

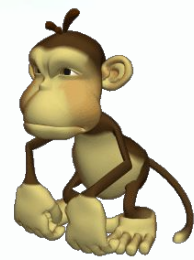
Площадь криволинейной трапеции и интеграл

(урок-практикум)

Алгебра и начала анализа. 11 класс
МОУ "Школа №78 г.Донецка"
Учитель ПЕРЕКРЕСТ И.А.



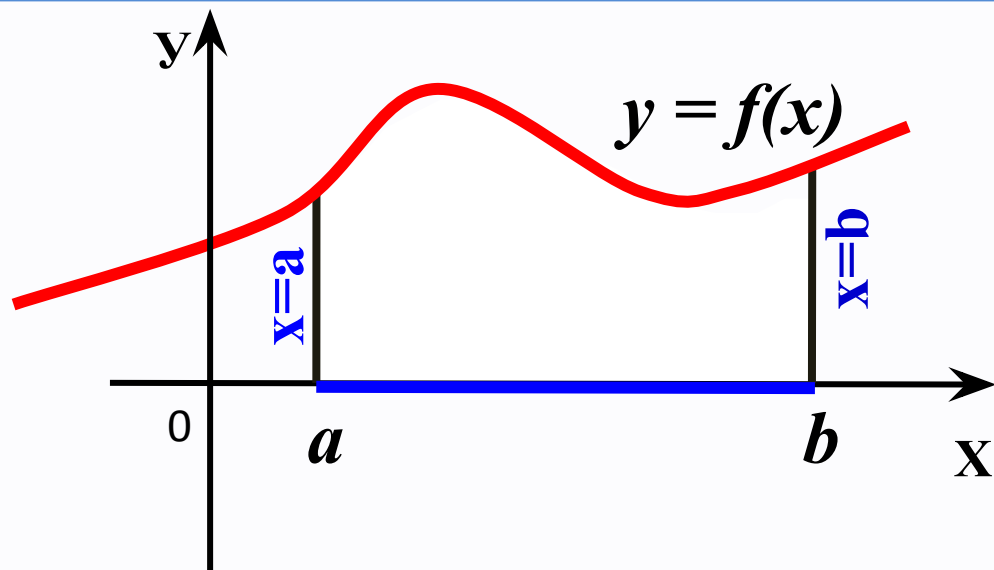
**КРИВОЛИНЕЙНАЯ ТРАПЕЦИЯ
И ЕЁ ПЛОЩАДЬ**



Криволинейная трапеция

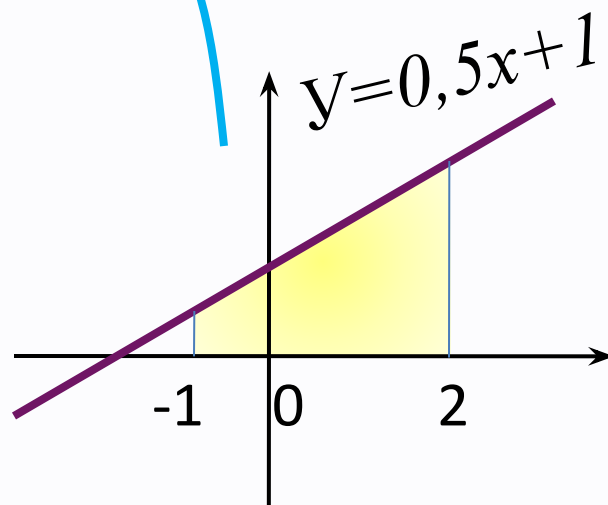
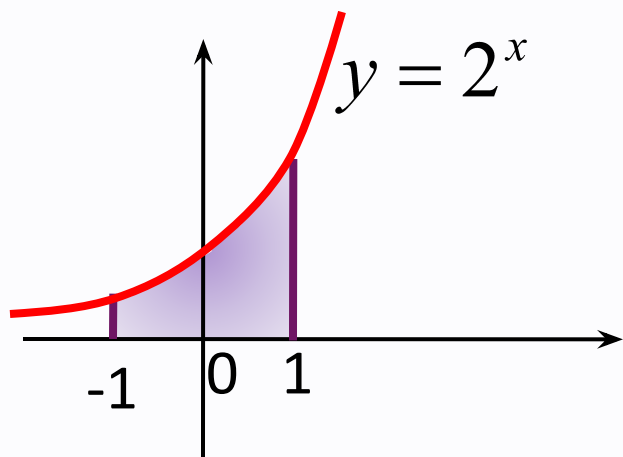
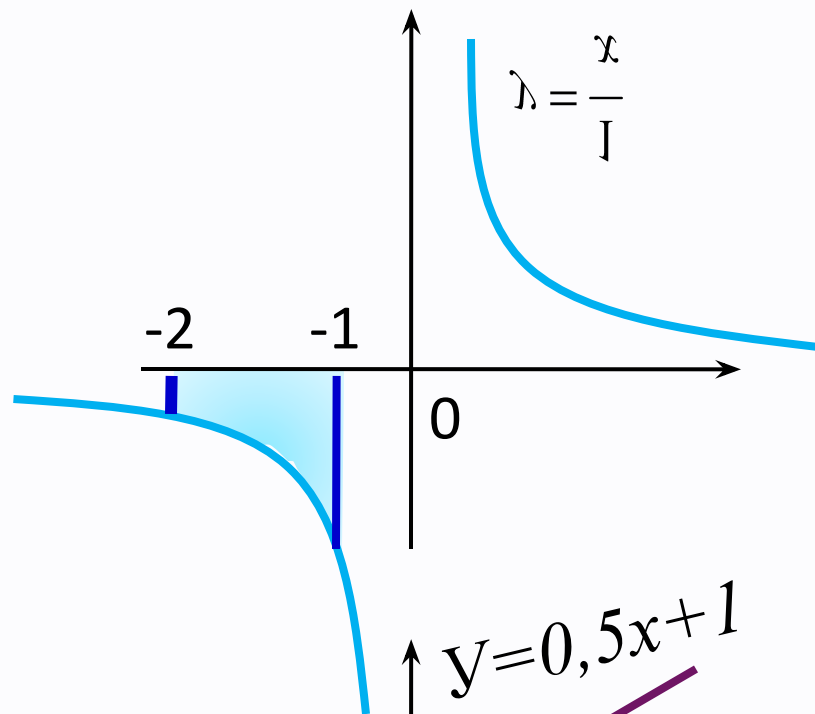
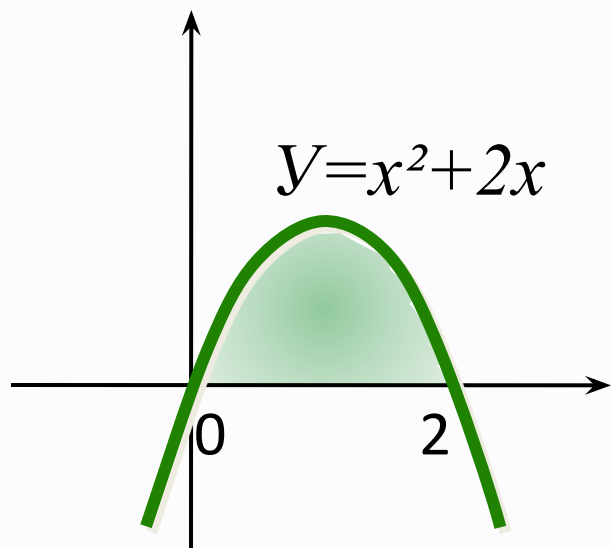


Опр. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;b]$ знак функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$.

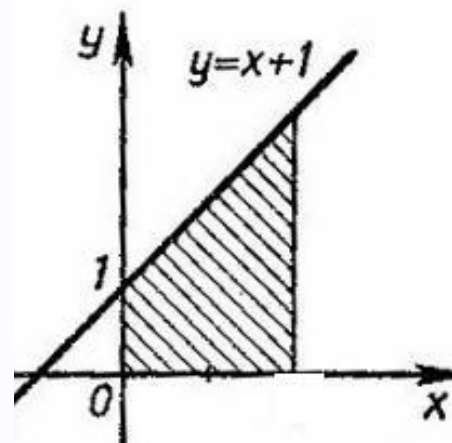
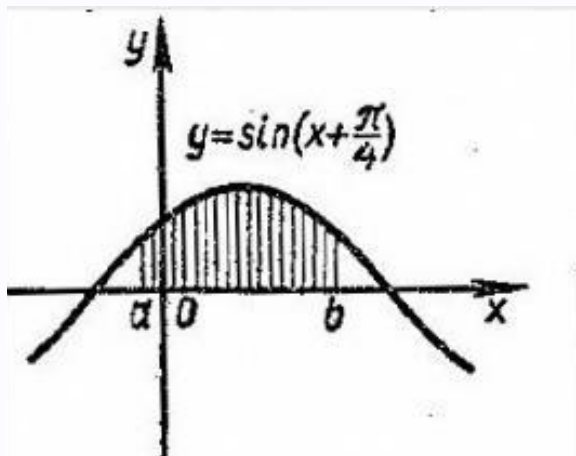
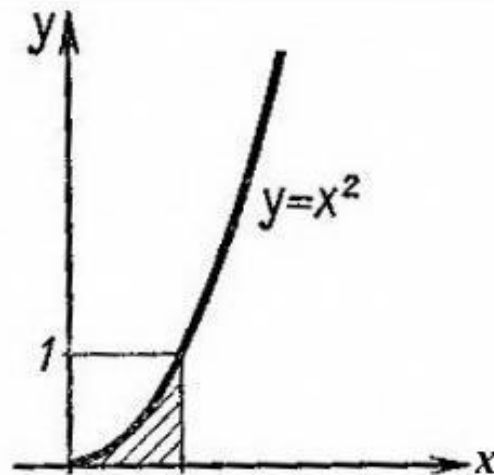
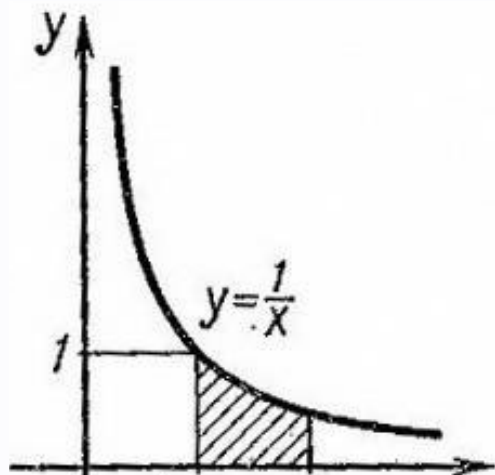


Отрезок $[a;b]$ - **основание**
этой криволинейной трапеции

Различные виды криволинейных трапеций

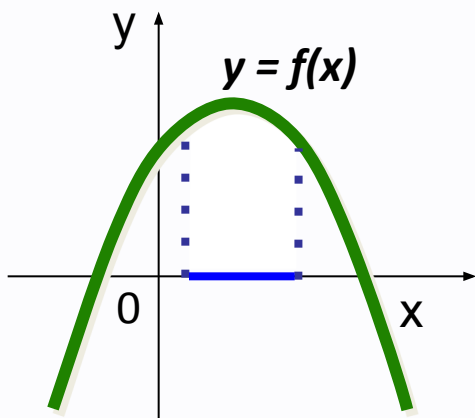


Различные виды криволинейных трапеций

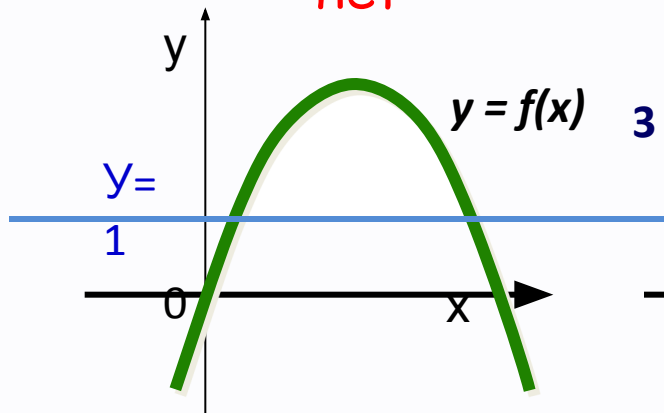


Являются ли криволинейными трапециями фигуры?

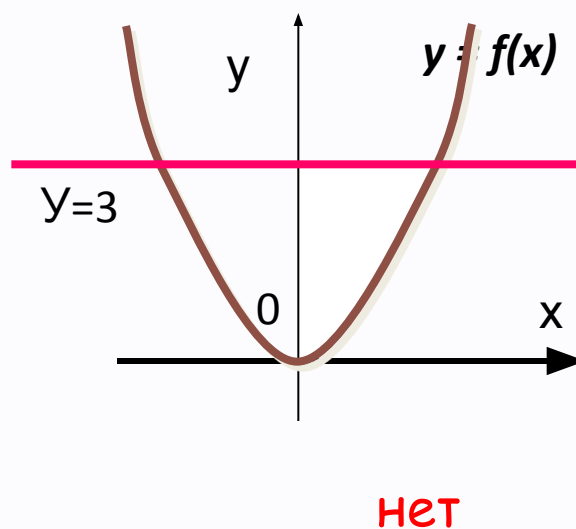
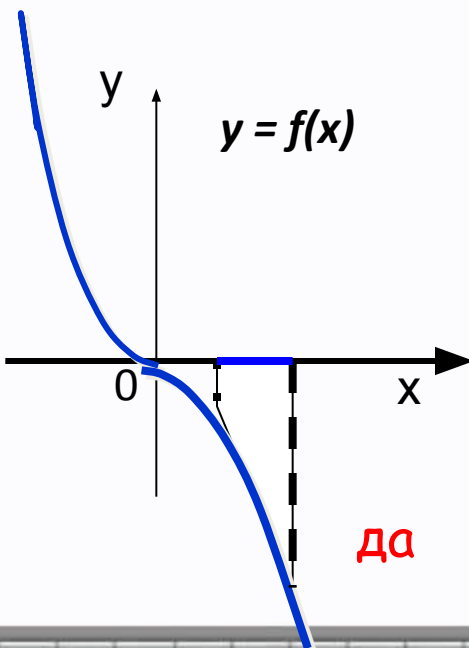
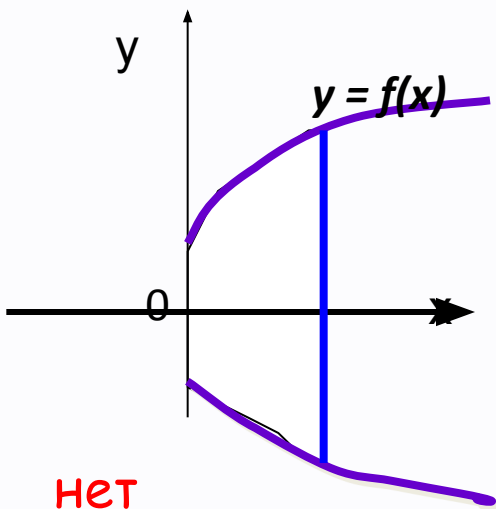
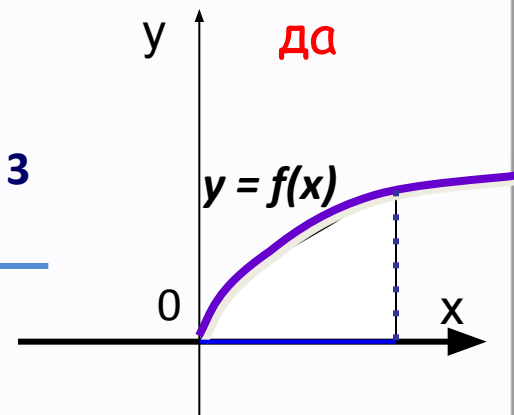
да



нет



да



нет

да

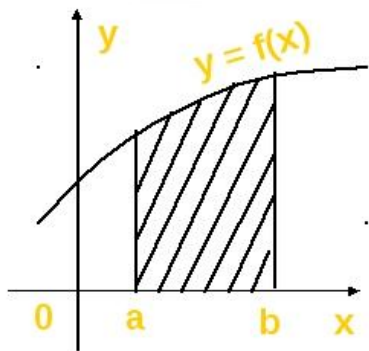
нет

Самостоятельно решить:

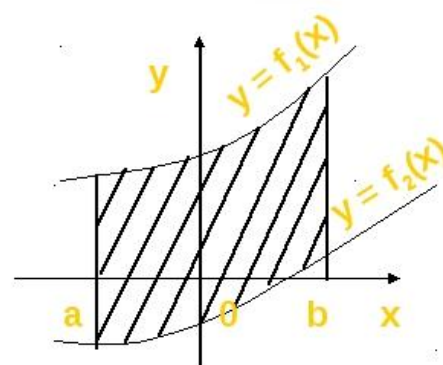
ЗАДАНИЕ 1. Указать фигуры, которые являются криволинейными трапециями



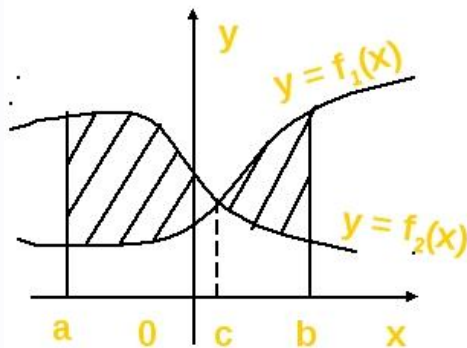
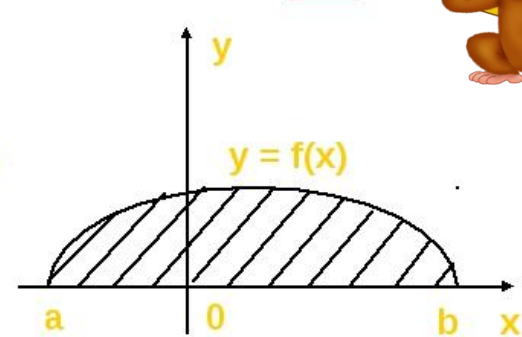
1



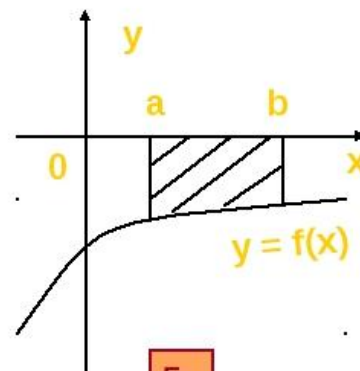
2



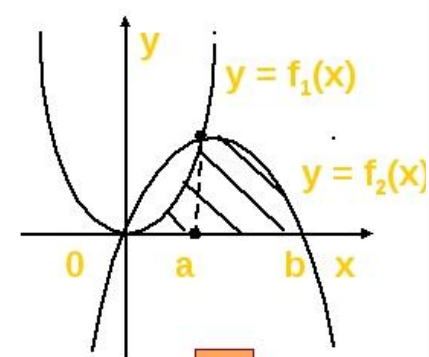
3



4

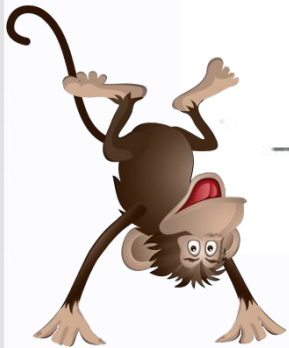
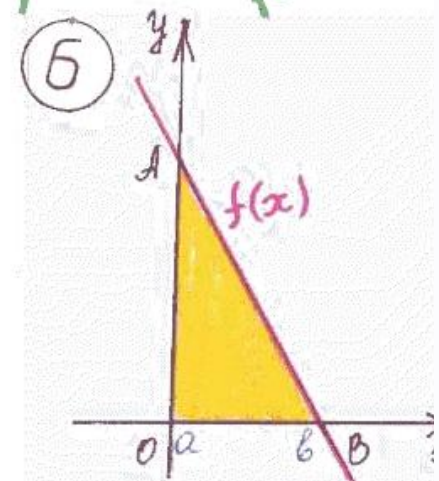
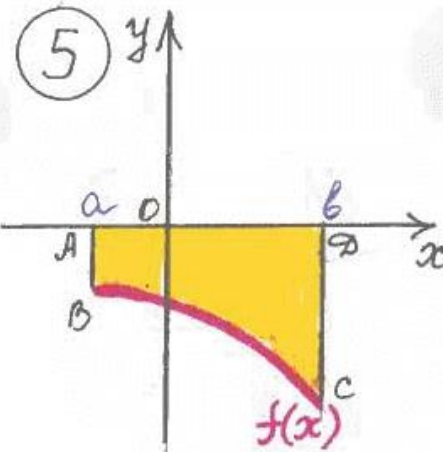
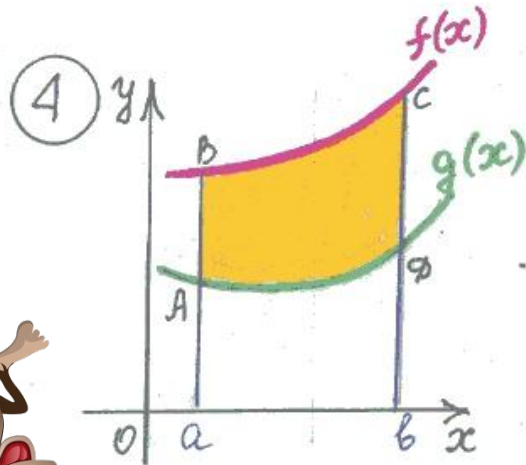
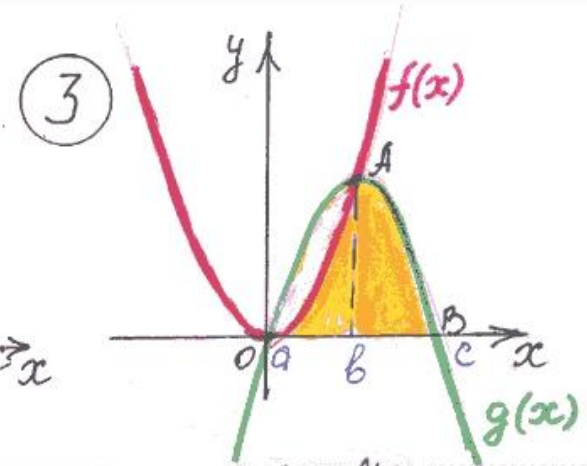
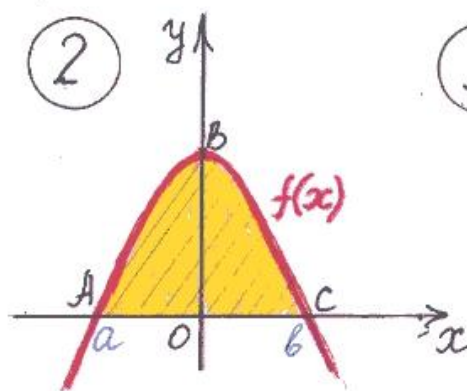
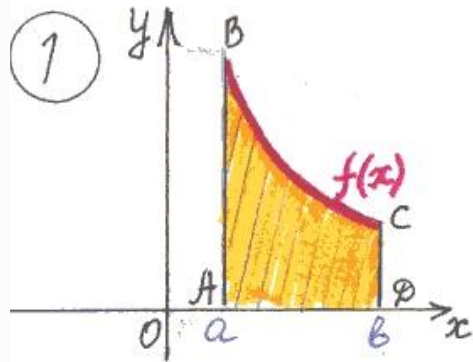


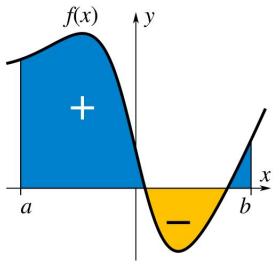
5



6

ЗАДАНИЕ 2. Указать фигуры, которые не являются криволинейными трапециями



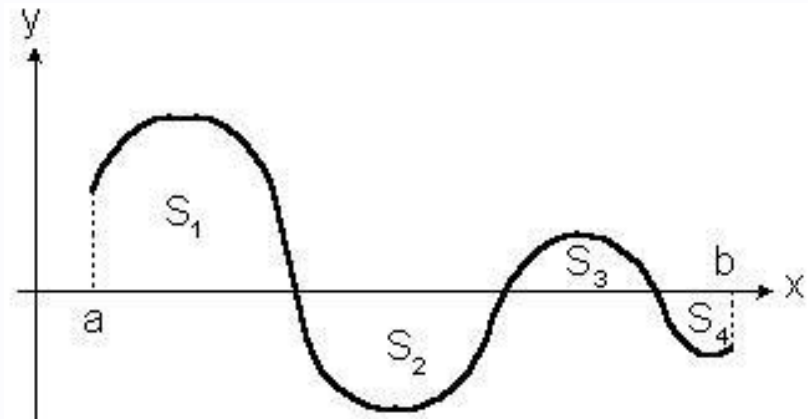
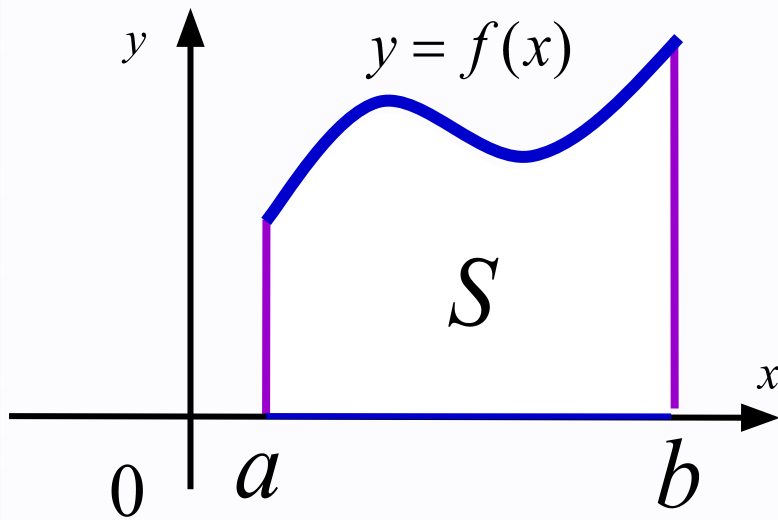


Не криволинейная трапеция

Можно разбить на 3 криволинейных трапеции

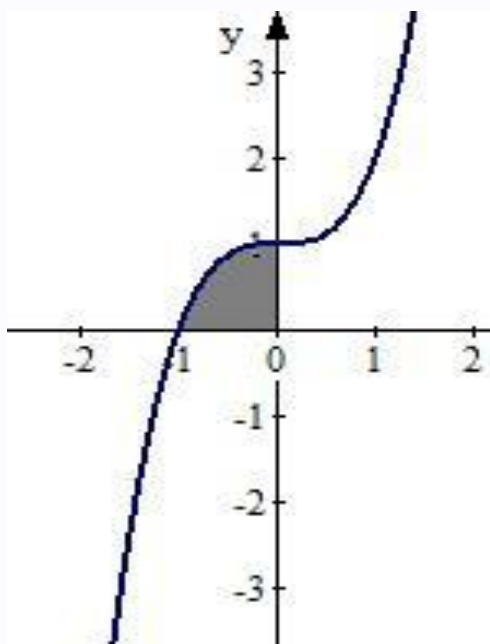
КАК НАЙТИ ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ?

$$S = F(b) - F(a) \quad F(x) - \text{любая первообразная функции } f(x).$$



$$\int f(x) dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

Пример использования формулы $S = F(b) - F(a)$
для нахождения площади криволинейной трапеции



-Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями
 $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$.

Решение.

Изобразим схематично фигуру,
площадь которой надо найти (рис.)

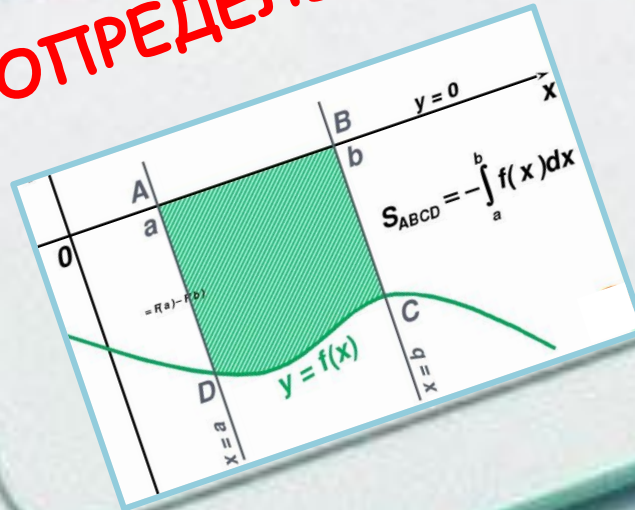
Найдём одну из первообразных ($C=0$).

$$F(x) = x^4/4 + x.$$

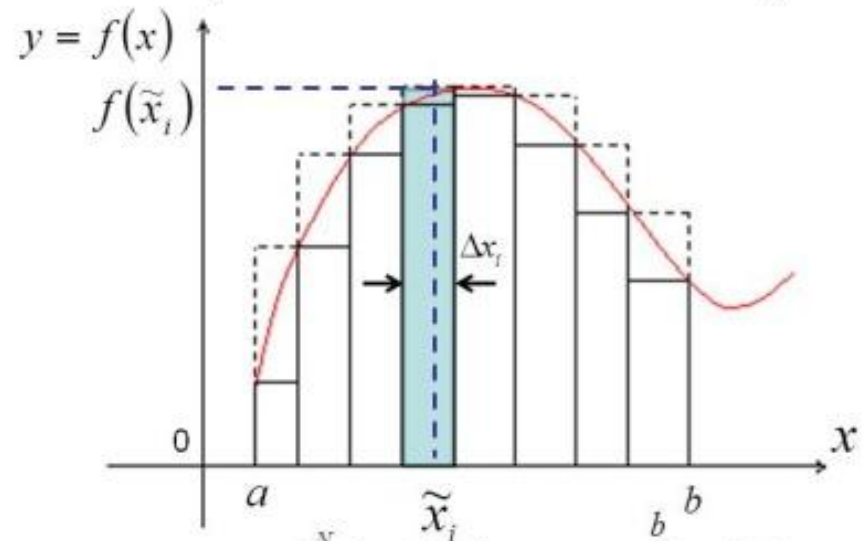
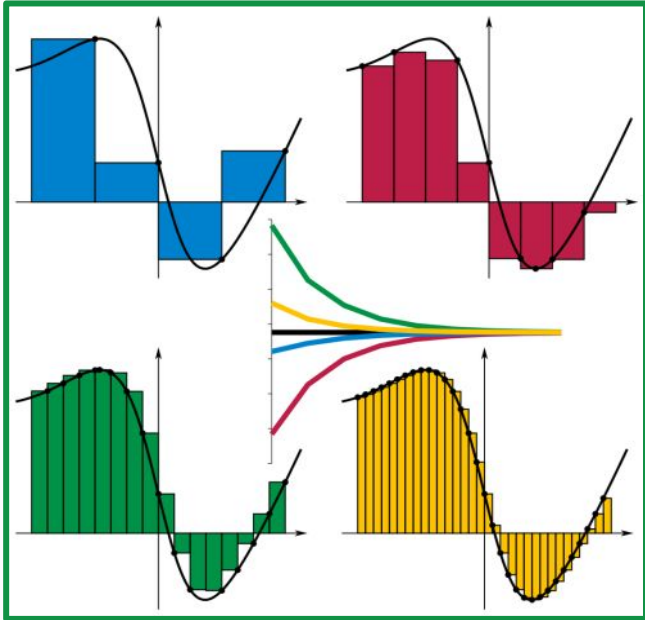
$$\begin{aligned} S &= F(0) - F(-1) = (0+0) - (1/4 - (-1)) = \\ &= -1/4 + 1 = \frac{3}{4} \text{ (ед.кв.)} \end{aligned}$$



ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

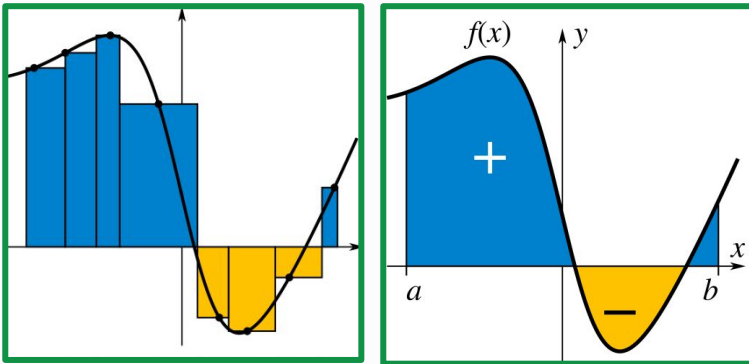


ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ И ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

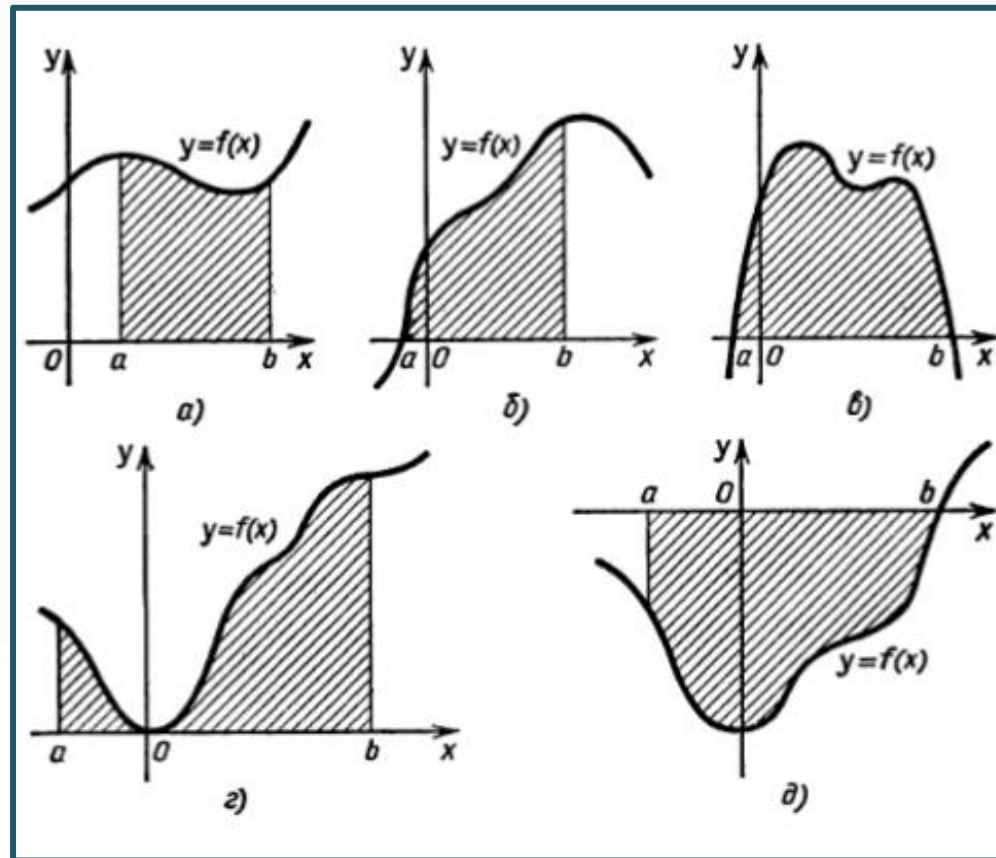


$$S = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\tilde{x}_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

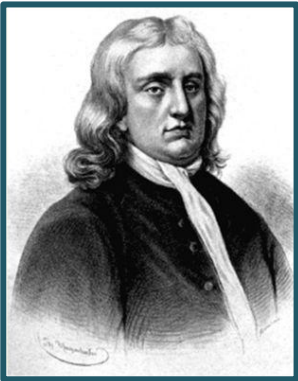
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ - ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ



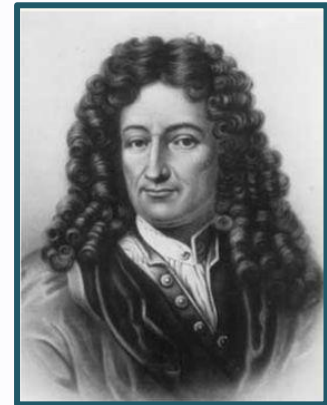
Формула Ньютона-Лейбница



И. Ньютон
1643—1727

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



Г. Лейбниц
1646—1716



СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$1^\circ. \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

$$2^\circ. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$3^\circ. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$4^\circ. \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

$$5^\circ. \int_a^b C * f(x) dx = C * \int_a^b f(x) dx, \text{ где } C - \text{ постоянная.}$$



Применение свойств определенного интеграла в вычислениях (образцы)

$$\text{а) } \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \cos x \right) dx = (3 \operatorname{tg} x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$
$$= 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - 3 \operatorname{tg} 0 - (\sin \frac{\pi}{6} - \sin 0) = 3 \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$



$$\text{г) } \int_0^1 (e^x + 2^x) dx = \left(e^x + \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_0^1 = e^1 - e^0 + \frac{2^1}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} =$$
$$= e - 1 + \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = e - 1 + \frac{1}{\ln 2}$$

$$\text{д) } \int_1^2 (2x - 4)^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x - 4)^4}{4} \Big|_1^2 = 0 - 2 = -2$$

Вычислить интегралы:

Вариант 1

1) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^6}.$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx.$

3) $\int_0^{\ln 3} e^{3x} dx.$

4) $\int_0^3 [x^2 + (x-3)^3] dx.$

5) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx.$

6) $\int_{-1}^0 (x+1)(x^2+2x-3) dx.$



Вариант 2

1) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^4}.$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx.$

3) $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx.$

4) $\int_{-2}^1 [(x-1)^3 + (x+2)^2] dx.$

5) $\int_2^7 \left(\sqrt{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx.$

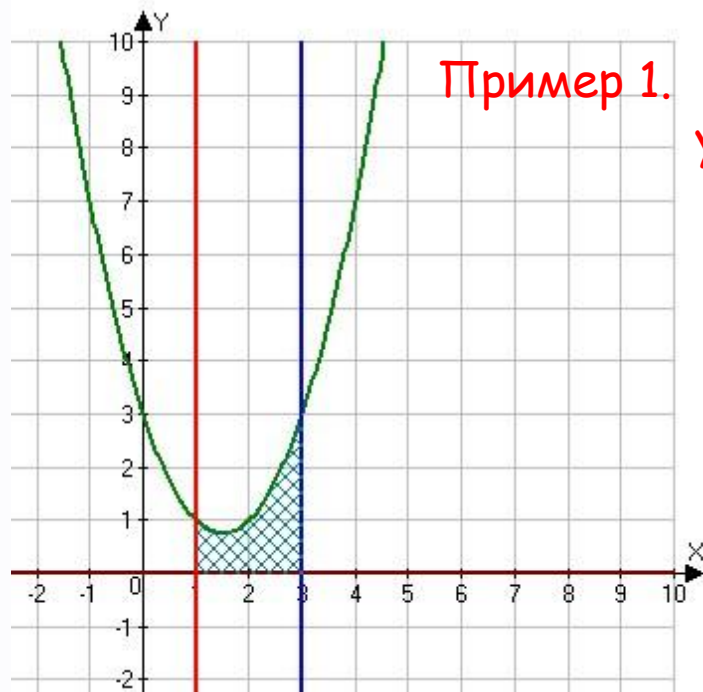
6) $\int_0^2 (x-2)(x^2-4x+5) dx.$



ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА



С помощью определённого интеграла найти площадь криволинейных трапеций, изображенных на рисунках (образцы)



Пример 1.

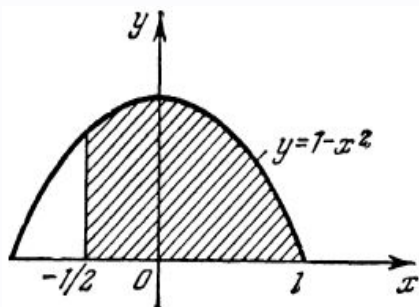
Фигура ограничена линиями
 $y = x^2 - 3x + 3$, $x = 1$, $x = 3$ (рис.)

Решение.

$$S = \int_1^3 (x^2 - 3x + 3) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) =$$

$$= \left(18 - \frac{27}{2} \right) - \left(\frac{11}{6} \right) = \frac{18 \cdot 2 - 27}{2} - \frac{11}{6} = \frac{9}{2} - \frac{11}{6} = \frac{8}{3} \text{ кв.ед.}$$

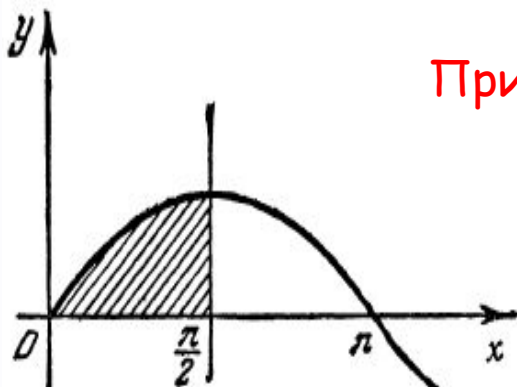


Пример 2. Фигура ограничена линиями
 $y = 1 - x^2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$, $y = 0$ (рис.)

Решение.

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right] = \frac{2}{3} + \frac{11}{24} = \frac{27}{24} \text{ (ед.кв.)}$$



Пример 3. Фигура ограничена линиями
 $y = \sin x$, $x = \pi/2$, осью Ox (рис.)

Решение.

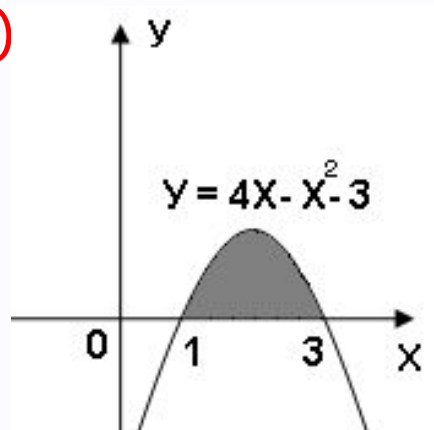
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1 \text{ (ед.кв.)}$$

ТРЕНИНГ «От простого к сложному».

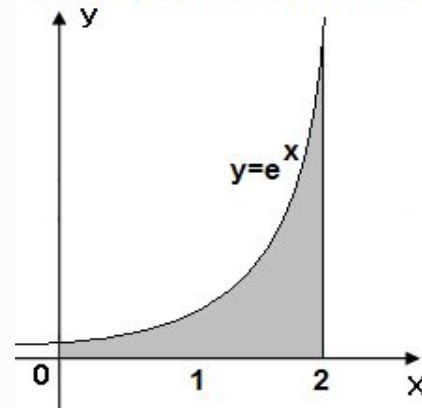
По готовым рисункам найти площади фигур.

(Вариант 1 - задания с нечётными номерами, Вариант 2 - с чётными)

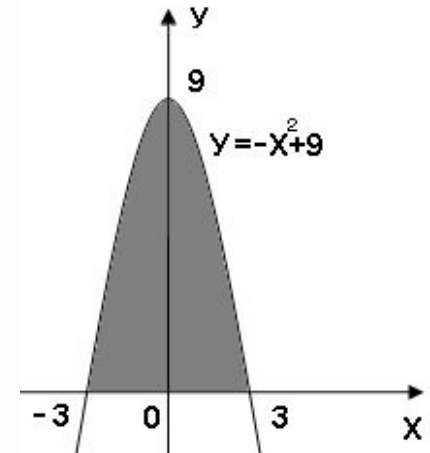
1)



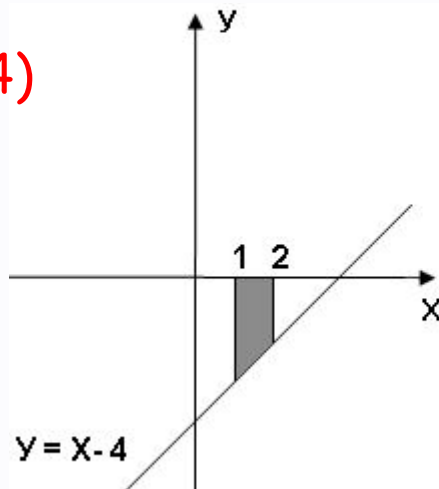
2)



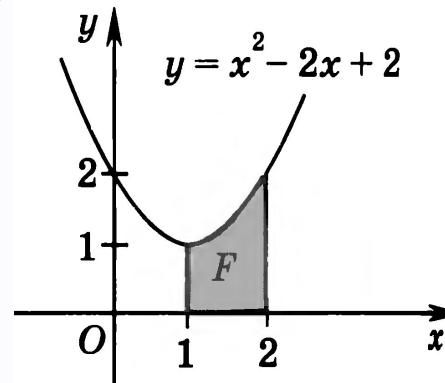
3)



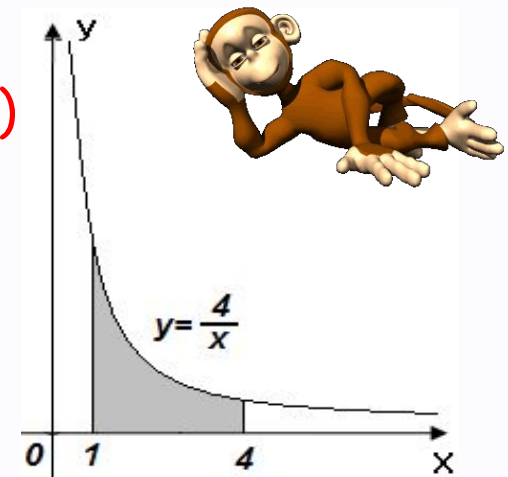
4)



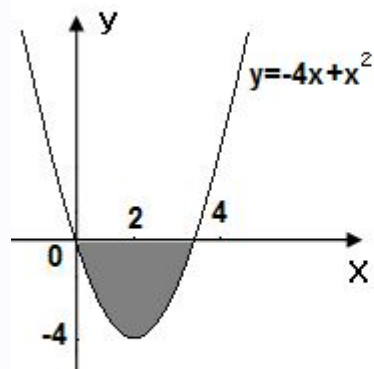
5)



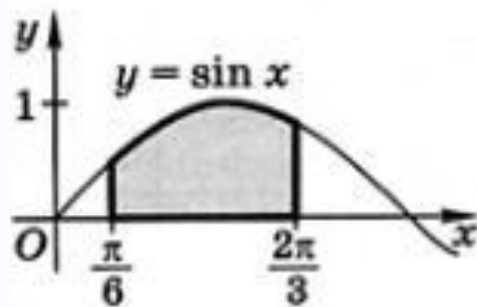
6)



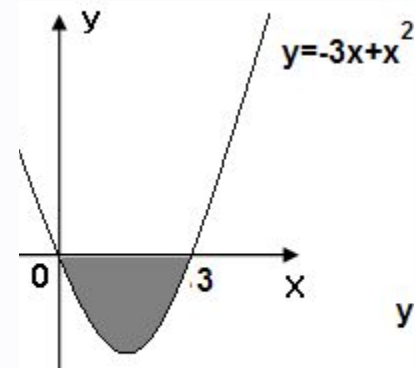
7)



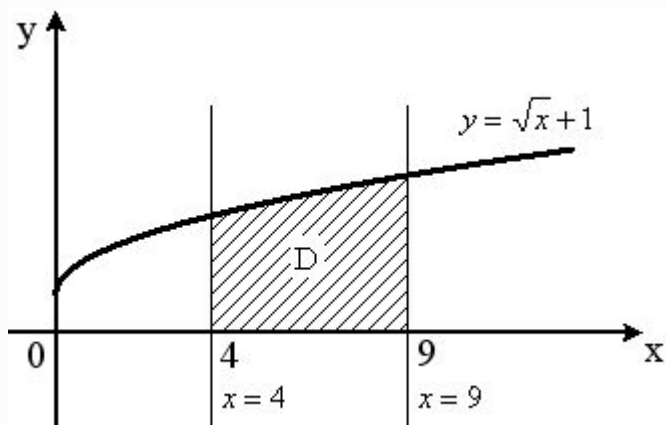
8)



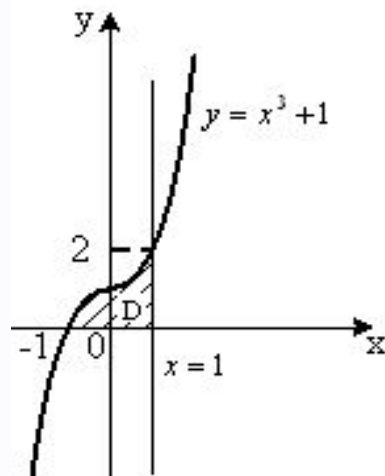
9)



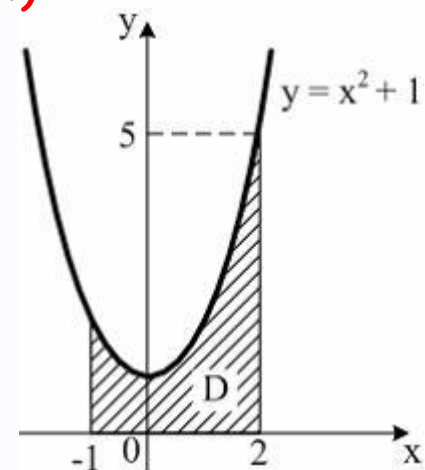
10)



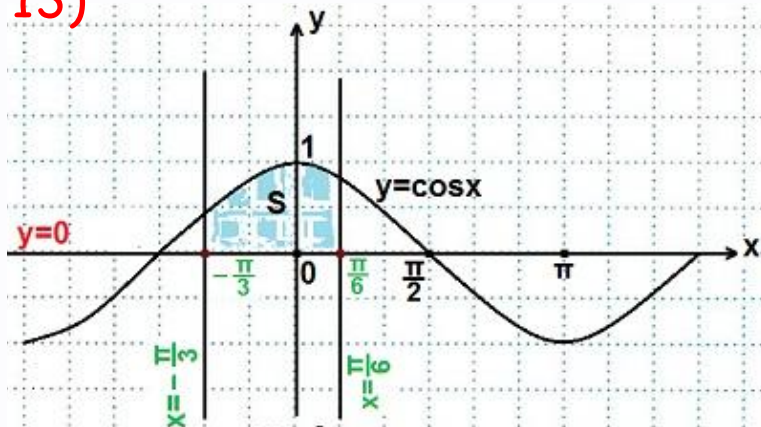
11)



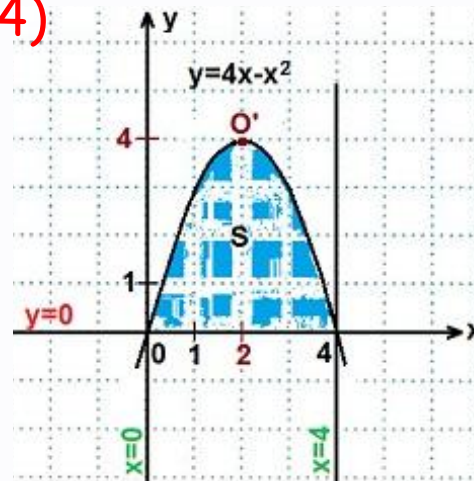
12)



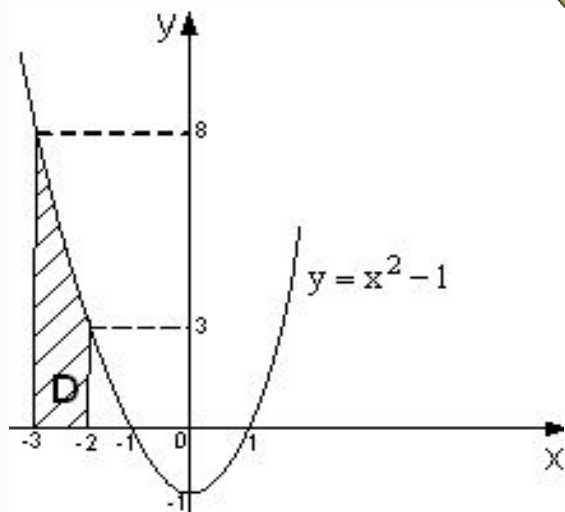
13)



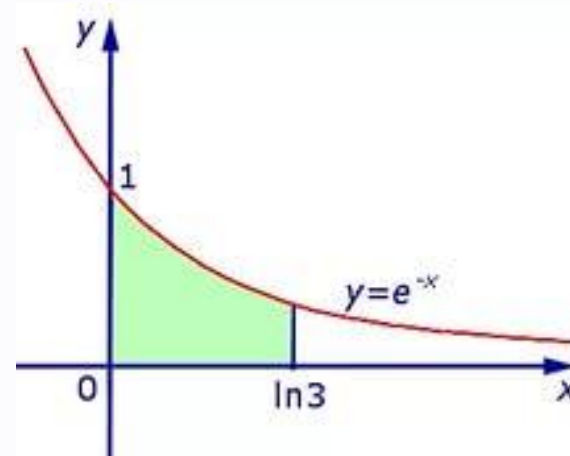
14)

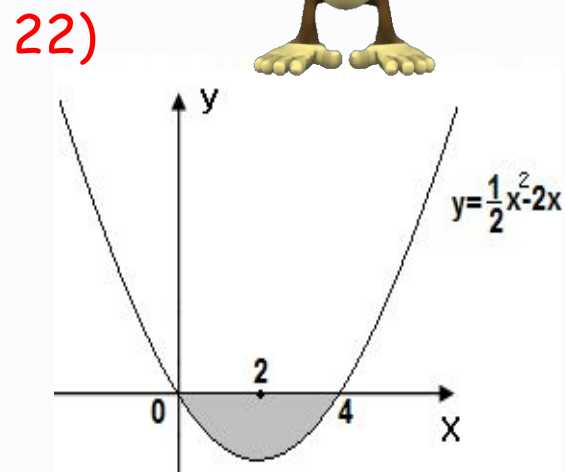
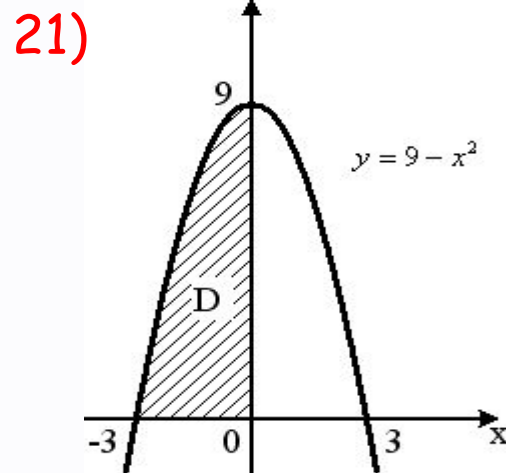
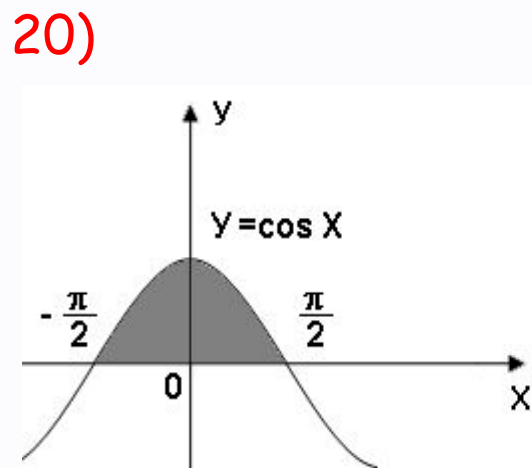
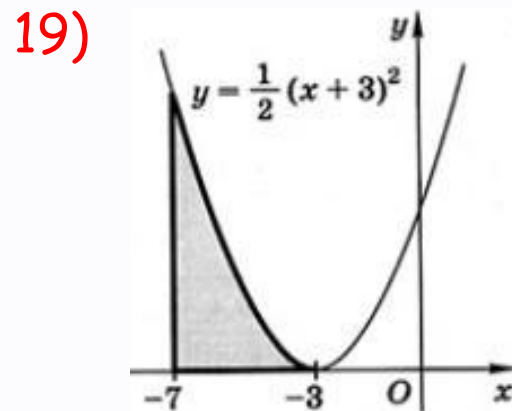
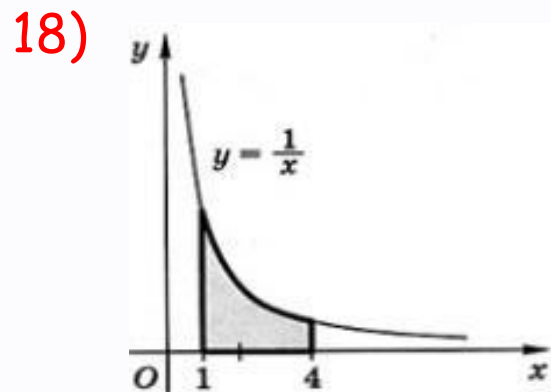
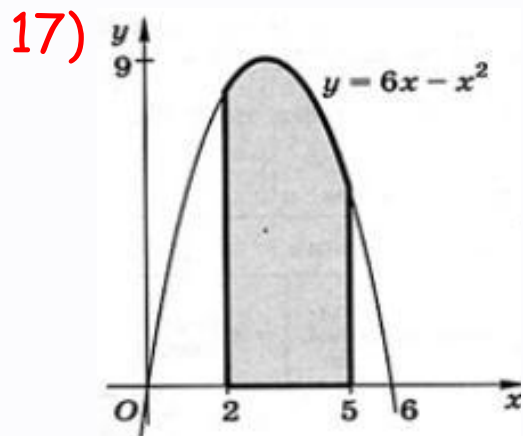


15)

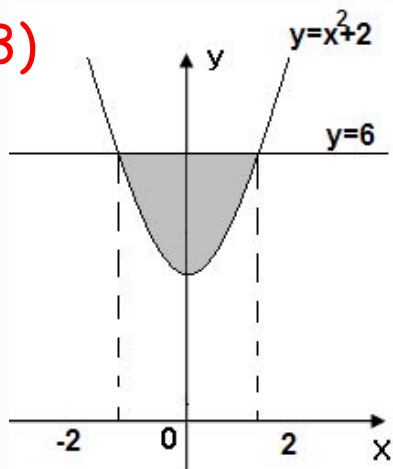


16)

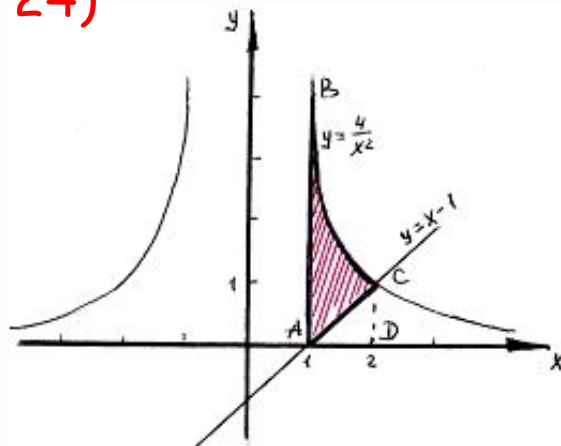




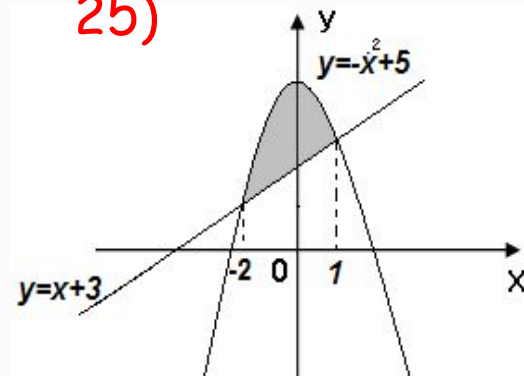
23)



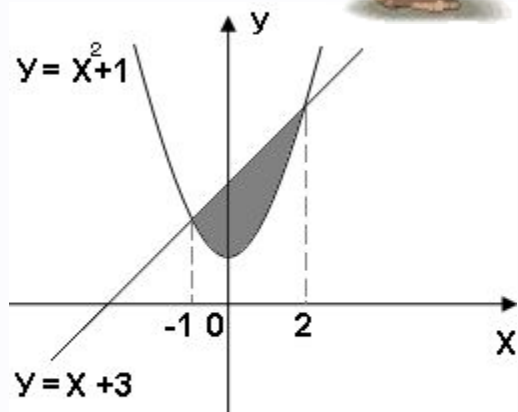
24)



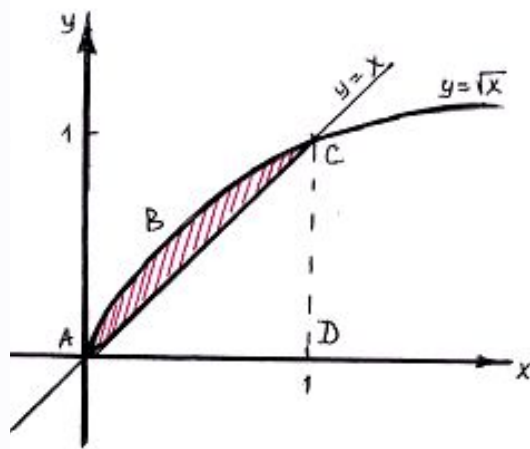
25)



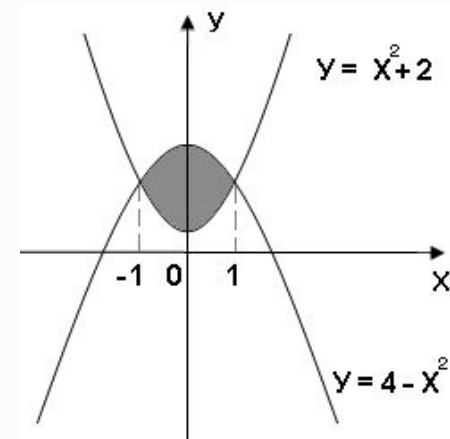
26)



27)

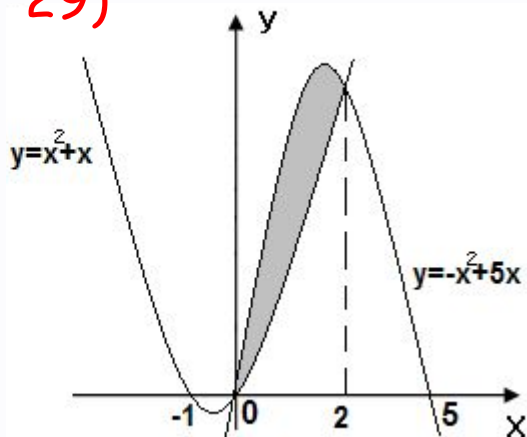


28)

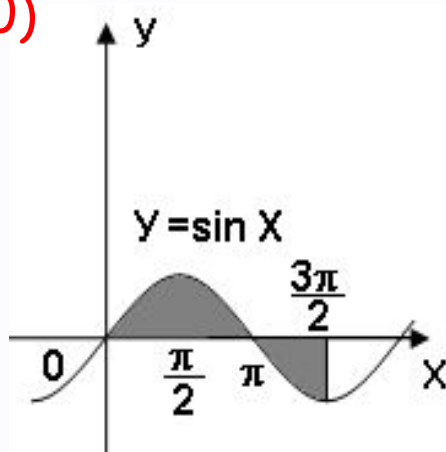


По готовым рисункам найти площади фигур, составив комбинации площадей криволинейных трапеций

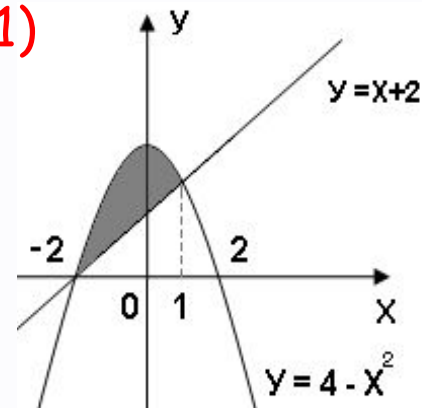
29)



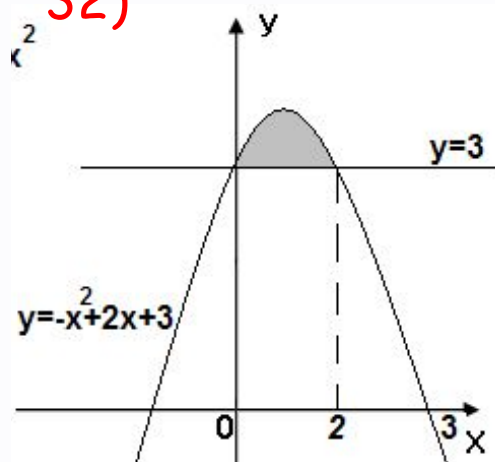
30)



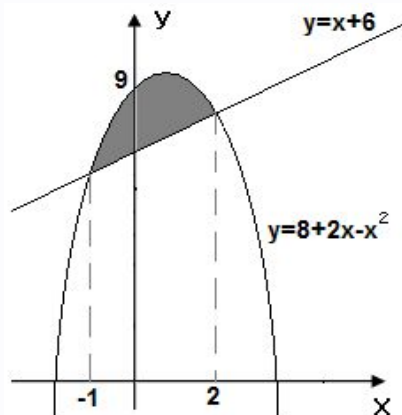
31)



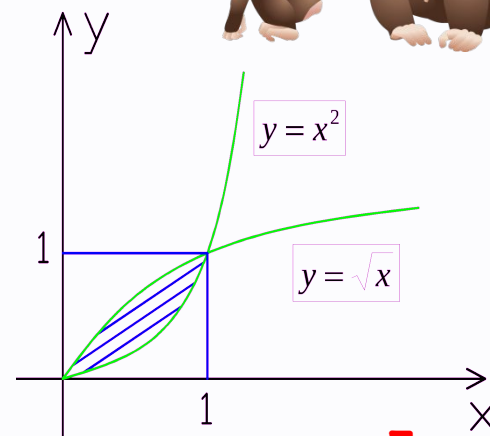
32)



33)



34)



A cartoon monkey with a large, friendly smile is peeking over a red-bordered sign. The sign is held by four hands, two on each side. The monkey's body is red and shaggy. The sign has a yellow background and contains text in Russian. In the bottom right corner of the sign, there is a bunch of three yellow bananas.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Подготовить информацию
 - об истории возникновения определённого интеграла ;
 - о сферах его применения;
2. Вычислительные упражнения из учебника