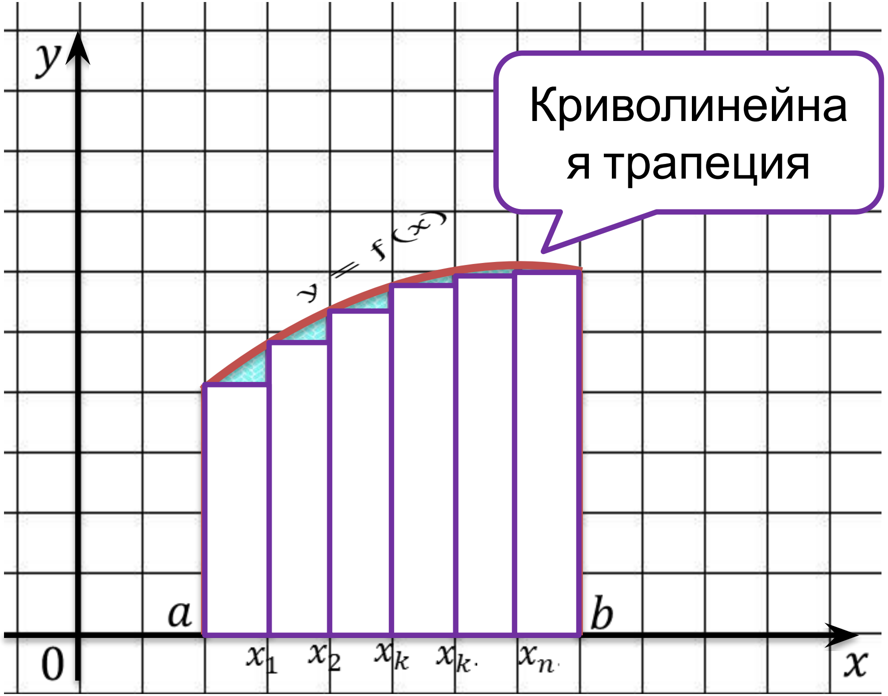
Определенный интеграл. Формула Ньютона - Лейбница



$S_k = f(x_k) \cdot \Delta x_k$

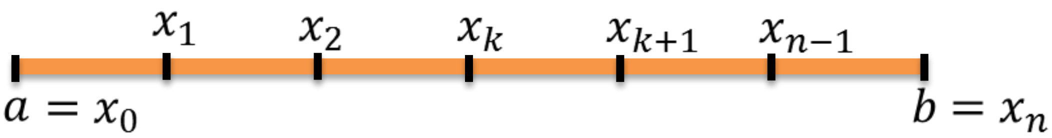
Δx_k – длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$

$S_n = f_0 \Delta x_0 + f_1 \Delta x_1 + f_2 \Delta x_2 +$

$+ \dots + f_k \Delta x_k + \dots + f_{n-1} \Delta x_{n-1}$

$x_0 = a,\ x_n = b,\ \Delta x_0 = \Delta x_1 = \dots = \Delta x_n$

$$\boxed{S = \lim_{n \to \infty} S_n}$$



$\rho = \rho(x)$

$\rho = \rho(x_k)$

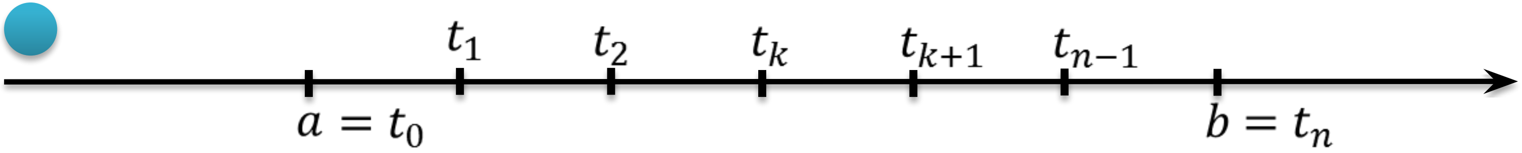
$m_k \approx \rho(x_k)\Delta x_k$

Δx_k – длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$

$m \approx S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \cdots + m_k + \cdots + m_{n-1} =$
$= \rho(x_0)\Delta x_0 + \rho(x_1)\Delta x_1 + \cdots + \rho(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$

$m = V\rho$
$m = S\rho$
$m = l\rho$

$\boxed{m = \lim\limits_{n\to\infty} S_n}$



$v = v(t)$

$S = vt$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$v = v(t_k)$

$$s = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$s_k \approx v(t_k)\Delta t_k$

Δt_k – длина отрезка $[t_k; t_{k+1}]$

$$m = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$s \approx S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_k + \cdots + s_{n-1} =$$

$$= v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + \cdots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}$$

Математическая модель:

1. Разбиваем отрезок $[a; b]$ на n равных частей.
2. Составляем сумму S_n.
3. Находим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Определенный интеграл от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

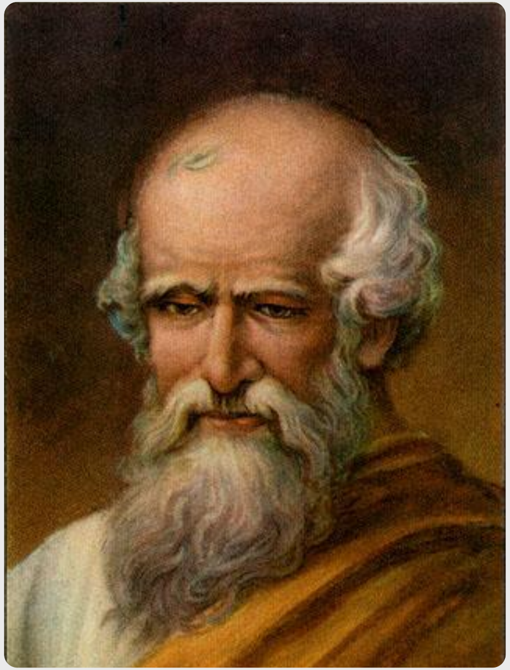
Верхний предел интегрирования

Нижний предел интегрирования

Евдокс Книдский

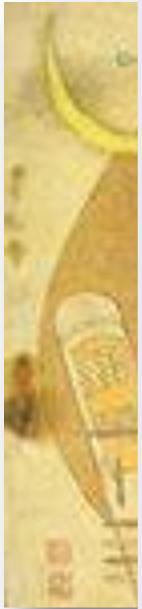
ок. 408 год до н. э. – ок. 355 год до н. э.

Древний Египет 1800 год до н. э.



Архимед

287 год до н. э. – 212 год до н. э.



Древний Китай III век н. э.

Абу́ Али́ аль-Хаса́н ибн аль-Хаса́н ибн аль-Хайса́м аль-Басри́

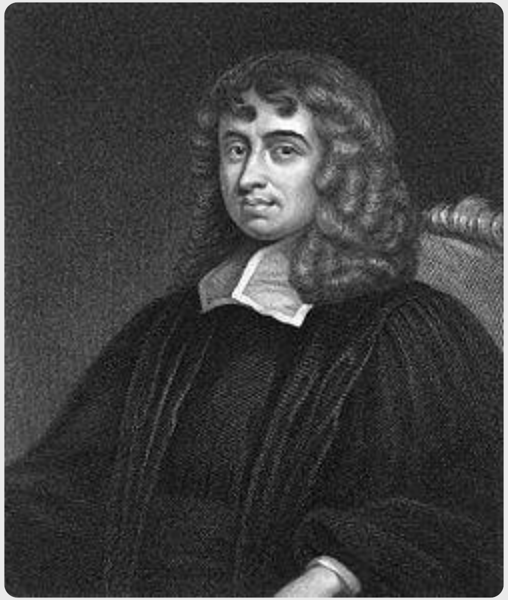
965 год – 1040 год

Бонавентура Франческо Кавальери

1598 год – 1647 год

Пьер де Ферма

1601 год – 1665 год



Исаак Барроу

1630 год – 1677 год

Эванджелиста Торичелли

1608 год – 1647 год

Исаак Ньютон

1642 год – 1727 год

Готфрид Вильгельм Лейбниц

1646 год – 1716 год

$\int$ ...кращение латинского слова

$$\int_a^b$$

Жан Батист Жозеф Фурье

1642 год – 1830 год

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Геометрический смысл определенного интеграла

$$s = \int_a^b v(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Физический смысл определенного интеграла

$$\left.\begin{array}{l} s = \displaystyle\int_a^b v(t)dt \\ v(t) = s'(t) \Rightarrow s(t) - \text{первообразная для } v(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow s = s(b) - s(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)}$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Двойная подстановка

Формула Ньютона-Лейбница

$F(x)$ – первообразная для $f(x)$

Пример:

- Вычислить $\int_{-1}^{3} x^3 dx$.

Решение:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4}$$

$$\int_{-1}^{3} x^3 dx = F(x)\Big|_{-1}^{3} = F(3) - F(-1) = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$$

Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 8$.

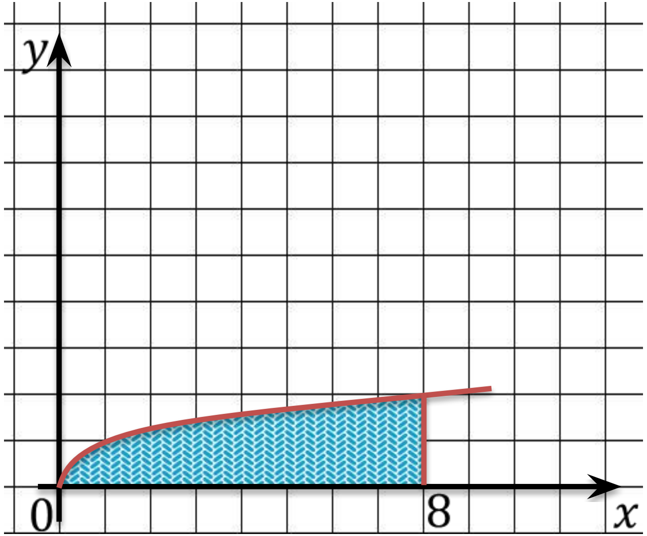
Решение:

$$S = \int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right)' = \sqrt[3]{x} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$$

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx = F(x)\Big|_0^8 = F(8) - F(0) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{0^4} = 12$$



Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ – первообразная для $f(x)+g(x)$. Тогда

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b =$$

$$= (F(b)+G(b)) - \big(F(a)+G(a)\big) = \big(F(b)-F(a)\big) + \big(G(b)-G(a)\big) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Пример:

- Вычислить $\int_1^2 \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx$.

Решение:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$(e^x)' = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow G(x) = \ln|x|$$

$$\int_1^2 \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 e^x dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = F(x)\Big|_1^2 + G(x)\Big|_1^2 = e^2 - e^1 + \ln 2 - \ln 1 =$$

$$= e^2 - e^1 + \ln 2$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Пример:

- Вычислить $\int_1^2 \frac{2}{x} dx$.

Решение:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x|$$

$$\int_1^2 \frac{2}{x}dx = 2\int_1^2 \frac{1}{x}dx = 2 \cdot F(x)\Big|_1^2 = 2 \cdot (\ln 2 - \ln 1) = 2\ln 2 = \ln 4$$