Вторая производная, ее геометрический смысл. Применение производной к построению графиков функций

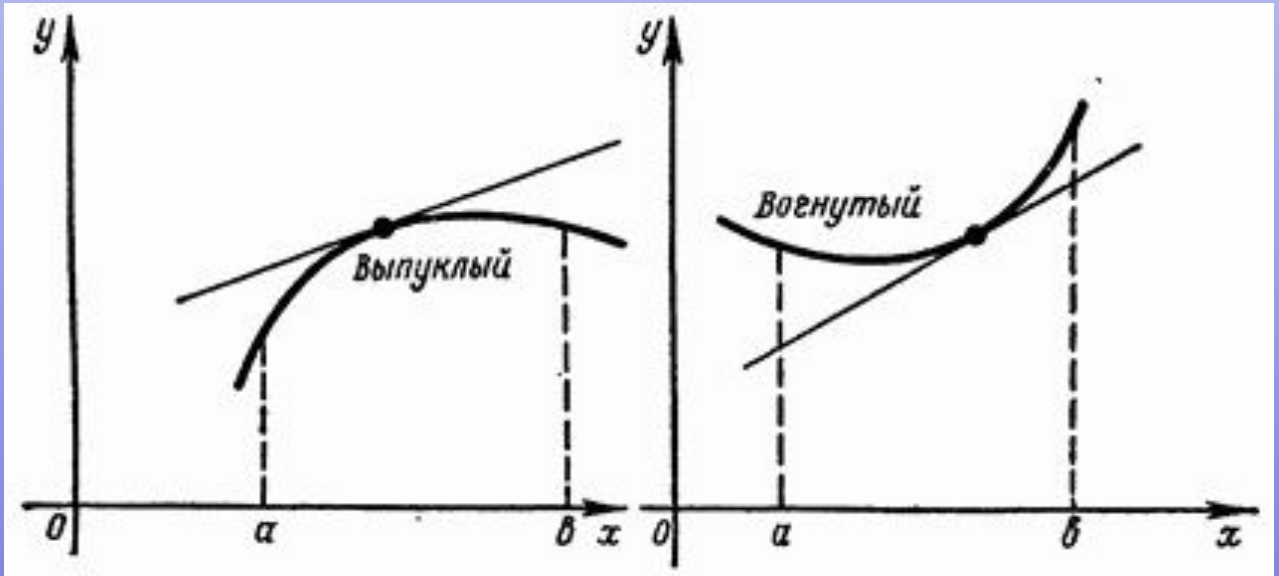
Вторая производная

Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ дифференцируема в точке (x_0), то её производная называется ***второй производной*** функции $f(x)$ в точке (x_0), и обозначается $f''(x_0)$.

Выпуклость, вогнутость функции

Функция $f(x)$ называется ***выпуклой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *ниже* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке $(x_0, f(x_0))$, x_0 принадлежит (a, b).

Функция $f(x)$ называется ***вогнутой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *выше* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке $(x_0, f(x_0))$, x_0 принадлежит (a, b).



Применение второй производной к построению графиков функций

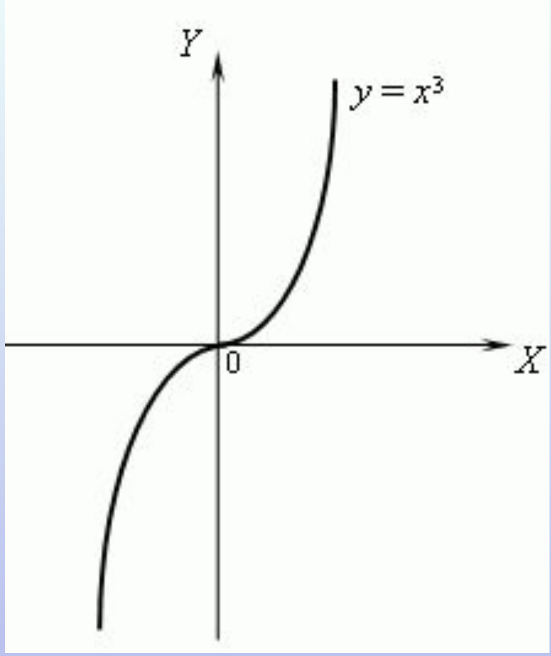
Если $f''(x) > 0$ для любого x из (a, b), то функция $f(x)$ является ***вогнутой*** на интервале (a, b).

Если $f''(x) < 0$ для любого x из (a, b), то функция $f(x)$ является ***выпуклой*** на интервале (a, b).

Точки перегиба функции

Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется ***точкой перегиба***.

Пример



Рассмотрим график функции $y = x^3$

Эта функция является вогнутой при $x > 0$ и выпуклой при $x < 0$.

В самом деле, $y'' = 6x$, но $6x > 0$ при $x > 0$ и $6x < 0$ при $x < 0$, следовательно, $y'' > 0$ при $x > 0$ и $y'' < 0$ при $x < 0$, откуда следует, что функция $y = x^3$ является вогнутой при $x > 0$ и выпуклой при $x < 0$.

Тогда $x = 0$ является точкой перегиба функции $y = x^3$.

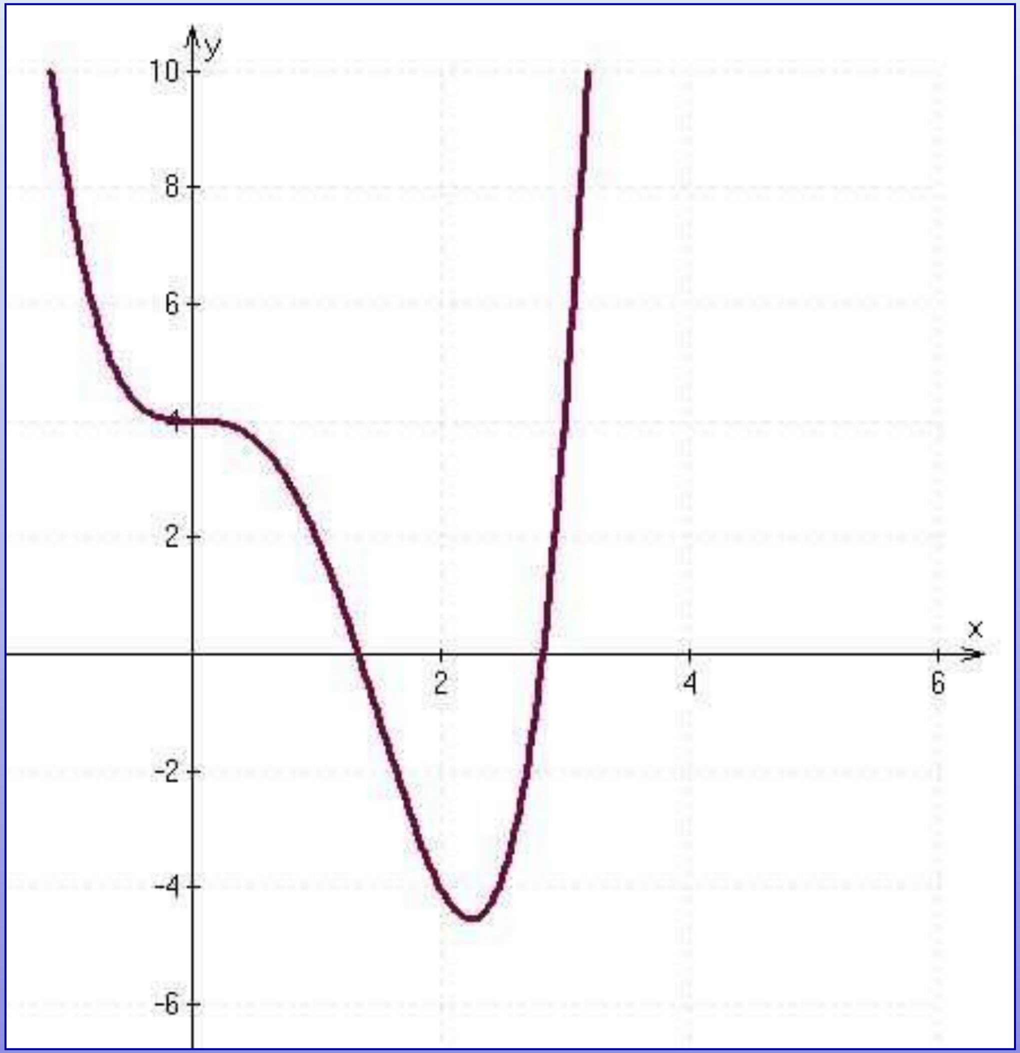
Домашнее задание

Найти промежутки выпуклости, вогнутости функции, точки перегиба.

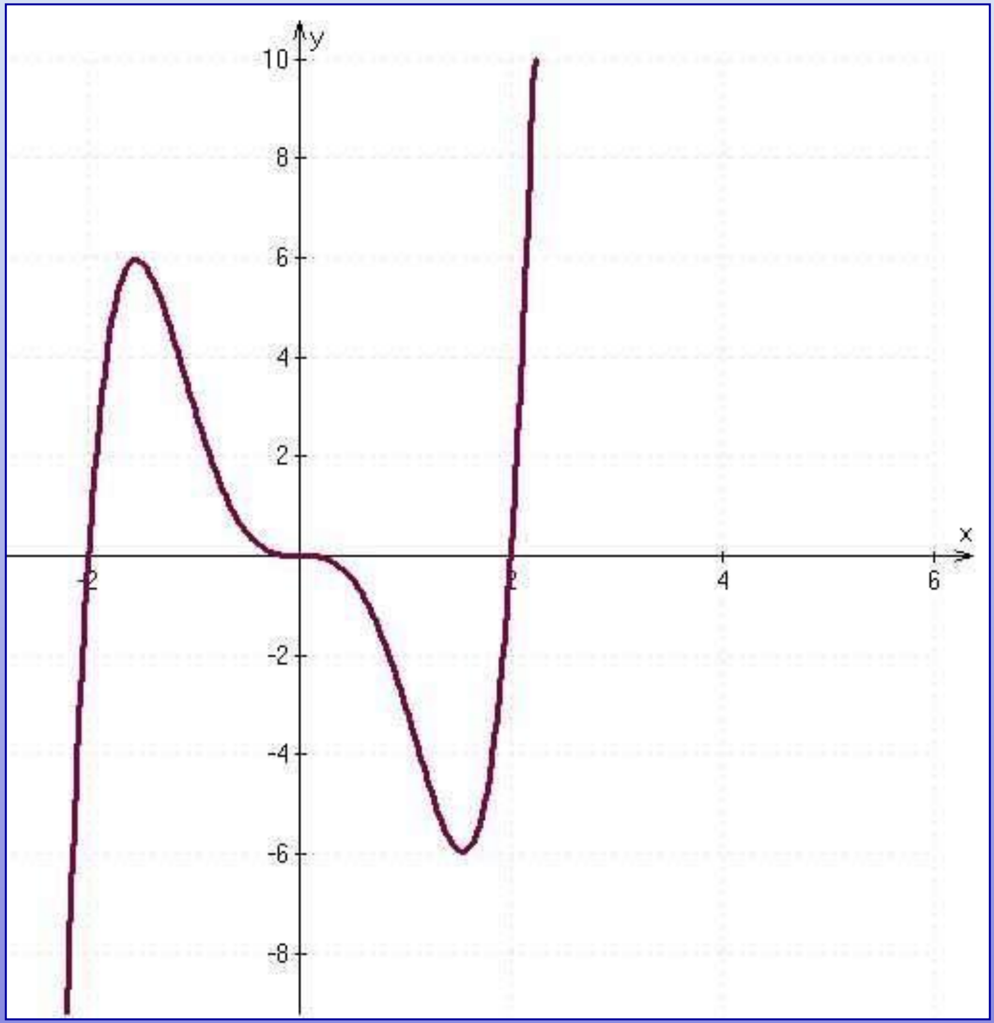
$f(x) = x^4 - 4x^2$

$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$

$f(x) = (x-1)^3$



$f(x) = x^4 - 3x^3 + 4$



$$f(x) = x^5 - 4x^3$$