МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

2 семестр

2022

6. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

6.1 Теоремы о дифференцируемых функциях

6.2 Исследование функции и построение её графика

6.3 Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

6. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

6.3 Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

6.3.1 Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке и на интервале

6.3.2 Задачи на оптимизацию

6.3.1 НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И НА ИНТЕРВАЛЕ

Схема нахождения наибольшего (*M*) и наименьшего (*m*) значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1) Найти производную первого порядка функции.

2) Найти критические точки 1-го рода, принадлежащие интервалу $(a; b)$.

3) Найти значения функции в этих точках.

4) Найти $f(a)$ и $f(b)$.

5) Сравнить полученные в пунктах 3) и 4) значения, выбрать из них наибольшее (*M*) и наименьшее (*m*), записать результат.

6.3.1 НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И НА ИНТЕРВАЛЕ

Пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 8$ на отрезке: а) *[0; 6]*; б) *[-3; 3]*.

$$y' = x^2 - 2x - 3$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$D = \left(-2\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-3\right) = 16$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

критические точки 1-го рода

6.3.1 НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И НА ИНТЕРВАЛЕ

Пример

$$y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+8$$

$a)\ \left[0;6\right]$

$x_1=-1\notin\left(0;6\right)$

$x_2=3\in\left(0;6\right)$

$y\left(3\right)=9-9-9+8=-1$

$y\left(0\right)=0+8=8$

$y\left(6\right)=72-36-18+8=26$

$M=26,\quad m=-1$

$б)\ \left[-3;3\right]$

$x_1=-1\in\left(-3;3\right)$

$x_2=3\notin\left(-3;3\right)$

$y\left(-1\right)=-\frac{1}{3}-1+3+8=9\frac{2}{3}$

$y\left(-3\right)=-9-9+9+8=-1$

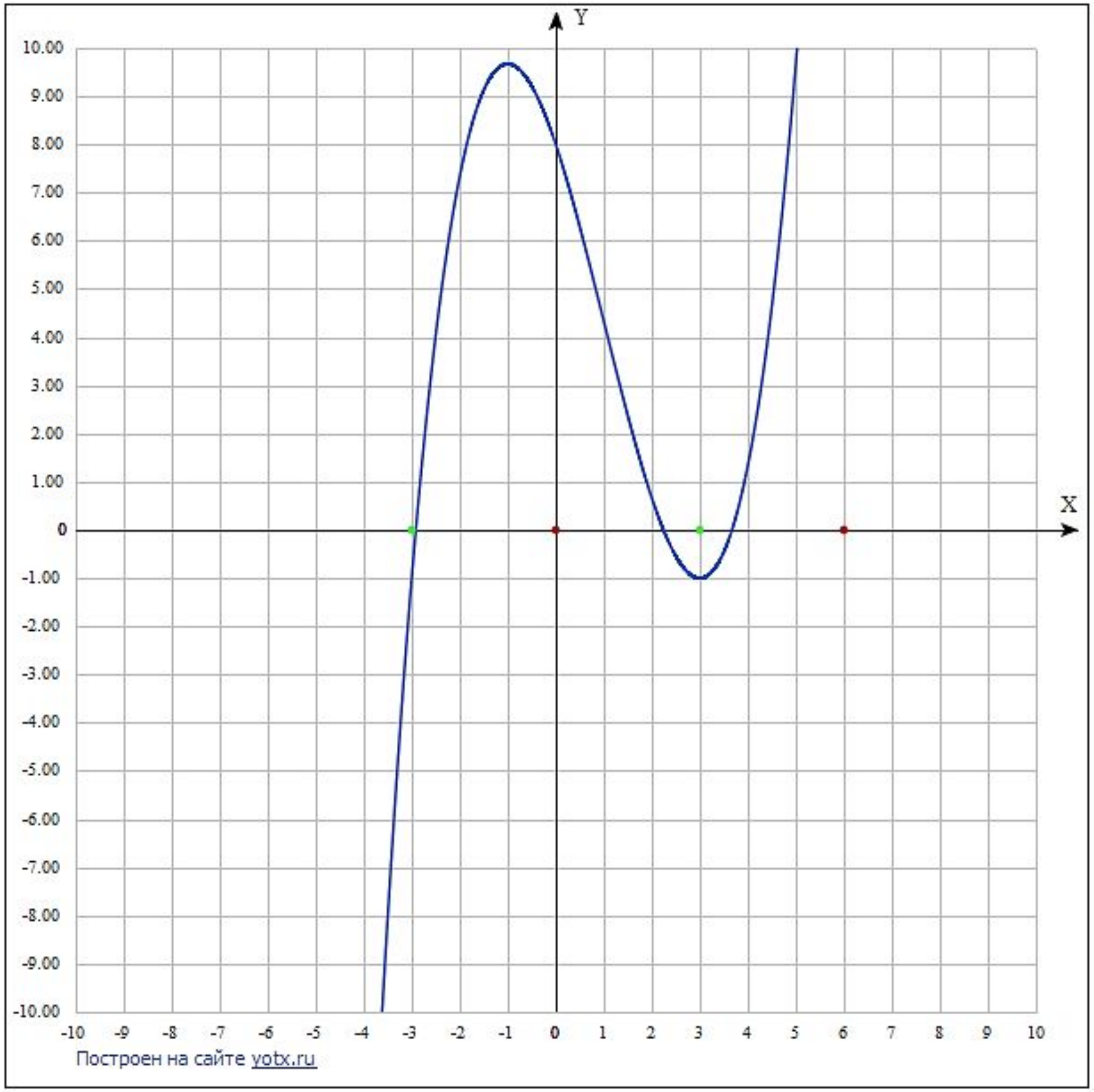
$y\left(3\right)=9-9-9+8=-1$

$M=9\frac{2}{3},\quad m=-1$

6.3.1 НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И НА ИНТЕРВАЛЕ

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 8$$

Сравните полученные результаты с графиком функции



$а)\ \ [0;6]$

$$M = 26, \quad m = -1$$

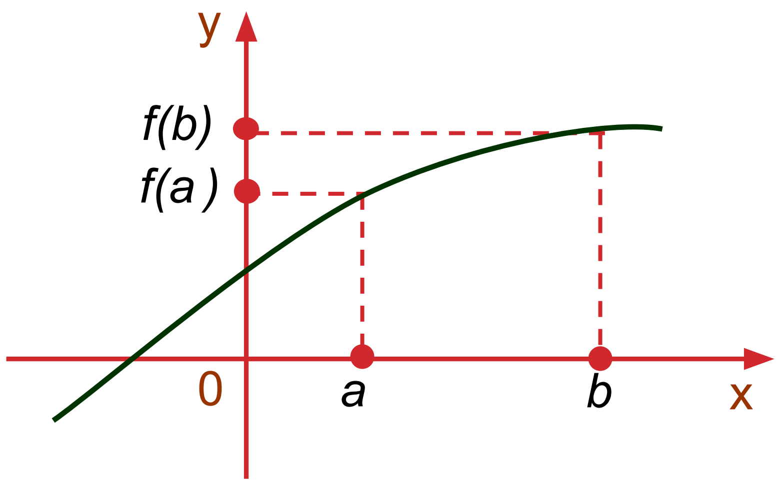
$б)\ \ [-3;3]$

$$M = 9\frac{2}{3}, \quad m = -1$$

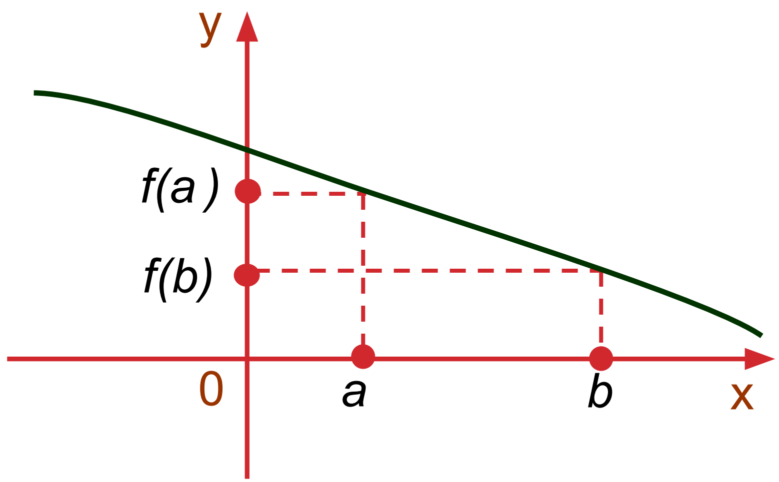
6.3.1 НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И НА ИНТЕРВАЛЕ

Замечания.

1. Если функция ***y = f(x)*** непрерывна на отрезке ***[a; b]*** и возрастает (убывает) на нём, то



$$M = f(b), \ \ m = f(a)$$

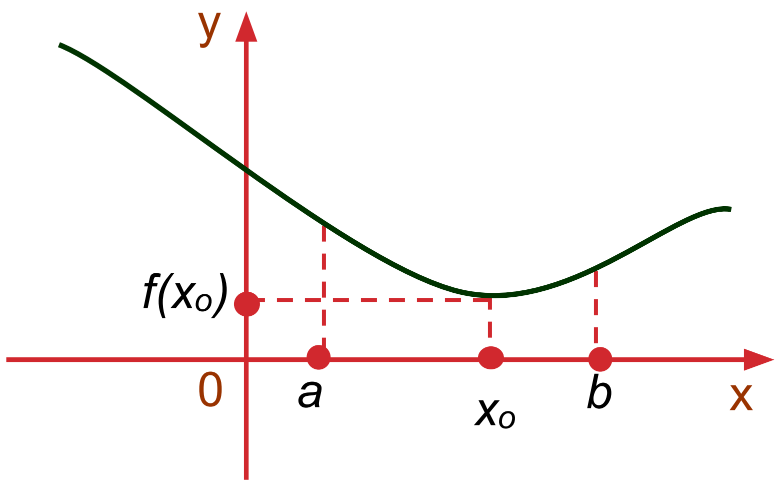


$$M = f(a), \ \ m = f(b)$$

6.3.1 НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И НА ИНТЕРВАЛЕ

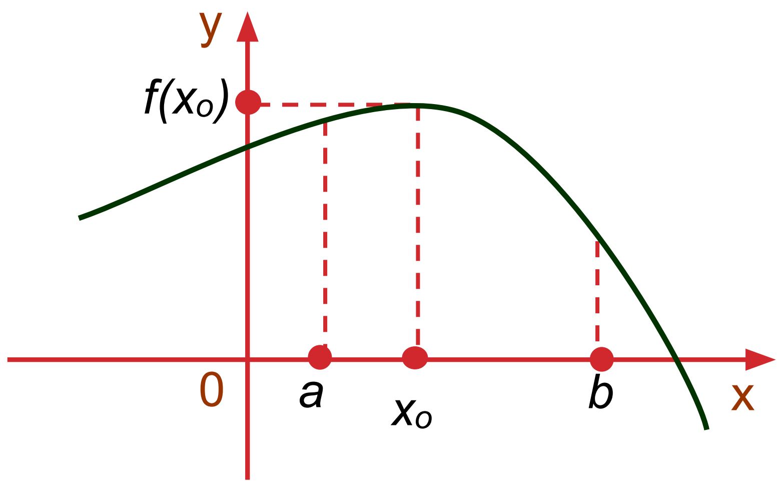
Замечания.

2. Если функция ***y = f(x)*** непрерывна на отрезке ***[a; b]*** и имеет только один экстремум на нём, то



x_0 – точка минимума

$m = f(x_0)$



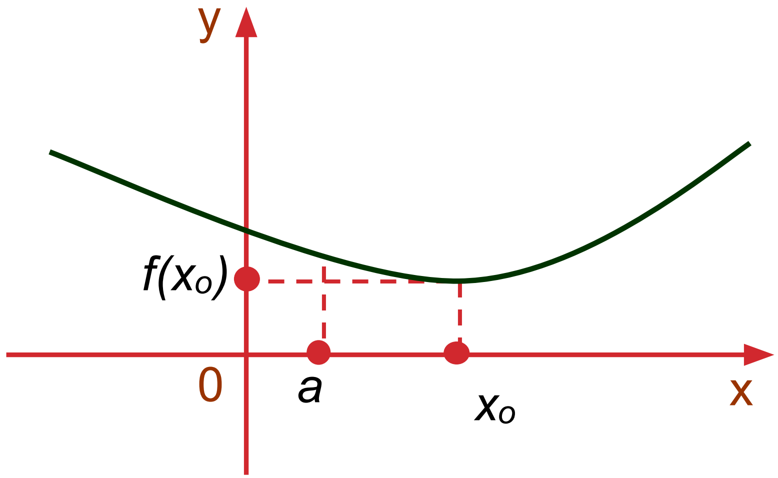
x_0 – точка максимума

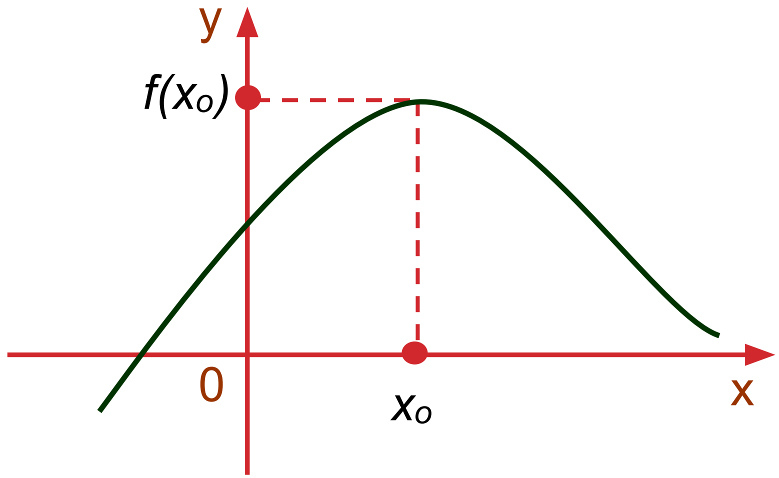
$M = f(x_0)$

6.3.1 НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И НА ИНТЕРВАЛЕ

Замечания.

3. Предыдущее замечание справедливо, если функция ***y = f(x)*** непрерывна на интервале ***(a; b)*** или на бесконечном промежутке





x_0 – точка минимума,

$x_0 \in [a;+\infty) \Rightarrow m = f(x_0)$

x_0 – точка максимума,

$x_0 \in (-\infty;+\infty) \Rightarrow M = f(x_0)$

6.3.1 НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И НА ИНТЕРВАЛЕ

Схема нахождения наибольшего (*M*) или наименьшего (*m*) значений функции *y = f(x)* на интервале, если функция имеет один экстремум

1. Убедиться, что заданный интервал принадлежит области определения ***D(f)*** функции ***y = f(x)***.
2. Найти производную функции ***f′(x)***.
3. Решить уравнение ***f′(x) = 0*** и найти критическую точку 1-го рода, принадлежащую интервалу.

Первый способ	Второй способ
4. Найти производную второго порядка функции ***f′′(x)***.	4. Начертить заданный интервал, разбитый критической точкой 1-го рода на две части.
5. Найти значение этой производной в критической точке 1-го рода. Сделать выводы, используя второе достаточное условие существования экстремума.	5. Найти знак производной на каждой части интервала. Сделать выводы, используя первое достаточное условие существования экстремума.

6. Найти максимум (минимум) функции, он и будет являться наибольшим (наименьшим) значением функции на заданном интервале.

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении практических задач из различных дисциплин.

Профессионально-ориентированные задачи (ПОЗ) позволяют исследовать некоторые проблемы из области профессиональной деятельности будущих бакалавров-строителей.

Среди ***проблем*** можно выделить следующие:

- определение оптимальных размеров запланированных к строительству или изготовлению объектов,
- минимизация денежных затрат в производстве и строительстве,
- минимизация временных затрат,
- организация производственного процесса с целью получения наибольшей прибыли и др.

Разрешение этих проблем связано с поиском оптимального решения, то есть с оптимизацией каких-либо параметров. Поэтому для успешной деятельности в выбранной Вами профессии необходимо научиться решать задачи подобного типа. Будем называть их ***задачами на оптимизацию***.

Для их решения предлагается использовать ***метод математического моделирования***.

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Схема исследования ПОЗ на оптимизацию

1) Этап построения модели.

1. Сформулировать задачу на математическом языке (*математическая задача (1)*).
2. Выявить в задаче оптимизируемую величину (указанием на неё является требование задачи о наименьшем или наибольшем её значении).
3. Составить аналитическую формулу для функции, описывающей оптимизируемую величину. Функция должна зависеть только от одного аргумента. Если неизвестных получилось более одного, то нужно взять одну из них за независимую переменную (аргумент), а другие неизвестные выразить через эту переменную и известные по условию задачи величины.
4. Установить по условию задачи реальные границы изменения аргумента (это может быть отрезок, полуинтервал или интервал).
5. Сформулировать задачу о нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на заданном промежутке или о нахождении точки из заданного промежутка, где функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения (*математическая задача (2)*).

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Схема исследования ПОЗ на оптимизацию

2) Этап решения.

6. Решить математическую задачу (2), используя соответствующие алгоритмы.

7. Решить математическую задачу (1), найдя требуемые величины.

3) Этап интерпретации.

8. Найти все необходимые величины в единицах, адекватных требованиям профессионально-ориентированной задачи, развёрнуто ответить на вопрос задачи.

Указания

1) Ответы к математическим задачам не должны быть приближёнными!
2) Для интерпретации полученных результатов внимательно перечитайте условие профессионально-ориентированной задачи. Вычислите (точно или приближённо) требуемые параметры. Напишите ответ в терминах задачи.

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Профессионально-ориентированная задача

Требуется оптимизировать затраты на постройку выставочного павильона объемом 1000 $м^3$. Павильон должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда, высота которого 6 м.

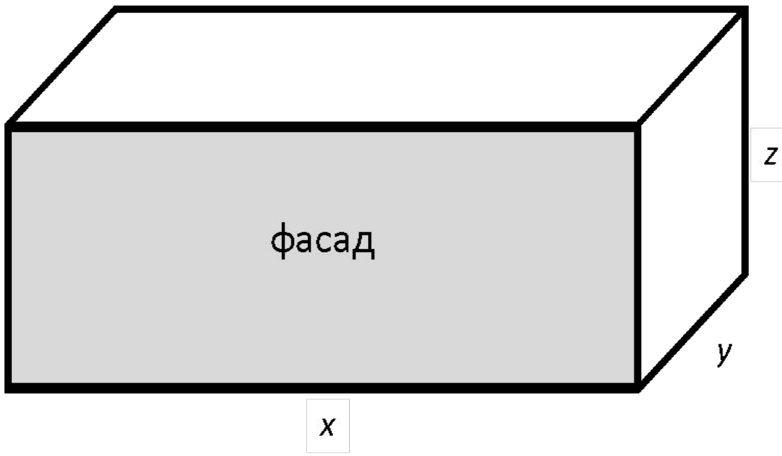
Стоимость сооружения 1 $м^2$ фасада равна 10.000 рублей, трёх других стен – 5000 рублей, крыши – 7000 рублей. Каковы должны быть размеры павильона, чтобы общая стоимость его сооружения была наименьшей? Отдельно рассчитать стоимость сооружения фасада, трех других стен и крыши.

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Решение

1) Этап построения модели.

Математическая задача (1).
Найти длину и ширину прямоугольного параллелепипеда при заданных условиях.



Рассчитаем стоимость сооружения фасада, других стен и крыши:

фасад $$C_{ф} = 10000 \cdot x \cdot 6 = 60000x,$$

три другие стены $$C_{ст} = 5000 \cdot (x \cdot 6 + y \cdot 6 + y \cdot 6) = 30000(x + 2y),$$

крыша $$C_{кр} = 7000 \cdot x \cdot y = 7000xy.$$

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Решение

1) Этап построения модели.

Тогда стоимость сооружения всего павильона:

$$C = C_ф + C_{ст} + C_{кр} = 60000x + 30000(x + 2y) + 7000xy.$$

Выразим величину ***y*** через ***x*** и известные величины (объём).

$$V = 6xy \quad \Rightarrow \quad y = \frac{V}{6x} = \frac{1000}{6x} = \frac{500}{3x}$$

$$C = 60000x + 30000\left(x + 2\cdot\frac{500}{3x}\right) + 7000x\cdot\frac{500}{3x} = 90000x + \frac{10000000}{x} + \frac{3500000}{3}.$$

Итак, мы составили функцию одного аргумента:

$$C(x) = 90000x + \frac{10000000}{x} + \frac{3500000}{3}, \quad \text{где} \quad x \in (0;\ +\infty)$$

Математическая задача (2).
Найти точку на интервале ***(0;+∞)***, в которой функция ***C(x)*** достигает своего наименьшего значения.

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Решение

2) Этап решения.

Область определения:

$$D(C)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty) \quad \Rightarrow \quad (0;+\infty)\subset D(C).$$

Производная первого порядка:

$$C'(x)=\left(90000x+\frac{10000000}{x}+\frac{3500000}{3}\right)'=90000-\frac{10000000}{x^2}.$$

Критические точки 1-го рода:

$$90000-\frac{10000000}{x^2}=0; \quad 9-\frac{1000}{x^2}=0; \quad \frac{9x^2-1000}{x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2-1000=0, \\ x^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{1000}{9}, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{10\sqrt{10}}{3}, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $x\in(0;+\infty)$

получаем $x=\dfrac{10\sqrt{10}}{3}$ - единственная критическая точка 1-го рода.

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Решение

2) Этап решения.

Докажем, что она является точкой минимума (1 способ).

Производная второго порядка:

$$C''(x)=\left(90000-\frac{10000000}{x^2}\right)'=-\left(-\frac{10000000\cdot 2x}{x^4}\right)=\frac{20000000}{x^3}.$$

Заметим, что $C''(x)>0 \quad \forall x\in(0;+\infty),$ поэтому $C''\left(\frac{10\sqrt{10}}{3}\right)>0.$

Найденная критическая точка является точкой минимума функции ***C(x)***. Так как эта точка единственная на интервале, то именно в ней функция достигает своего наименьшего значения.

Математическая задача (2) решена.

Размеры прямоугольного параллелепипеда:

длина $x=\frac{10\sqrt{10}}{3},$ ширина $y=\frac{500}{3x}=\frac{500}{3\left(\frac{10\sqrt{10}}{3}\right)}=\frac{500}{10\sqrt{10}}=5\sqrt{10},$

высота $z=6.$

Математическая задача (1) решена.

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Решение

3) Этап интерпретации.

Представим размеры павильона, общая стоимость сооружения которого наименьшая, с точностью до сантиметров.

Длина павильона $x = \dfrac{10\sqrt{10}}{3} \approx 10{,}54\,(\text{м}),$

ширина павильона $y = 5\sqrt{10} \approx 15{,}81\,(\text{м}),$

высота павильона $z = 6\,(\text{м}).$

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Решение

3) Этап интерпретации.

Рассчитаем стоимость сооружения частей павильона в рублях:

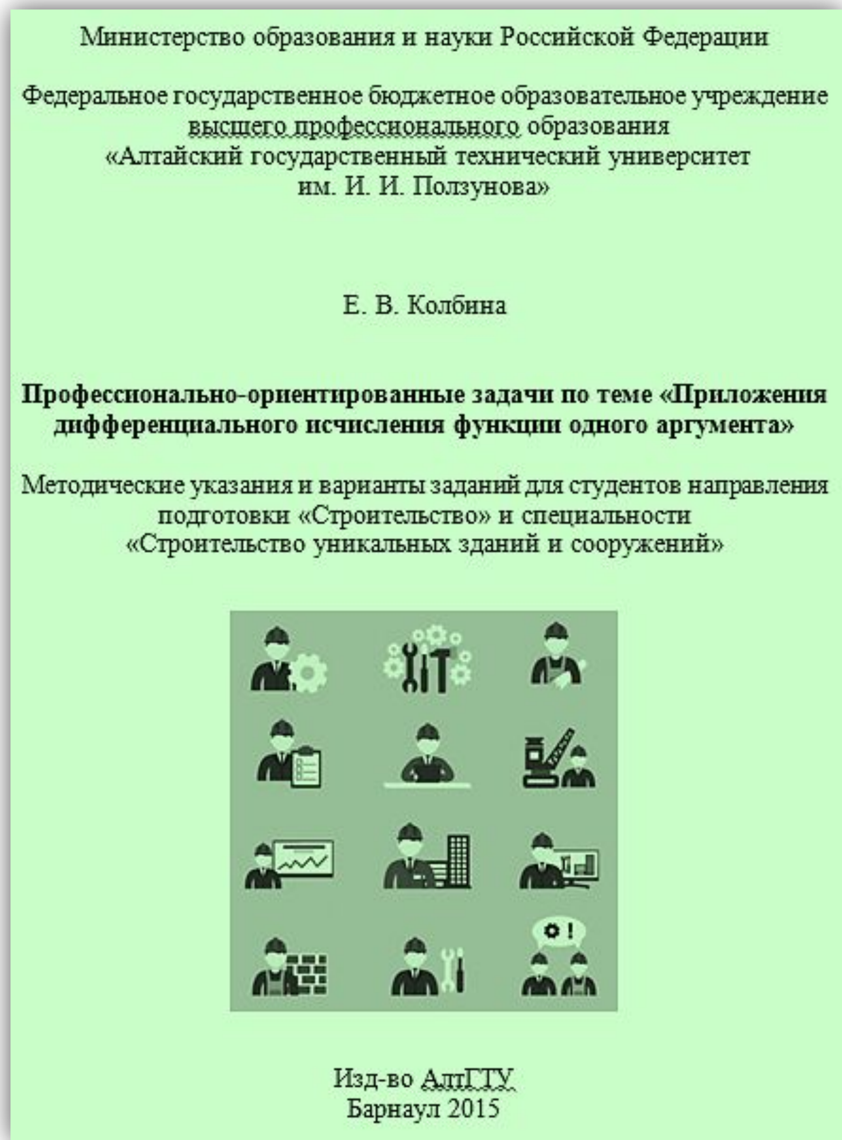
$$C_{ф} = 60000x = 60000 \cdot \frac{10\sqrt{10}}{3} = 200000\sqrt{10} \approx 632456(руб.),$$

$$C_{ст} = 30000(x+2y) = 30000\left(\frac{10\sqrt{10}}{3} + 2\cdot 5\sqrt{10}\right) =$$

$$= 100000\sqrt{10} + 300000\sqrt{10} = 400000\sqrt{10} \approx 1264911(руб.),$$

$$C_{кр} = 7000xy = 7000\cdot\frac{10\sqrt{10}}{3}\cdot 5\sqrt{10} = \frac{3500000}{3} \approx 1166667(руб.).$$

6.3.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ


Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Алтайский государственный технический университет
им. И. И. Ползунова»

Е. В. Колбина

Профессионально-ориентированные задачи по теме «Приложения дифференциального исчисления функции одного аргумента»

Методические указания и варианты заданий для студентов направления подготовки «Строительство» и специальности
«Строительство уникальных зданий и сооружений»

Изд-во АлтГТУ
Барнаул 2015

Задачи на оптимизацию и метод математического моделирования для их решения более подробно описан в методичке:

Колбина Е.В. Профессионально-ориентированные задачи по теме «Приложения дифференциального исчисления функции одного аргумента». [Электронный ресурс]: Методические указания и варианты заданий для студентов направления подготовки «Строительство» и специальности «Строительство уникальных зданий и сооружений» / Е. В. Колбина ; Алт. гос. техн. ун-т им. И. И. Ползунова. – Барнаул: АлтГТУ, 2015. – 56 с. : ил. – Режим доступа: http://elib.altstu.ru/eum/download/vm/Kolbina_zadachi.pdf

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ…