Неопределенный интеграл

§ 1. Неопределенный интеграл и его свойства

1.1. Определение неопределенного интеграла

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* (для) функции $f(x)$ на некотором множестве значений X, если $F'(x) = f(x)$ на этом множестве.

Теорема 1. Любая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную.

Теорема 2. Если функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными одной и той же функции $f(x)$ на некотором множестве, то необходимым и достаточным условием этого является то, что $G(x) = F(x) + C$, где C – любая постоянная.

Доказательство.

Достаточность.

Пусть $F(x)$ - первообразная $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Тогда для любого числа C $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$, то есть $F(x) + C$ - первообразная $f(x)$.

Необходимость.

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, следовательно, $F(x) - G(x) = C$ (по следствию из теоремы Лагранжа).

§ 1. Неопределенный интеграл и его свойства

1.1. Определение неопределенного интеграла

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на некотором множестве называется ее *неопределенным интегралом*.

Обозначение:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

При этом $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*.

Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная — подынтегральной функции.

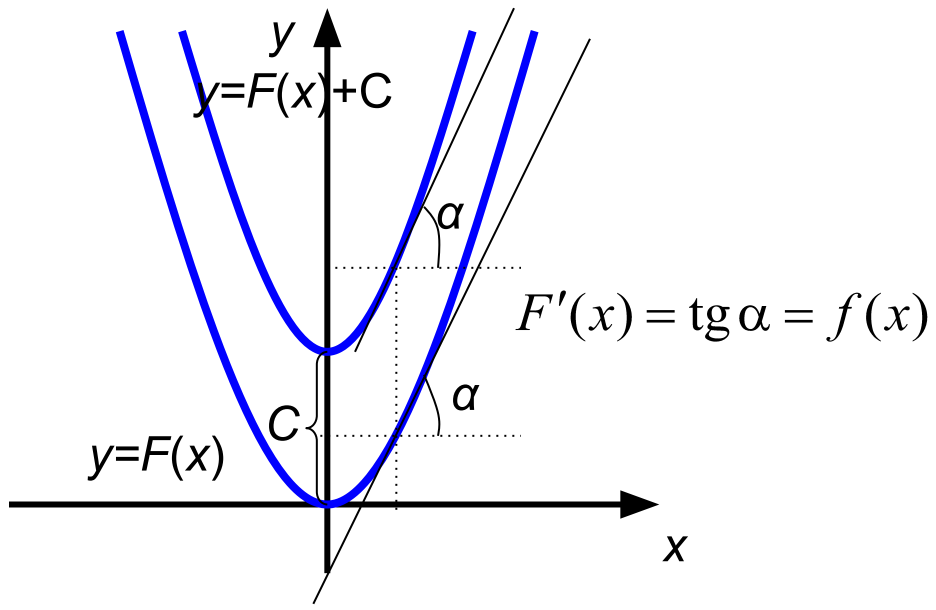
Например:

$\int 2x\,dx = x^2 + C,$ так как $(x^2 + C)' = 2x,$ или $d(x^2 + C) = 2xdx.$

§ 1. Неопределенный интеграл и его свойства

1.1. Определение неопределенного интеграла

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой однопараметрическое семейство кривых $y = F(x) + C$.



Кривые семейства [$F(x) + C$] называют *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси *Oy*.

§ 1. Неопределенный интеграл и его свойства

1.2. Свойства неопределенного интеграла

1. $$\boxed{d\int f(x)dx =} d(F(x)+C) = F'(x)dx = \boxed{f(x)dx.}$$

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Например, $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C,$ т.к. $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2.$

2. $$\boxed{\int dF(x) =} \int F'(x)dx = \int f(x)dx = \boxed{F(x)+C.}$$

3. $$\boxed{\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.}$$

Действительно, $\int (f(x)+g(x))dx = F(x)+G(x)+C,$ а

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+C_1+G(x)+C_2.$$

Но, поскольку C_1+C_2 – произвольная постоянная, выражения в левой и правой частях равны.

§ 1. Неопределенный интеграл и его свойства

1.2. Свойства неопределенного интеграла

4. $$\boxed{\int kf(x)dx} = kF(x) + C_1 = k(F(x) + \frac{C_1}{k}) = k(F(x) + C) = \boxed{k\int f(x)dx.}$$

5. Инвариантность формулы интегрирования.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то и $\int f(u)du = F(u) + C,$

где u=ϕ(x) - произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Рассматривая сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x)),$ в силу инвариантности формы первого дифференциала функции имеем:

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du.$$

Отсюда $\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C.$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int (\sin x)^2 d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

$$\int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

§ 1. Неопределенный интеграл и его свойства

1.2. Свойства неопределенного интеграла

6. Если подынтегральная функция $f(x)$ четная (нечетная), то первообразная функция будет соответственно нечетной (четной).

Доказательство.

Пусть $f(x)$ - чётная функция, т.е. $f(-x)=f(x)$.

Рассмотрим интеграл $\int f(x)dx = F(x).$

$$F(-x) = \int f(-x)d(-x) = \int f(x)d(-x) = -F(x).$$

Например,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \qquad \int 2x\,dx = x^2 + C.$$

§ 1. Неопределенный интеграл и его свойства

1.3. Таблица интегралов

1	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$	2	$\int \frac{du}{u} = \ln \lvert u \rvert + C.$
3	$\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$	4	$\int e^{u} du = e^{u} + C.$
5	$\int \sin u du = -\cos u + C.$	6	$\int \cos u du = \sin u + C.$
8	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C.$	8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C.$
9	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \mathrm{arcctg} \frac{u}{a} + C.$		
10	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C.$		

§ 1. Неопределенный интеграл и его свойства

1.3. Таблица интегралов

Добавить к этой таблице еще несколько формул, не следующих прямо из таблицы производных, но удобных для вычисления многих интегралов.

11	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C.$
12	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\| + C.$
13	$\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left\|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right\| + C$
14	$\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{u}{a} + C$

§2. Простейшие методы интегрирования

В отличие от дифференциального исчисления, где, пользуясь таблицей производных, можно найти производную или дифференциал любой заданной функции, в интегральном исчислении нет общих приемов вычисления неопределенных интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие свести данный интеграл к табличному.

- Простейшие методы интегрирования
  - Непосредственное интегрирование
  - Внесение под Знак дифференциала
  - Замена переменных
  - Интегрирование по частям

§2. Простейшие методы интегрирования

2.1. Непосредственное интегрирование

1. $$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx=$$

$$\boxed{\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\alpha\neq-1 \qquad (1)}$$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{3}}dx+\int x^{-\frac{1}{4}}dx=$$

$$=2x^{\frac{1}{2}}+C_1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C_2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C_3=2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$$

2. $$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\mathrm{tg}\,x-x+C.$$

3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}=$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C=-\arccos\frac{u}{a}+C \quad (10)$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{2}{3}-x^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}+C.$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.1. Непосредственное интегрирование

4. $$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\int dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=x-\operatorname{arctg}x+C.$$

$$\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C \quad (10)$$

$$\boxed{\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=x-\operatorname{arctg}x+C}$$

5. $$\int\frac{x^4dx}{x^2+3}=\int\frac{(x^4-9)+9}{x^2+3}dx=\int\frac{(x^2-3)(x^2+3)+9}{x^2+3}dx=$$

$$=\int(x^2-3)dx+9\int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{x^3}{3}-3x+\frac{9}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.2. Подведение под знак дифференциала

Данный метод опирается на свойство 5 неопределенного интеграла об его инвариантности.

1. $dx = d(x+a)$	2. $xdx = \frac{1}{2}dx^2$	3. $x^2dx = \frac{1}{3}dx^3$	4. $x^3dx = \frac{1}{4}dx^4$
5. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$	6. $\sin x dx = -d\cos x$	7. $\cos x dx = d\sin x$	8. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\mathrm{tg}\,x$
9. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\mathrm{ctg}\,x$	10. $\frac{dx}{x} = d\ln x$	11. $\frac{dx}{x^2} = -d(\frac{1}{x})$	
12. $e^x dx = de^x$	13. $a^x dx = \frac{1}{\ln a}da^x$	14. $\frac{dx}{1+x^2} = d\,\mathrm{arctg}\,x$	
15. $\frac{dx}{1+x^2} = d\,\mathrm{arctg}\,x = -d\,\mathrm{arcctg}\,x$		16. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x = -d\arccos x$	

§2. Простейшие методы интегрирования

2.2. Подведение под знак дифференциала

1. $\int\sqrt{x+4}\,dx=\int(x+4)^{\frac{1}{2}}d(\boldsymbol{x+4})=\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}+C.$

$$\boxed{\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C}$$

2. $\int(2x+3)^2dx=\int(2x+3)^2\,\frac{\boldsymbol{d(2x)}}{\boldsymbol{2}}=\frac{1}{\boldsymbol{2}}\int(2x+3)^2\,\boldsymbol{d(2x+3)}=\frac{(2x+3)^3}{6}+C.$

$$\boxed{\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C}$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.2. Подведение под знак дифференциала

3. $$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$$

$$\boxed{xdx = \frac{1}{2}dx^2}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\boxed{\int \frac{x}{x^2 \pm 1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 \pm 1\right| + C.}$$

4. $$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + C.$$

$$\boxed{\sin x dx = -d\cos x}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.2. Подведение под знак дифференциала

5. $$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx = \int \sqrt{\operatorname{arctg} x}\, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{2}{3}(\operatorname{arctg} x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3} + C.$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d\operatorname{arctg} x$$

$$\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

6. $$\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4}\int e^{x^4} d(x^4) = \frac{1}{4}e^{x^4} + C.$$

$$x^3 dx = \frac{1}{4}dx^4$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

7. $$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

$$\frac{dx}{x} = d\ln x$$

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, а функция $x=\varphi(t)$ – на множестве Φ, причем $\varphi(t)\in X \ \ \forall t \in \Phi$. Тогда, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на X, а $\varphi(t)$ дифференцируема на Φ, то

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt=\int f(x)dx.$$

Доказательство.

Для того, чтобы доказать теорему, необходимо доказать, что производные по x от левой и правой части совпадают.

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x).$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t\frac{dt}{dx}=\left[\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}\right]=$$

$$=f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x).$$

Полученная формула часто используется «в обратную сторону»:

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt}$$

то есть переменную x заменяется функцией новой переменной t.

Эта формула называется *формулой интегрирования заменой переменной*.

§2. Простейшие методы интегрирования

2.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

1. $$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt{x-3}=t, \quad x=t^2+3 \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = \int t(t^2+3)2tdt =$$

$$= 2\int t^4 dt + 6\int t^2 dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{1+e^x} = \left[\begin{array}{c} e^x = t, \quad x = \ln t \\ dx = dt/t \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{\left(t^2 + 2\cdot\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C \qquad (11)$$

$$= \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.3. Интегрирования по частям

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке, и на нем существует интеграл $\int v\,du$, то на нем существует и интеграл $\int u\,dv$, причем

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Доказательство.

$$d(uv) = v\,du + u\,dv \Rightarrow \int d(uv) = \int (v\,du + u\,dv) \Rightarrow$$

$$\int (v\,du + u\,dv) = uv \Rightarrow \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

$$\int u\,dv = \begin{bmatrix} u & du \\ dv & v \end{bmatrix} = uv - \int v\,du.$$

Этот метод применяется чаще всего к интегралам вида $\int P_n(x) f(x)dx.$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.3. Интегрирования по частям

Вид интеграла	u	dv
$\int P_n(x)e^{kx}dx$	$P_n(x)$, каждое применение интегрирования по частям понижает степень $P_n(x)$ на единицу	
$\int P_n(x)\sin kx\ dx$		
$\int P(x)_n \cos kx\ dx$		
$\int P_n(x)\arcsin\ kx\,dx$		$P_n(x)dx$
$\int P_n(x)\arccos\ kx\,dx$		
$\int P_n(x)\ln kx dx$		
$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\ x\,dx$		
$\int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\ x\,dx$		
$\int e^{ax}\sin bx\ dx$	e^{ax}, и после двукратного применения интегрирования по частям приходим к исходному интегралу с каким-то коэффициентом	
$\int e^{ax}\cos bx\ dx$		
$\int \sin(\ln x)dx$		
$\int \cos(\ln x)dx$		

§2. Простейшие методы интегрирования

2.3. Интегрирования по частям

1. $$\int x\cos x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx =$$
$$= x\sin x + \cos x + C.$$

2. $$\int x\ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

3. $$\int x \operatorname{arctg} x dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv = x dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\right] = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.3. Интегрирования по частям

4. $$\int x^2 e^{3x}dx = \left[\begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{3x}dx & v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{matrix}\right] = x^2\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{matrix}\right] = x^2\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left[x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right] =$$

$$= x^2\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + C.$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.3. Интегрирования по частям

5. Рассмотрим так называемый *возвратный интеграл*:

$$J=\int e^x \sin x dx = \begin{bmatrix} u=e^x & du=e^x dx \\ dv=\sin x dx & v=-\cos x \end{bmatrix} = -e^x \cos x + \int \cos x e^x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=e^x & du=e^x dx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x \end{bmatrix} = \quad -e^x \cos x + e^x \sin x - \boxed{\int \sin x e^x dx} =$$

$$=-e^x \cos x + e^x \sin x - J.$$

Таким образом,

$$J=e^x(\sin x-\cos x)-J \quad \Rightarrow 2J=e^x(\sin x-\cos x),$$

$$J=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.3. Интегрирования по частям

6. Получим так называемую *рекуррентную формулу* для интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}.$$

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx = \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^n} & v = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}J_{n-1}\right).$$

§2. Простейшие методы интегрирования

2.3. Интегрирования по частям

Таким образом,

$$J_n = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}\right) + J_{n-1}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{2a^2(n-1)}\right)$$

или окончательно

$$\boxed{J_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + J_{n-1}\cdot\frac{2n-3}{a^2(2n-2)}.}$$

$$J_1 = \int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

$$J_2 = \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot(2-1)a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2\cdot(2-1)a^2}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{2-1}} =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} + C;$$

$$J_3 = \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3} =$$

$$= \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot(3-1)a^2}\left(\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}\right) + \frac{x}{2\cdot(3-1)a^2}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{3-1}} =$$

$$= \frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}\right) + \frac{x}{4a^2}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^2} + C$$

и т.д.