ширине интервала $x_{\min} - x_{\max}$, а высота значению плотности вероятности.
- Для непрерывной величины характерны те же параметры, что и для случайной: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$D(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$



5. Примеры распределений непрерывных случайных величин.

В качестве примеров распределения непрерывной случайной величины рассмотрим четыре вида теоретических распределений.

в) Нормальный закон распределения (закон Гаусса)

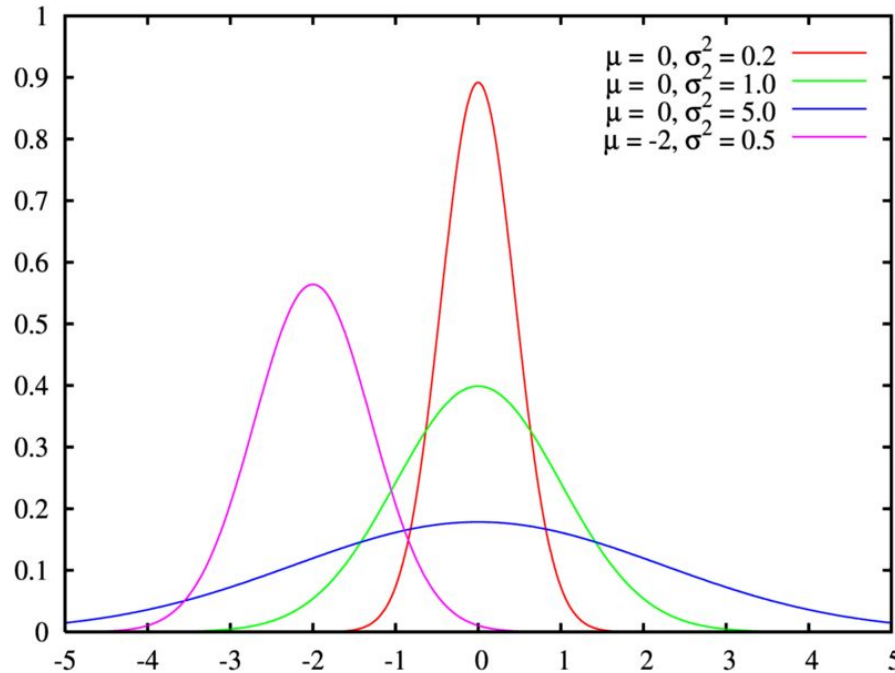
Очень часто закон распределения непрерывной случайной величины при неограниченном возрастании числа испытаний описывается выражением:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

где: $\mu = M(x)$ – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение (соответственно, σ^2 - дисперсия случайной величины), e – основание натурального логарифма.



Графически нормальное распределение имеет следующий вид:



Кривая имеет колоколообразную форму, симметричную относительно точки $x = \mu$. Величина $f(X)$ в этой точке определяется формулой:

$$f(X)_{\max} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

т.е. максимальное значение функции $\varphi(X)$ зависит от величины среднего квадратичного отклонения.

При изменении параметра μ форма нормальной кривой не изменяется, график сдвигается влево или вправо.

При изменении параметра σ форма нормальной кривой изменяется. Если этот параметр увеличивается, то максимальное значение функции $f(x)$ убывает, и наоборот. С увеличением параметра σ , кривая растягивается вдоль оси Ox .

Одним из основных положений математической статистики является гипотеза о том, что абсолютное большинство генеральных распределений совпадает с каким-то теоретическим распределением, чаще всего – с нормальным законом распределения. Однако выборочные экспериментальные распределения могут отличаться (и значительно) от теоретических распределений.



б) Показательное, или экспоненциальное, распределение.

Непрерывная случайная величина X , функция плотности вероятности которой задается выражением

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

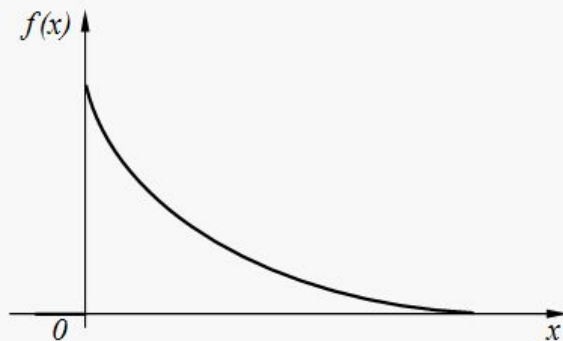
называется случайной величиной, имеющей **показательное**, или **экспоненциальное**, распределение.

Как видно из формулы, показательное распределение определяется только одним параметром λ . В этом его преимущество, так как обычно параметры распределения заранее неизвестны, и их приходится оценивать приближенно. Понятно, что оценить один параметр проще, чем несколько.



Величина срока службы различных устройств и времени безотказной работы отдельных элементов этих устройств при выполнении определенных условий обычно подчиняется показательному распределению.

Другими словами, величина промежутка времени между появлениями двух последовательных редких событий подчиняется зачастую показательному распределению.



□ в) Распределение Максвелла

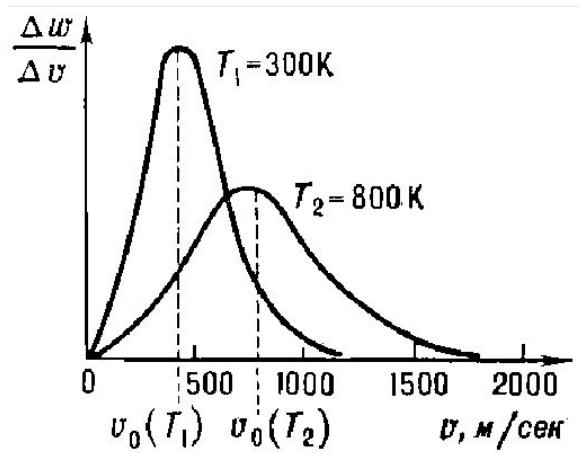
- Известно, что в газах молекулы находятся в непрерывном хаотическом движении, причем скорости молекул могут иметь самые разнообразные значения в определенном интервале. Ввиду огромного количества молекул определить значение скорости каждой отдельной молекулы невозможно. Однако можно определить вероятности попадания скоростей молекул в определенный интервал, то есть определить закон распределения молекул по скоростям, или плотность вероятности.



Максвеллом была теоретически определена эта функция плотности вероятности, и она выглядит следующим образом:

$$\varphi(V) = (m_0 / 2\pi kT)^{3/2} \cdot e^{-m_0 V^2 / 2kT}$$

где: m_0 – масса молекулы; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура газа. Графически распределение Максвелла представлено на рисунке, причем распределение будет сдвигаться вправо или влево в зависимости от температуры газа, на рисунке $T_1 < T_2$.



- Скорость, соответствующую максимуму Максвелла, называют **наивероятнейшей скоростью**, она определяется формулой:

-
- $$V_v = \sqrt{2kT/m_0}$$

-
- Используя математические методы, можно определить среднюю скорость молекул при данной температуре.

-
- $$V_{cp} = \sqrt{8kT/\pi m_0}$$



г) Распределение Больцмана

Больцман дал распределение концентрации молекул газа в силовом поле, в частности – в атмосфере Земли.

При отсутствии гравитационного поля, ввиду хаотичности молекулярного движения, атмосфера Земли не могла бы существовать. Действие только силы притяжения к Земле в отсутствие хаотического молекулярного движения привело бы к тому, что молекулы атмосферы были бы плотно упакованы в узком слое у поверхности Земли.



Сочетание обоих факторов определяет уменьшение плотности воздуха с удалением от поверхности Земли. По расчетам Больцмана концентрация молекул уменьшается по закону:

$$n = n_0 \cdot e^{-mgh/kT}$$

где n – концентрация молекул на высоте h , n_0 – концентрация у поверхности Земли.

Поделив обе части уравнения на n_0 , получим функцию распределения молекул воздуха по высоте:

$$\varphi(h) = n/n_0 = e^{-mgh/kT}$$



□ Графически эта функция представлена на рисунке.

□

