

Плоскость в пространстве

- Общее уравнение плоскости
- Уравнение плоскости в отрезках
- Уравнение плоскости, проходящей через три точки
- Угол между двумя плоскостями
- Расстояние от точки до плоскости

Общее уравнение плоскости

Если в пространстве фиксирована произвольная декартова система координат $Oxyz$, то всякое уравнение первой степени с тремя переменными $x y z$ определяет относительно этой системы плоскость.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

$A; B; C; D$ – некоторые постоянные, причем из чисел $A; B; C$ хотя бы одно отлично от нуля.

Общее уравнение плоскости

Пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит плоскости:

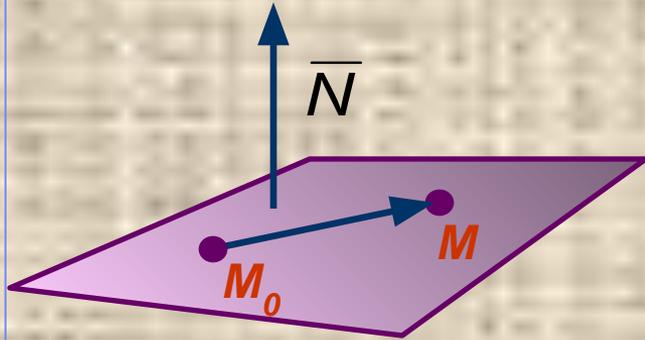
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (2)$$

Вычтем из уравнения (1) тождество (2):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

Общее уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости



Произвольная точка $M(x; y; z)$ лежит на плоскости, если ее координаты удовлетворяют уравнению (3):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Уравнение (3) является условием перпендикулярности двух векторов:

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\} \quad \text{и} \quad \boxed{\overline{N} = \{A; B; C\}}$$

Таким образом, точка M лежит в плоскости, если $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$.

Значит \overline{N} перпендикулярен любому вектору, лежащему в плоскости и, следовательно, самой плоскости.

Общее уравнение плоскости называется полным, если все коэффициенты $A; B; C; D$ отличны от нуля.

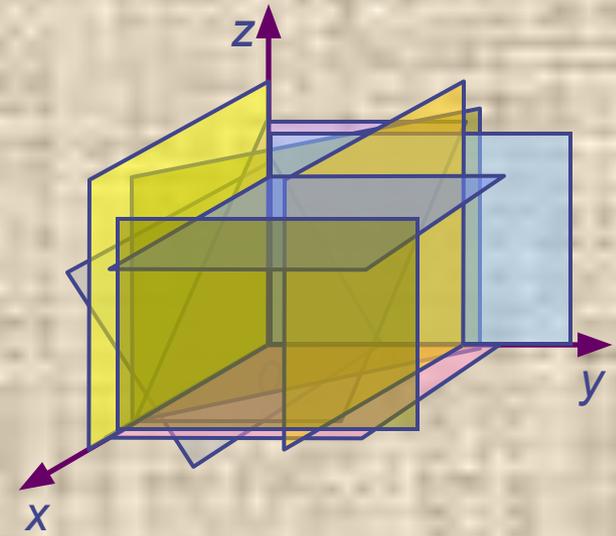
Нормальный вектор
плоскости

В противном случае уравнение называется неполным.

Общее уравнение плоскости

Виды неполных уравнений:

- 1) $D = 0; Ax + By + Cz = 0$ Плоскость проходит через точку O .
- 2) $A = 0; By + Cz + D = 0 \parallel (OX)$
- 3) $B = 0; Ax + Cz + D = 0 \parallel (OY)$
- 4) $C = 0; Ax + By + D = 0 \parallel (OZ)$
- 5) $A = 0; B = 0; Cz + D = 0 \parallel (XOY)$
- 6) $B = 0; C = 0; Ax + D = 0 \parallel (YOZ)$
- 7) $A = 0; C = 0; By + D = 0 \parallel (XOZ)$
- 8) $B = 0; C = 0; D = 0; Ax = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (YOZ)$
- 9) $A = 0; C = 0; D = 0; By = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (XOZ)$
- 10) $A = 0; B = 0; D = 0; Cz = 0 \Rightarrow z = 0 \quad (XOY)$



Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим полное уравнение плоскости:

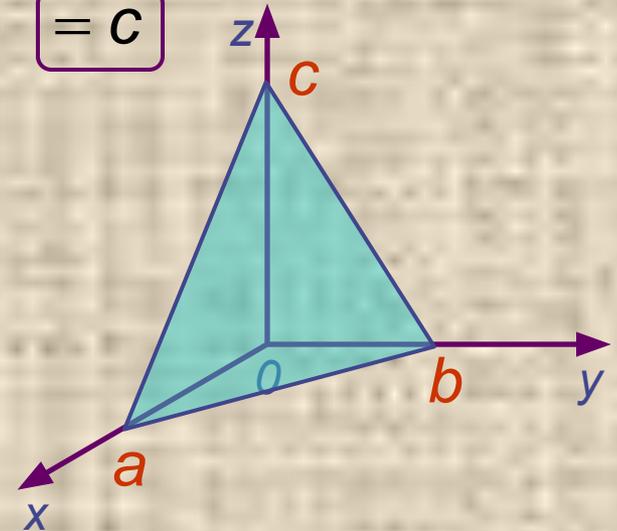
$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = -D \Rightarrow$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Уравнение плоскости
в отрезках

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ = a & = b & = c \end{array}$$

Уравнение в отрезках используется для построения плоскости, при этом a , b и c – отрезки, которые отсекает плоскость от осей координат.



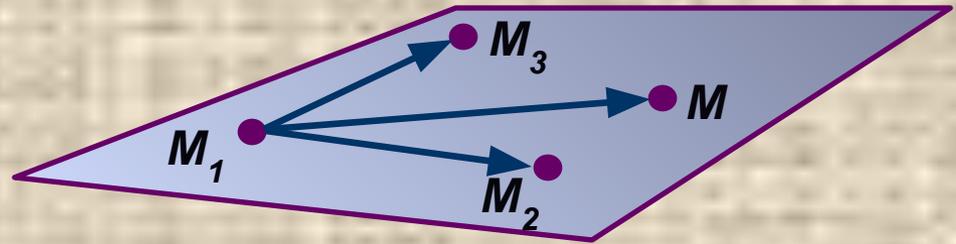
Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$ не лежат на одной прямой.

Тогда векторы: $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и

$\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ не коллинеарны.

Точка $M(x; y; z)$ лежит в одной плоскости с точками M_1 , M_2 и M_3 только в том случае, если векторы:



$\overline{M_1M_2}$; $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$ компланарны.

$$\left(\overline{M_1M} \times \overline{M_1M_2} \right) \cdot \overline{M_1M_3} =$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

· Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

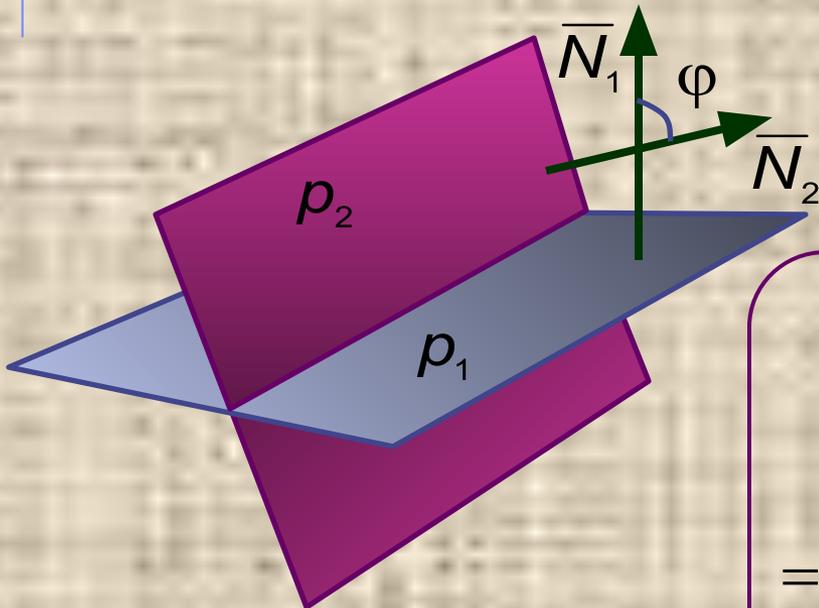
Угол между двумя плоскостями

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Углом между этими плоскостями называется угол между нормальными векторами к этим плоскостям.



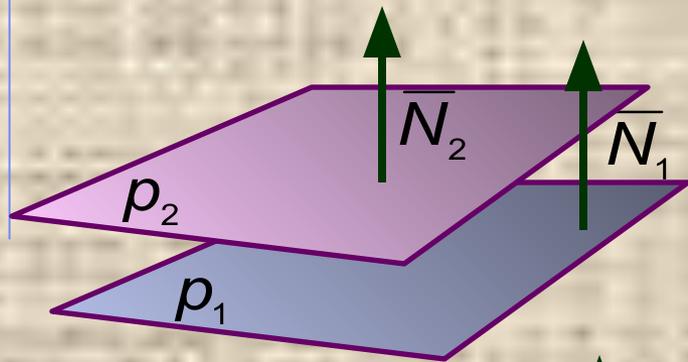
$$\bar{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$\bar{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

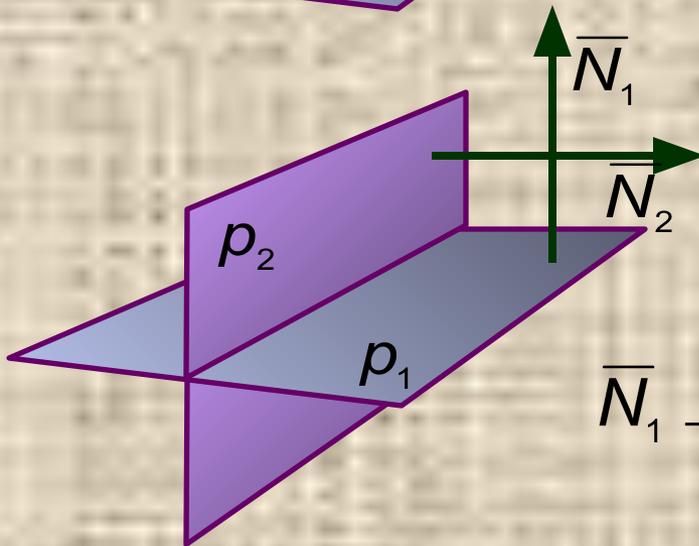
$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \\ &= \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \end{aligned}$$

Угол между двумя плоскостями

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей аналогичны условию параллельности и перпендикулярности нормальных векторов:



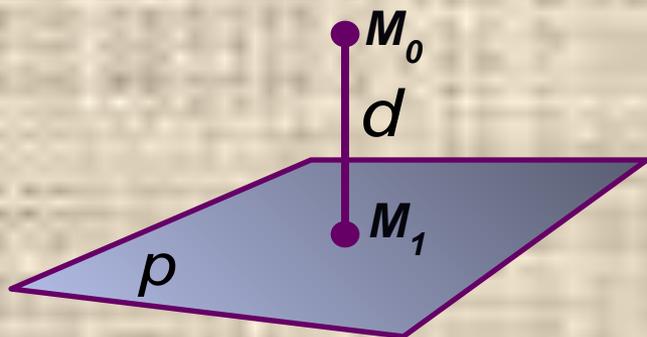
$$\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на плоскость $p: Ax + By + Cz + D = 0$



$$d = |M_1M_0|$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

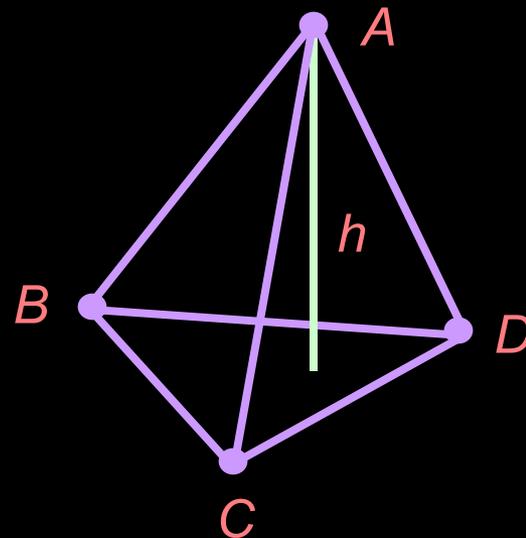
Пример

Найти длину высоты тетраэдра $ABCD$, опущенной из точки A .

Координаты вершин: $A(1; 1; 1)$, $B(0; 2; 5)$, $C(3; -1; 4)$, $D(4; 2; 1)$

Уравнение плоскости BCD :

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-5 \\ 3-0 & -1-2 & 4-5 \\ 4-0 & 2-2 & 1-5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$



$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-5 \\ 3 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - (y-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + (z-5) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$12x + 8(y-2) + 12(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y + 3z - 19 = 0$$

Пример

Расстояние от точки **A** до плоскости **B****C****D**:

$$h = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 19|}{\sqrt{9 + 4 + 9}} \Rightarrow$$

$$h = \frac{11}{\sqrt{22}} \approx 2.34$$

