

Пределные теоремы теории вероятностей



Можно ли установить закономерность
совокупного поведения случайных величин?

При некоторых, достаточно широких условиях, суммарное поведение большого числа случайных величин утрачивает случайный характер и становится закономерным.



Центральные предельные теоремы (Ц.П.Т.)

- **Ц.П.Т.**— класс теорем в теории вероятностей, утверждающих, что
- **сумма достаточно большого количества слабо зависимых случайных величин**, имеющих примерно одинаковые масштабы (ни одно из слагаемых не доминирует, не вносит в сумму определяющего вклада), имеет распределение, **близкое к нормальному**



Закон больших чисел

- В теории вероятностей в теории вероятностей утверждает, что эмпирическое среднее (среднее арифметическое в теории вероятностей утверждает, что эмпирическое среднее (среднее арифметическое) достаточно большой конечной выборки из фиксированного распределения близко к теоретическому среднему (математическому ожиданию) этого распределения.

Чебышев Пафнутий Львович

1821-1894

Русский математик и механик.

Написал более 70 работ по теории чисел, теории вероятностей, теории приближения функций, интегральному исчислению, теории механизмов. Доказал достаточно общие формы закона больших чисел. Доказанная им центральная предельная теорема, а также исследования его учеников А.А.Маркова и А.М. Ляпунова стали основой русской школы теории вероятностей.



Марков Андрей Андреевич



1856-1922

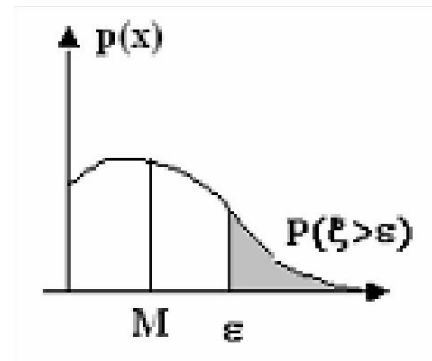
Русский математик.

Написал около 70 работ по теории чисел, теории приближения функций, теории вероятностей. Существенно расширил сферу применения закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Является основоположником теории случайных процессов.

Первое неравенство Чебышева (неравенство Маркова)

Для каждой неотрицательной случайной величины ξ , имеющей математическое ожидание $M[\xi]$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M[\xi]}{\varepsilon}$$



Первое неравенство Чебышева

ПРИМЕР

► Пусть ξ - время опоздания студентов на лекцию. Известно, что $M[\xi]=1$ мин. Оценить вероятность того, что студент опоздает не менее чем на 5 минут.

$$\text{☺} \quad P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M[\xi]}{\varepsilon},$$

$$P\{\xi > 5\} \leq \frac{1}{5} \quad \blacktriangleleft$$

Первое неравенство Чебышева

ПРИМЕР

► Среднее число вызовов, поступающих на коммутатор в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов будет не более 500.

$$\odot P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M[\xi]}{\varepsilon} \Leftrightarrow P\{\xi \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M[\xi]}{\varepsilon}$$

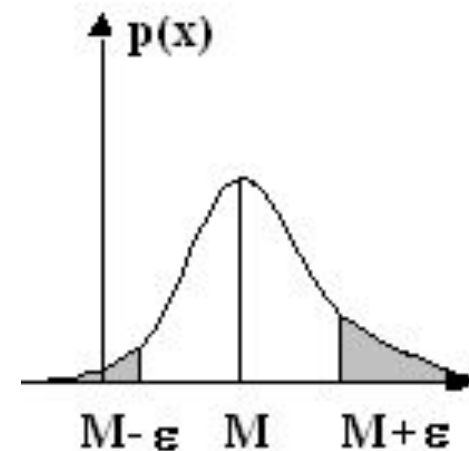
$$M[\xi] = 300, P\{\xi \leq 500\} \geq 1 - \frac{300}{500} = 0.4$$

Вероятность не менее 0.4 ◀

Второе неравенство Чебышева

Для каждой случайной величины ξ , имеющей дисперсию $D[\xi] = \sigma^2$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P\{|\xi - M[\xi]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$



Второе неравенство Чебышева

ПРИМЕР

▶ Средний расход воды на ферме составляет 1000 л в день, а среднее квадратичное $\sigma=200$ л. Оценить вероятность того, что расход воды в любой выбранный день не превысит 2000 л.

☺ Т.к. границы интервала $0 \leq \xi \leq 2000$ симметричны относительно $M[\xi] = 1000$ и

$$P\{\xi \leq 2000\} = P\{0 \leq \xi \leq 2000\} = P\{|\xi - 1000| < 1000\},$$

тогда, учитывая

$$P\{|\xi - M[\xi]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P\{|\xi - M[\xi]| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

получим

$$P\{|\xi - 1000| < 1000\} \geq 1 - \frac{200^2}{1000^2} = 0.96 \blacktriangleleft$$



Закон больших чисел

Закон больших чисел - это ряд теорем, которые доказывают устойчивость средних арифметических случайных величин $\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$ при большом количестве испытаний n они перестают быть случайными и стремятся к некоторым постоянным.

Пуассон Симеон Дени



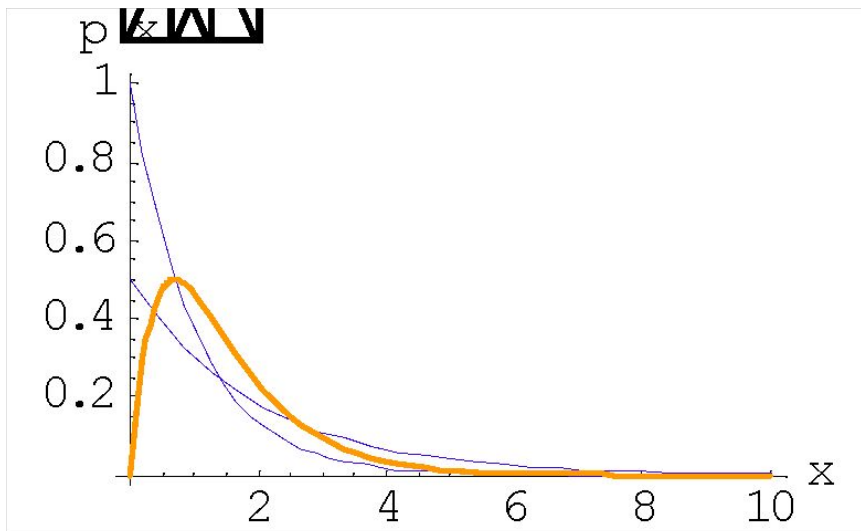
1781-1840

Французский механик, физик, математик.

Написал свыше 350 работ в области небесной механики, механики, определенных интегралов, дифференциальных уравнений, рядов, теории вероятностей, статистики.

Ввел термин «закон больших чисел» (1837 г.).

Среднее двух случайных величин

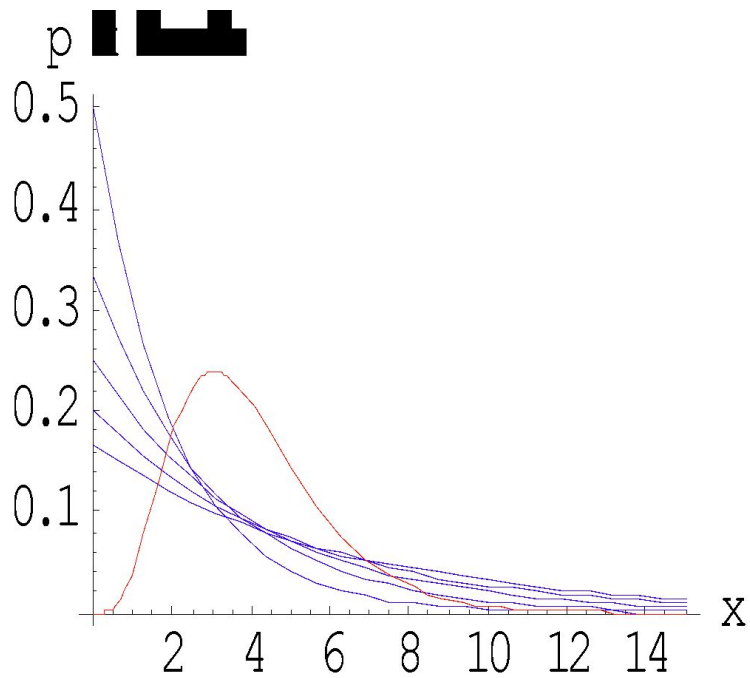


$$\xi_1 \boxtimes \text{Exp}[1]$$

$$\xi_2 \boxtimes \text{Exp}[1/2]$$

$$\varphi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$$

Среднее пяти случайных величин



$$\xi_1 \boxtimes Exp[1/2] \quad M[\xi_1] = 2 \quad D[\xi_1] = 4$$

$$\xi_2 \boxtimes Exp[1/3] \quad M[\xi_2] = 3 \quad D[\xi_2] = 9$$

$$\xi_3 \boxtimes Exp[1/4] \quad M[\xi_3] = 4 \quad D[\xi_3] = 16$$

$$\xi_4 \boxtimes Exp[1/5] \quad M[\xi_4] = 5 \quad D[\xi_4] = 25$$

$$\xi_5 \boxtimes Exp[1/6] \quad M[\xi_5] = 6 \quad D[\xi_5] = 36$$

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 M[\xi_i] = 4$$

$$\varphi = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \xi_i \quad M[\varphi] = 4 \quad D[\varphi] = 3.6$$



Сущность закона больших чисел

Есть независимые случайные величины, каждая из которых может принимать значения, далекие от своего математического ожидания. Но если мы их просуммируем, то среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения, близкие к определенному неслучайному постоянному числу т.е. значения отдельных случайных величин могут иметь большой разброс, а их среднее арифметическое - малый.

Теорема Чебышева

Если ξ_1, ξ_2, ξ_n – независимые случайные величины, для которых существуют $M[\xi_i] = m_i$ и $D[\xi_i] = \sigma_i^2$, причем дисперсии их не превышают некоторой константы C , то, как бы мало не было $\varepsilon > 0$,

$$P \left\{ \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} \right| < \varepsilon \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Доказательство теоремы Чебышева

$$M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i, \quad D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leq \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}$$

Применим второе неравенство Чебышева к

случайной величине $\varphi_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$:

$$P\left\{|\varphi_n - M[\varphi_n]| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D[\varphi_n]}{\varepsilon^2}.$$

Т.к. $M[\varphi_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$ и $D[\varphi_i] \leq \frac{C}{n}$:

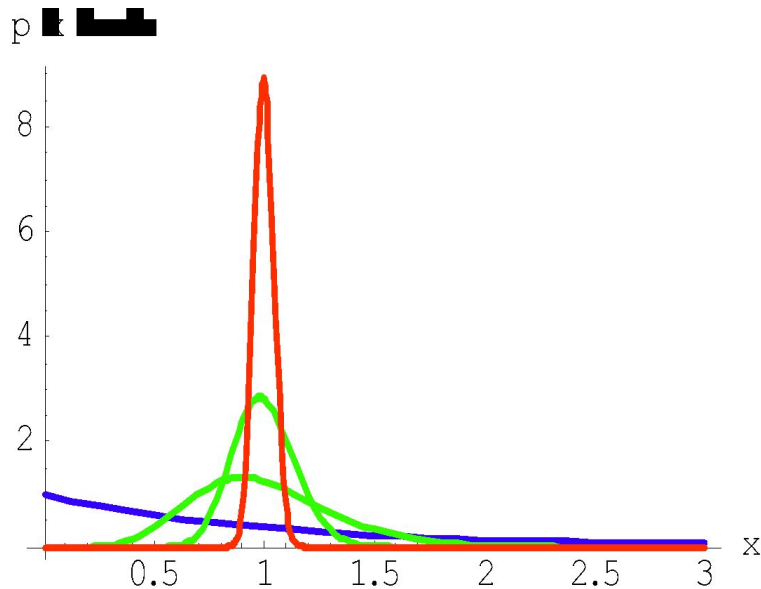
$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{m_1 + \dots + m_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty \blacksquare$$

Следствие теоремы Чебышева

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – независимые случайные величины, имеющие одинаковые $M[\xi_i] = m$ и ограниченные дисперсии, то, как бы мало не было $\varepsilon > 0$,

$$P \left\{ \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - m \right| < \varepsilon \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Следствие теоремы Чебышева. Пример.



$$\xi_i \boxtimes Exp[1]$$

$$\varphi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$n = 1, 10, 50, 500.$$



Практическое значение теоремы Чебышева. ПРИМЕР.

Страховой компании необходимо установить размер страхового взноса.

Рассматривая убытки, как случайные величины, и обладая статистикой, можно определить средние убытки, которые на основании теоремы Чебышева можно считать величиной почти не случайной.

Тогда на основании этих данных и предполагаемой страховой суммы определяется размер страхового взноса.

Практическое значение теоремы Чебышева. ПРИМЕР.

При измерении некоторой физической величины, истинное значение которой равно m , проводят n независимых измерений этой величины. Результат каждого измерения – случайная величина ξ_i . Если при измерениях отсутствуют систематические погрешности, то на основании следствия из теоремы Чебышева $\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow m$ при $n \rightarrow \infty$.

Практическое значение теоремы Чебышева. ПРИМЕР.

Если все измерения проводятся с одинаковой точностью σ^2 , то дисперсия их средней

$$D\left[\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} D[\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n] = \\ = \frac{1}{n^2} (D[\xi_1] + D[\xi_2] + \dots + D[\xi_n]) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Т.о., увеличивая число измерений, можно увеличивать точность измерений.

Якоб Бернулли 1654 - 1705



Швейцарский математик.

Наиболее значительны достижения в развитии анализа бесконечно малых, теории рядов, вариационного исчисления и теории вероятностей. Благодаря его работам теория вероятностей приобрела важнейшее значение в практической деятельности.



Теорема Бернулли

Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли и m – общее число успехов. Тогда справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

где p – вероятность успеха в одном испытании.



Теорема Бернулли

Теорема Бернулли – следствие теоремы Чебышева, т.к. статистическую вероятность события $\frac{m}{n}$ можно представить как среднее арифметическое n независимых случайных величин ξ , имеющих одинаковый закон распределения: $\frac{1}{n} \sum \xi$.

Теорема Бернулли

Теорема Бернулли дает теоретическое обоснование замены неизвестной вероятности события его статистической вероятностью, утверждая, что при $n \rightarrow \infty$ статистическая вероятность стремится *по вероятности* к постоянной вероятности события:

$$\begin{array}{c} P \\ \frac{m}{n} \xrightarrow{\quad} p \\ n \rightarrow \infty \end{array}$$

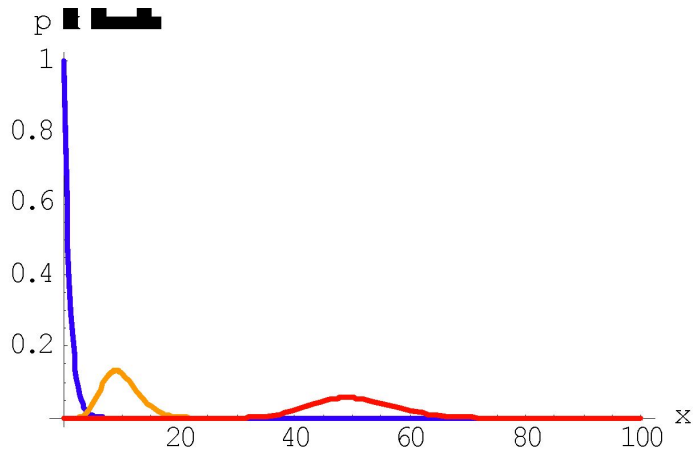


Центральная предельная теорема

Ц.П.Т. – это ряд теорем, в которых рассматривается вопрос о законе распределения суммы взаимно независимых случайных величин при неограниченном увеличении числа слагаемых. При некоторых весьма общих условиях закон распределения суммы случайных величин приближается к нормальному. Установление таких условий и составляет содержание теоремы.

Сущность Ц.П.Т.

Если случайная величина ξ представляет собой сумму большого числа взаимно независимых величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то ξ имеет распределение, близкое к нормальному.

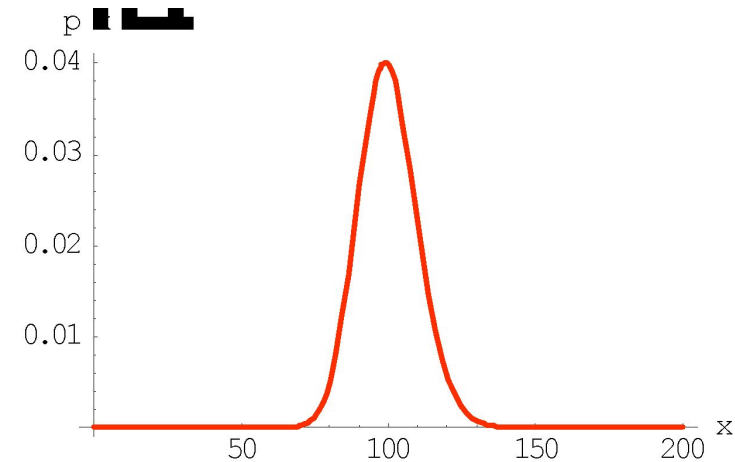


$$\xi_i \boxtimes Exp[\lambda]$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$n = 1, 5, 50.$$

$$n = 100.$$



Ляпунов Александр Михайлович



1857-1918

Русский математик и механик.

Исследовал проблемы устойчивости движения материальных систем. Методы, предложенные Ляпуновым применяются во многих разделах теории дифференциальных уравнений.. Дал простое и строгое доказательство центральной предельной теоремы в общем виде. Для доказательства разработал метод характеристических функций, который широко применяется в современной теории вероятностей.



Практическое значение Ц.П.Т. ПРИМЕР.

Пусть производится измерение некоторой физической величины. Каждое из измерений является приблизительным, на него влияют многие факторы – температура, колебания прибора, влажность и т.д. Каждый из факторов порождает ничтожно малую ошибку, но совокупность факторов – заметную суммарную ошибку. Рассматривая суммарную ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, можно заключить, что ошибка имеет нормальное распределение. На этом строится статистическое оценивание погрешности.

Теорема Ляпунова.


Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – независимые случайные величины, для которых существуют $M[\xi_i] = m_i$ и $D[\xi_i] = \sigma_i^2$, абсолютный центральный момент третьего порядка $M[|\xi_i - m_i|^3] = \mu_i$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (\clubsuit)$$

то закон распределения $\sum_{i=1}^n \xi_i$ при $n \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к нормальному с математическим ожиданием $\sum_{i=1}^n m_i$ и дисперсией $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.



Теорема Ляпунова.

Смысл условия () состоит в том, чтобы в сумме $\sum_{i=1}^n \xi_i$ не было слагаемых, влияние которых на разброс подавляюще велико по сравнению с остальными и не должно быть большого числа слагаемых, влияние которых очень мало. Т.о. удельный вес каждого отдельного слагаемого должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых.



Теорема Ляпунова. Пример.

Потребление электроэнергии за месяц в каждой квартире можно представить как n случайных величин. Если потребление электроэнергии в каждой квартире резко не выделяется среди остальных, то на основании теоремы Ляпунова можно считать, что потребление энергии всего дома будет случайной величиной, имеющей приближенно нормальный закон распределения.

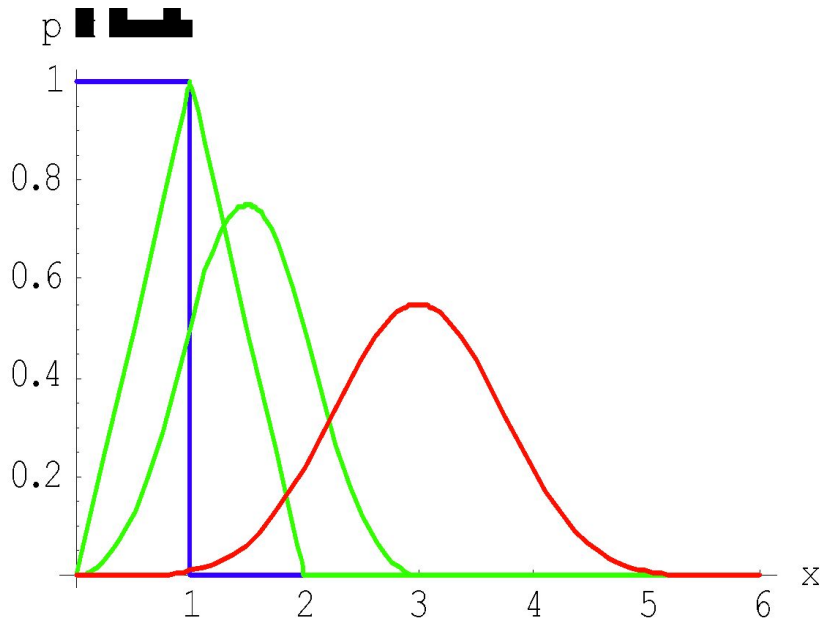
Но если в одной из квартир находится прачечная, то вывод о приближенно нормальной энергии всего дома будет неправомерен.

Следствие теоремы Ляпунова.

Если все случайные величины ξ_i одинаково распределены с $D[\xi_i] = \sigma^2$, то закон распределения $\sum_{i=1}^n \xi_i$ при $n \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к нормальному.

Теорема Ляпунова. Пример.

Моделирование нормального распределения



$$\xi_i \boxtimes R[0,1]$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad n = 1, 2, 3, 6.$$

$$i \geq 6 \quad \varphi \boxtimes N\left[\frac{n}{2}, \frac{n}{\sqrt{12}}\right]$$

Муавр Абрахам



1667-1754

Английский математик.

Труды по теории рядов, теории вероятностей, теории комплексных чисел. В теории вероятностей доказал важную предельную теорему (1730). В теории комплексных чисел вывел правила возведения в степень и извлечения корней.

Лаплас Пьер Симон



1749-1827

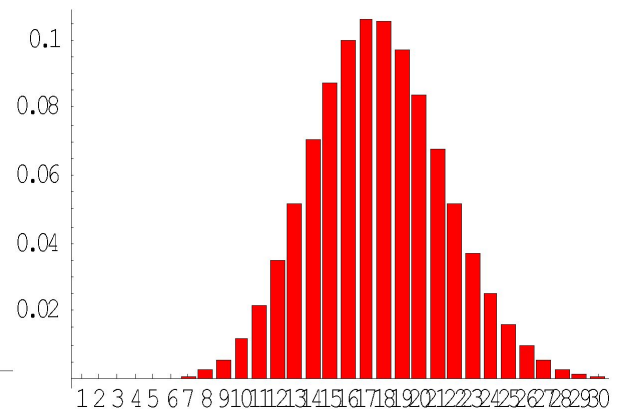
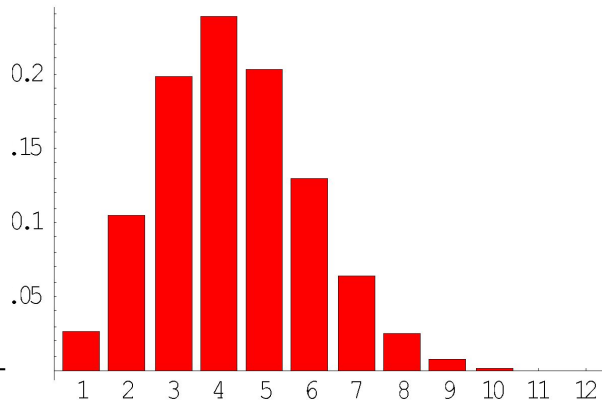
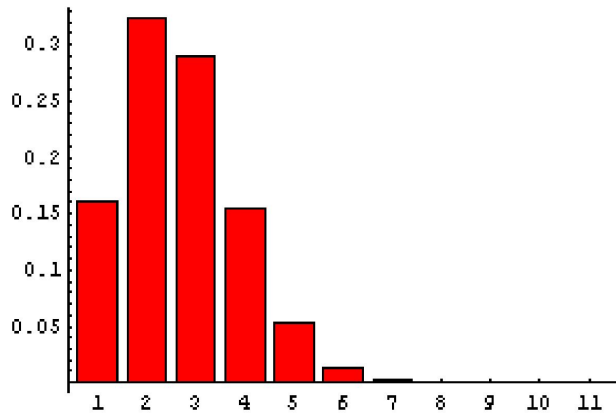
Французский математик, физик и астроном.

Фундаментальные работы по математике, экспериментальной и математической физике и небесной механике. Является одним из создателей теории вероятностей. Доказал важную предельную теорему, разработал теорию ошибок. Ввел теоремы сложения и умножения вероятностей, понятия производящих функций и математического ожидания.

Ц.П.Т. Биномиальное распределение.

Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение

$$p = \frac{1}{6} \quad M[\xi] = np, \quad D[\xi] = npq \quad n = 10, 20, 100.$$



Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико, то вероятность того, что событие A появится ровно k раз

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} * \varphi(x),$$

где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}} -$

плотность стандартного нормального распределения.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Пример.

► Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.8. Определить вероятность того, что из 400 выстрелов будет ровно 300 попаданий в цель.

☺ n вполне велико: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} * \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 * 0.2 * 0.8} = 8,$$

$$x = \frac{300 - 320}{8} = -2.5,$$

$$P_{400}(k = 300) = \frac{1}{8} * \varphi(-2.5) = \frac{1}{8} * \varphi(2.5) = \frac{0.175}{8} = 0.022 \blacktriangleleft$$



Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико, то вероятность того, что событие A появится в испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближённо равна

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \text{интеграл Лапласа.}$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Пример.

► Определить вероятность того, что при 600 бросаниях игральной кости выпадает от 90 до 120 раз шестерка.

$$\odot n=600, k_1=90, k_2=120, p = \frac{1}{6}.$$

$$x_1 = \frac{90 - 600 * 1/6}{\sqrt{600 * 1/6 * 5/6}} \approx -1.1$$

$$x_2 = \frac{120 - 600 * 1/6}{\sqrt{600 * 1/6 * 5/6}} \approx 2.19$$

$$\begin{aligned} P_{600}(90 \leq k \leq 120) &= \Phi_0(2,19) - \Phi_0(-1,1) = \\ &= \Phi_0(2,19) + \Phi_0(1,1) = 0,486 + 0,364 = 0,85. \end{aligned}$$