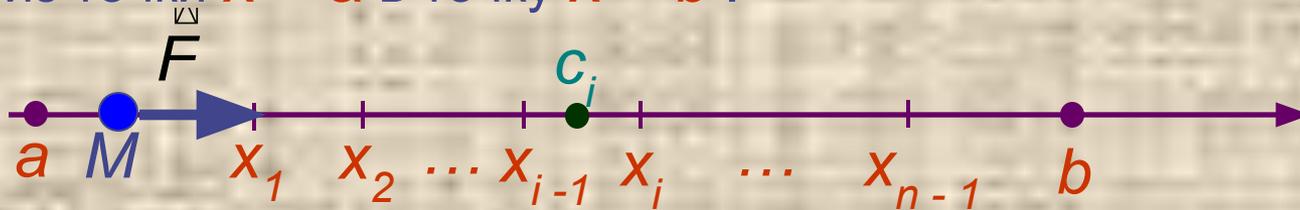


Физический смысл определенного интеграла

Пусть материальная точка M перемещается по воздействию силы \vec{F} , направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину $F = F(x)$

Найдем работу A силы \vec{F} по перемещению точки M вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$.



Сила, действующая на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ меняется от точки к точке.

Но если длина отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала, то силу на этом отрезке можно считать постоянной, равной значению функции в произвольно выбранной точке $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$

Поэтому работа, совершенная этой силой на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ равна:

$$A_i = F(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Приближенное значение работы A силы \vec{F} на всем отрезке $[a; b]$:

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Точное значение работы A :

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n F(c_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx$$

Аналогично можно показать, что путь S , пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определенному интегралу от скорости:

$$S = \int_a^b v(t) dt$$

Масса неоднородного стержня на отрезке $[a; b]$ равна определенному интегралу от плотности:

$$m = \int_a^b \gamma(x) dx$$

Примеры

• 1

Материальная точка движется по прямой со скоростью, определяемой формулой $v=3t^2-4t+1$, (время измеряется в секундах, скорость – в см/с). Какой путь пройдёт точка за 3 секунды, считая от начала движения ($t=0$)?

Решение:

$$s = \int_a^b v(t) dt = \int_0^3 (3t^2 - 4t + 1) dt = (t^3 - 2t^2 + t) \Big|_0^3 =$$
$$= 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 = 27 - 18 + 3 = 12(\text{см})$$

Примеры

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

- 2

Какую работу надо произвести, при перемещении материальной точки на промежутке от 1 до 2 м под действием силы $F(x) = x+3$ (Н)?

Решение:

Искомая работа равна:

$$A = \int_1^2 (x + 3) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} + 3 \cdot 2 - \left(\frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) = 2 + 6 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{9}{2}$$

Ответ: 4,5 Дж

Примеры

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

- 3

Вычислите массу участка стержня $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$ (м), если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2 + 1$ (кг/м³).

Решение:

Согласно формуле, имеем:

$$m = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} + 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 0 \right) = \frac{4}{3}$$

Ответ: 1,33 кг