Тема: *"Функциональные ряды"*

Область сходимости функционального ряда.

Рассмотрим ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Определение. Ряд, членами которого являются функции, определенные в некоторой области изменения аргумента x, называется ***функциональным рядом***.

Определение. Точка $x = x_0$, при подстановке которой в функциональный ряд получается сходящийся числовой ряд, называется ***точкой сходимости*** функционального ряда.

Определение. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его ***областью сходимости***.

Частичная сумма функционального ряда, т.е. сумма первых n его членов

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x),$$

является функцией переменной x, определенной в области сходимости ряда.

Из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует предел $S_n(x)$ при $n \to \infty$.
В точках, не принадлежащих области сходимости, $S_n(x)$ не имеет конечного предела.

Если функциональный ряд сходится и имеет сумму $S(x)$, то разность $S(x) - S_n(x)$ называется n ***-м остатком ряда*** и обозначается:

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Если функциональный ряд сходится, то во всех точках сходимости ряда должен выполнятся необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0.$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

во всех точках сходимости ряда.

Для определения области сходимости функционального ряда обычно используют признаки Даламбера или Коши, применяемые к ряду, составленному из абсолютных величин членов ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1.$$

Все точки x, удовлетворяющие любому из этих условий, входят в область сходимости ряда.

Замечание. Если рассматриваемый предел равен единице, ряд может сходиться или расходиться, поэтому вопрос о сходимости ряда в граничных точках промежутка решается непосредственно подстановкой их значений в функциональный ряд.

Пример. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{2n}$.

Решение: $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{2n+2}}{2n+2}\frac{2n}{(x+3)^{2n}}\right| = (x+3)^2 < 1.$$

Следовательно, $-1 < x+3 < 1$, тогда $-4 < x < -2$.

При $x = -4$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

При $x = -2$ имеем тот же расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Таким образом, область сходимости исходного ряда есть интервал (-4;-2).

Определение:

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется поточечно сходящимся (или просто сходящимся) на E, если он сходится для любого $x \in E$.

Определение:

Сходящийся на $E \subset R$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ называется равномерно сходя-щимся, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \forall k > N_\varepsilon \ |S_k(x) - S(x)| < \varepsilon \ \forall x \in E.$$

Обозначается равномерная сходимость так: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на E.

<u>Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \;\; \forall k, m > N_\varepsilon \quad \left|\sum_{n=k}^{m} f_n(x)\right| < \varepsilon \;\; \forall x \in E.$$

<u>Следствие (необходимый признак Коши):</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x)| \rightrightarrows 0 \text{ на } E.$$

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов):

Если для $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на $E \subset R$ $\exists$ сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, такой, что $|f_n(x)| \leq a_n \; \forall x \in E$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на E.

Теорема (признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов):

Рассмотрим на $E \subset R$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x).$$

Признак Абеля: если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \rightrightarrows B(x)$ на $E, \exists C: \ |a_n(x)| < C \ \ \forall n \ \ \forall x \in E \ \ (a_n(x)$ равномерно ограничена на $E)$ и $a_n(x)$ монотонна по n, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Признак Дирихле: если $\exists C: \ \forall N \ \forall x \in E \ \left|\sum_{n=1}^{N} b_n(x)\right| < C$, $a_n(x)$ монотонна по n и $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на E,

то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E.

<u>Теорема:</u>

$f_n(x) \in C[a,b], \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $(a,b) \Longrightarrow S(x) \in C[a,b]$.

Теорема:

$$f(x) \in C[a,b] \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на}[a,b] \Longrightarrow \ \forall x_0, x \in [a,b] \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} S(t)dt$$

Теорема:

$$f_n(x) \in C^1[a,b], \exists x_0 \in [a,b], \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) - \text{сходится},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \rightrightarrows G(x) \text{ на}[a,b] \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \rightrightarrows S(x) \text{ на}[a,b] \text{и } S'(x) = G(x).$$

Теорема. Всякий функциональный ряд, равномерно сходящийся в области E, сходится в этой области абсолютно.

Пример. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ абсолютно сходится при любом $x \in (-\infty;+\infty)$

Решение: $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ при любых x, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ сходится равномерно, так как члены данного ряда не превосходят по модулю соответствующие члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ сходится абсолютно при любых x.

Степенные ряды.

Определение:

Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

называется степенным рядом с центром разложения в точке x_0, а числа a_n называются коэффициентами степенного ряда.

Замечание:

Сделаем замену переменной $t = x - x_0$.

Тогда степенной ряд будет выглядеть так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n .$$

Далее без ограничения общности будем рассматривать

<u>Утверждение (теорема Адамара):</u>

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в какой – то точке x_1, то он сходится $\forall x \in (-|x_1|, |x_1|)$.

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в какой – то точке x_2, то он расходится $\forall x \in (-\infty, -|x_2|) \cup$
$\cup\ (|x_2|, +\infty)$.

Следствие:

Пусть $A = \sup\limits_{\substack{\text{такие } x_1,\text{что} \\ \text{ряд сходится}}} \{|x_1|\}, B = \inf\limits_{\substack{\text{такие } x_2,\text{что} \\ \text{ряд расходится}}} \{|x_2|\}$

$\Longrightarrow \quad A = B$, и $\forall x \in (-A, A)$ ряд сходится,

а $\forall x \in (-\infty, -A) \cup (A, +\infty)$ ряд расходится.

Определение:

Число A из следствия называется радиусом сходимости ряда и обозначается R.

Если множество сходимости состоит только из центра разложения, то $R = 0$.

Если множество сходимости совпадает со всей числовой прямой, то $R = +\infty$.

Если $R \in (0, +\infty)$, то интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда

Определим область сходимости этого ряда.

Рассмотрим знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин членов степенного ряда, и применим к нему достаточный признак сходимости Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R.$$

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ***- радиус сходимости*** степенного ряда.

Применяя признак Коши получим равносильную формулу для нахождения радиуса сходимости степенного ряда:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

При всех $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при $|x| > R$ – расходится.

Интервал $(-R; R)$ называется ***интервалом сходимости*** степенного ряда.

В точках $x = \pm R$ сходимость и расходимость ряда устанавливается проверкой сходимости числовых рядов, полученных после подстановки в степенной ряд значений $x = -R$ и $x = R$.

Областью сходимости степенного ряда является интервал $(-R; R)$, к которому, в зависимости от конкретных случаев, могут быть добавлены один или оба конца отрезка $[-R; R]$.

В каждой точке интервала $(-R; R)$ степенной ряд сходится абсолютно.

Очевидно, любой степенной ряд сходится при $x = 0$.

Если других точек сходимости нет, то радиус сходимости $R = 0$.

Если же ряд сходится при любых $x \in (-\infty; +\infty)$, то радиус сходимости $R = \infty$.

Пример. Определить радиус, интервал и область сходимости степенного ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+3)}.$$

Решение: Так как $u_n=\dfrac{x^n}{n(n+3)}$ и $u_{n+1}=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$, то $a_n=\dfrac{1}{n(n+3)}$ и $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$. Следовательно $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)(n+4)}{n(n+3)}\right|=1$.

Интервал сходимости (-1;1).

Проверяем граничные точки:

$x=-1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+3)}$ - абсолютно сходящийся знакочередующийся ряд.

$x=1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+3)}$ - сходящийся ряд.

Следовательно, область сходимости ряда отрезок $[-1;1]$.

Для степенных рядов может быть доказана теорема.

Теорема. Пусть степенной ряд имеет интервал сходимости $(-R;R)$, а $r<R$ - произвольное положительное число. Тогда степенной ряд является равномерно сходящимся на отрезке $[-r;r]$.

Из свойств равномерно сходящихся рядов имеем следующие свойства:

1. Степенной ряд абсолютно сходится в любой точке интервала сходимости и, следовательно, степенные ряды можно почленно складывать и умножать (как многочлены) внутри интервала сходимости, при этом интервал сходимости полученных рядов сохраняется.

2. Сумма степенного ряда является бесконечно дифференцируемой функцией в каждой точке его интервала сходимости.

3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости. (и интегрировать)

Для степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

интервал сходимости: $(x_0 - R; x_0 + R)$, где $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

В точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ сходимость и расходимость ряда устанавливается проверкой сходимости соответствующих числовых рядов.

Пример. Найти область сходимости степенного ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+4)^n}{3^n}$.

Решение: $a_n = \dfrac{1}{3^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3^{n+1}}$, тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{3^{n+1}}{3^n}\right| = 3$ или

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}}} = 3.$$

Интервал сходимости $|x+4| < 3$ или $x \in (-7;-1)$.

Проверяем граничные точки:

при $x = -1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^n} = 1+1+\ldots+1+\ldots$ - расходящийся,

при $x = -7$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n}{3^n} = 1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$ - расходящийся.

Следовательно, область сходимости совпадает с интервалом сходимости $x \in (-7;-1)$.

Многочлен Тейлора.

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку x_0.

Определение. Многочлен n -ой степени:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

(где $0! = 1$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$) называется n ***-м многочленом Тейлора*** функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$.

Легко проверить, что выполняется равенство:

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0,\dots,n.$$

Если функция $f(x)$ сама по себе является многочленом степени m, то запись ее в виде многочлена Тейлора всегда возможна и означает лишь представление данного многочлена по степеням разности $(x - x_0)$.

Пример. Представить функцию $f(x) = x^3$ в виде многочлена Тейлора по степеням $(x - 2)$.

Решение: Имеем $f(2) = 2^3 = 8$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$, $f''(2) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$, $f'''(2) = 6$.

Все производные выше третьего порядка от $f(x) = x^3$ равны нулю.

Следовательно, многочлен Тейлора при $x_0 = 2$ для $f(x) = x^3$ имеет вид:

$$P_3(x) = 8 + 12(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

Формула Тейлора.

Если функция $f(x)$ не является многочленом, то ее всегда можно представить в виде формулы

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

называемой ***формулой Тейлора*** для функции $f(x)$.

$R_n(x)$ называется n ***- м остаточным членом формулы Тейлора*** и определяет отличие функции $f(x)$ от многочлена Тейлора.

Остаточный член, представленный в виде:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ где } \xi \in (x, x_0),$$

называется ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

Формула Тейлора при $x_0 = 0$ является представлением функции $f(x)$ в виде многочлена в окрестности начала координат и называется ***формулой Маклорена***:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где $\xi = \theta x, 0 < \theta < 1$.

При x близком к x_0, остаточный член является неизвестной бесконечно малой величиной порядка n при $x \to x_0$ и формулу Тейлора можно записать в виде формулы:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

(где $o(\alpha^n)$ - бесконечно малая величины порядка n при $\alpha \to 0$), которая называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ с ***остаточным членом в форме Пеано***: $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее некоторой окрестности непрерывные n производных, то она может быть представлена в виде формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа или при $x \to x_0$ с остаточным членом в форме Пеано.

Ряд Тейлора.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее некоторой δ-окрестности, т.е. для всех $x \in (|x - x_0| \le \delta)$ непрерывные производные любого порядка, ограниченные одним и тем же числом M, то она разлагается в этой окрестности точки x_0 в сходящийся к функции $f(x)$ степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n ,$$

который называется ***рядом Тейлора.***

Для $x_0 = 0$ соответствующий ряд называется ***рядом Маклорена***:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Замечание. Формула Лагранжа или формула конечных приращений, является частным случаем формулы Тейлора при $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций и укажем их области сходимости.

Функция	**Разложение в ряд Тейлора при** $x_0 = 0$ **(ряд Маклорена)**	**Область сходимости**
e^x	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$(-\infty;+\infty)$
$\sin x$	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty;+\infty)$
$\cos x$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$(-\infty;+\infty)$
$(1+x)^m$	$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n$	$(-1;1)$
$\ln(1+x)$	$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$(-1;1]$
$\ln(1-x)$	$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \ldots = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$[-1;1)$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$(-1;1)$

Пример. Вычислить приближенное значение $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, взяв три члена разложения функции $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена.

Решение: Подставив $x=-\frac{1}{3}$ в ряд $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}=e^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3^3}+....$$

Полученный ряд является знакочередующимся и ошибка δ при замене его суммой первых трех членов не превышает по абсолютной величине четвертого члена, т.е.

$$\delta\le\frac{1}{3!\cdot 3^3}=0{,}00617<10^{-2}.$$

Следовательно, $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}=e^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3^2}=0{,}722\approx 0{,}72$.

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{70}$ с точностью до 10^{-3}.

Решение: Ближайшее к 70 целое число в кубе равно 64, тогда

$$\sqrt[3]{70}=\sqrt[3]{64+6}=4\cdot\sqrt[3]{1+\frac{6}{64}}=4\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Используя разложение в ряд функции $(1+x)^m$ при $m=\frac{1}{3}$ и $x=\frac{3}{32}$, получим:

$$\sqrt[3]{70}=4\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}}=4\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{32}-\frac{1\cdot 2\cdot 3^2}{3^2\cdot(32)^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 3^3}{3^3\cdot(32)^3}-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot 3^4}{3^4\cdot(32)^4}+\ldots\right)\approx$$

$$\approx 4\left(1+\frac{1}{32}-\frac{2}{32^2}+\frac{10}{32^3}\right)\approx 4{,}118.$$

Здесь первый из неучтенных членов $\frac{4\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{32^4}<10^{-3}$.

Займемся теперь вычислением логарифмов.

По формуле

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

вычислить логарифмы можно лишь для чисел от 0 до 2.

Чтобы вычислить $\ln a$, где a - любое положительное число, используют формулу:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Положив $\frac{1+x}{1-x}=a$, получим $x=\frac{a-1}{a+1}$.

Ошибки при вычислении логарифмов с помощью конечного числа членов ряда можно оценить следующим образом.

По a определим x, затем берем несколько членов в формуле:

$$\ln a = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) + r_n .$$

Остаток ряда r_n и есть ошибка.

Учитывая, что $\frac{1}{2n+5} < \frac{1}{2n+3}$, $\frac{1}{2n+7} < \frac{1}{2n+3}$ и т.д., получим

$$r_n = 2\left(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+5} + \ldots\right) < 2\left(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+3} + \frac{x^{2n+7}}{2n+3} + \ldots\right) =$$

$$= 2\frac{x^{2n+3}}{2n+3}(1 + x^2 + x^4 + \ldots) = 2\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{1}{1-x^2} .$$

Так как $|x| < 1$, то $1 + x^2 + x^4 + \ldots$ есть бесконечно убывающая геометрическая последовательность с $q = x^2$, ее сумма равна $\frac{1}{1-x^2}$.

Пример. Вычислить $\ln 5$ с точностью до 10^{-3}.

Решение: Для вычисления $\ln 5$ положим $\frac{1+x}{1-x} = 5$, откуда $x = \frac{2}{3}$:

$$\ln 5 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{2^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{2^5}{5 \cdot 3^5} + \ldots\right) = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2^2}{3 \cdot 3^2} + \frac{2^4}{5 \cdot 3^4} + \ldots + \frac{2^{2n}}{(2n+1) \cdot 3^{2n}} + \ldots\right).$$

Если будем учитывать члены ряда, начиная с $\dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\cdot 3^{2n}}$, то остаток ряда

$$\frac{4}{3}\left(\frac{2^{2n}}{(2n+1)\cdot 3^{2n}}+\frac{2^{2(n+1)}}{(2n+3)\cdot 3^{2(n+1)}}+\frac{2^{2(n+2)}}{(2n+5)\cdot 3^{2(n+2)}}+\ldots\right)=$$

$$\frac{4\cdot 2^{2n}}{3\cdot(2n+1)\cdot 3^{2n}}\left(1+\frac{(2n+1)\cdot 2^2}{(2n+3)\cdot 3^2}+\frac{(2n+1)\cdot 2^4}{(2n+5)\cdot 3^4}+\ldots\right)<\frac{4\cdot 2^{2n}}{3\cdot(2n+1)\cdot 3^{2n}}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\ldots\right)=$$

$$=\frac{4\cdot 2^{2n}}{3(2n+1)3^{2n}(1-4/9)}=\frac{2^{2n+2}}{5(2n+1)3^{2n-1}}$$

должен быть меньше 10^{-3}.

При оценке ряда учитывалось, что $\dfrac{2n+1}{2n+3}<1$, $\dfrac{2n+1}{2n+5}<1$ и т.д.

Итак, задача будет решена, если взять $\dfrac{2^{2n+2}}{5(2n+1)3^{2n-1}}<10^{-3}$.

Это соотношение выполняется при $n=7$.

Следовательно, с нужной нам точностью $\ln 5=\dfrac{4}{3}\left(1+\dfrac{4}{2\cdot 9}+\dfrac{16}{5\cdot 81}+\ldots+\dfrac{4^7}{15\cdot 9^7}\right)=1{,}609$.