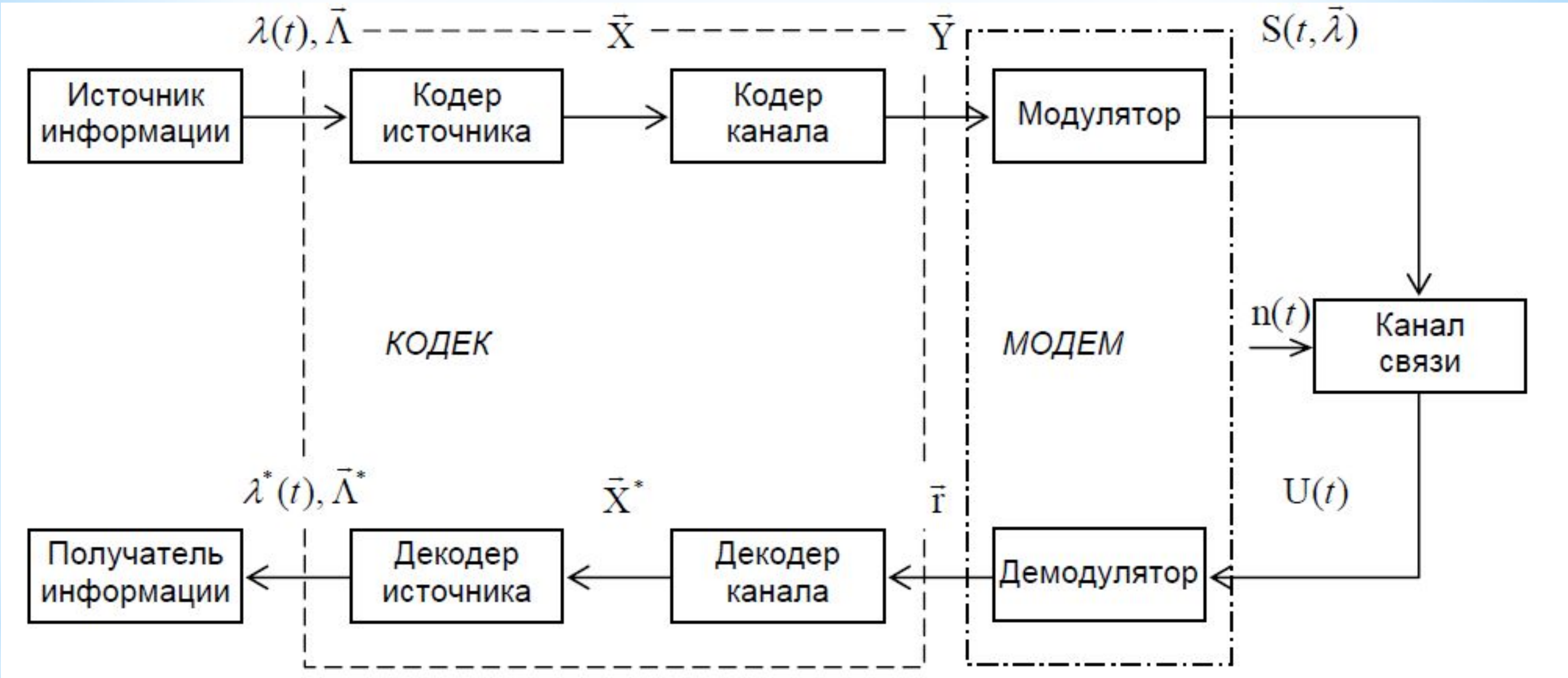
Лекция №1
по курсу
«Методы и средства передачи информации, ч.1.»

Лектор: д.т.н., Оцоков Шамиль Алиевич,

email: otsokovShA@mpei.ru

Москва, 2022

Модель передачи информации



Терминология

Источник информации

Цель кодирования
Преобразование различных сообщений в однообразную форму, упрощающих передачу информации, а также сокращение объема информации с целью повышения скорости ее передачи

Кодирование в канале или помехоустойчивое кодирование

Демодулятор

Декодер канала

Декодер источника

Помехи

Случайные, радиопомехи, атмосферные помехи, например, электрические процессы в атмосфере.

Индустриальные помехи, из-за резких изменений величины тока в электрических цепях, например, помехи от электротранспорта, двигателей и др.

Статистическая трактовка процесса передачи информации

Пусть известен алфавит $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m\}$

Пусть создано сообщение, которое принимает одно из значений алфавита.

Какое именно получатель не знает.

Создание сообщения источником является случайным экспериментом.

$P(\lambda_i)$ – вероятности различных букв в тексте

P(‘а’) > P(‘ю’)

Вопросы теории кодирования

Выбор критерия качества передаваемой информации

Выбор оптимального способа кодирования

Обеспечение высокой скорости передачи информации
При минимальном количестве ошибок

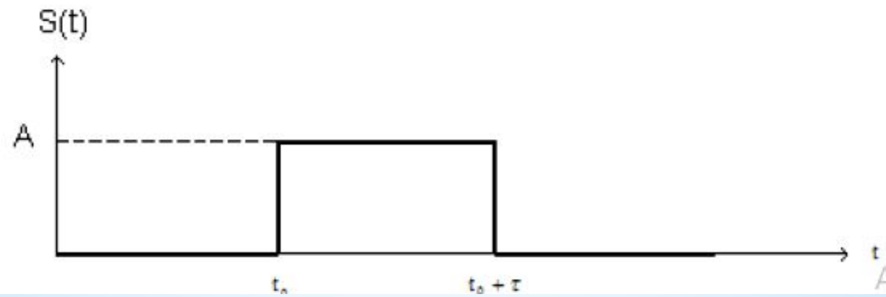
Некоторые понятия из теории связи

Типы сигналов

Во-первых различают сигналы *детерминированные и случайные*. Детерминированным называется сигнал, который может быть задан в виде некоторой полностью определенной функции времени $S(t)$, то есть *сигнал, значения которого однозначно определены для любого заданного момента времени.*

Примером детерминированного сигнала может служить импульс прямоугольной (или иной) формы временное положение, амплитуда и длительность которого известны Аналитически такой сигнал можно задать набором своих параметров:

$$S(t) = \begin{cases} A, & \text{при } t_0 < t < t_0 + \tau_0 \\ 0, & \text{при } t < t_0 \text{ и } t > t_0 + \tau_0 \end{cases}$$

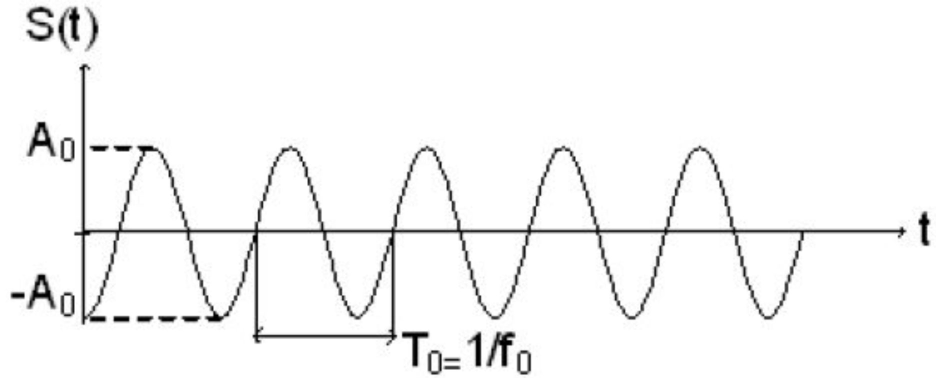


Гармонический сигнал

Другой пример – непрерывный гармонический сигнал

$$S(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0),$$

где A_0, f_0 и φ_0 заданная амплитуда, частота и начальная фаза сигнала.



Периодический сигнал

Детерминированные сигналы в свою очередь можно подразделить на *периодические и непериодические.* Периодический сигнал, это сигнал, значения которого периодически повторяются, то есть для которого выполняется условие

$$S(t + T_0) = S(t),$$

где T_0 – период повторения.

Преобразование Фурье

Прямое аналоговое преобразование Фурье

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j2\pi\nu t)\,dt$$

Обратное аналоговое преобразование Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)\exp(j2\pi\nu t)\,d\nu$$

Дискретное преобразование Фурье

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\exp(-j2\pi kn/N),$$

$$g(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G(k)\exp(j2\pi kn/N).$$

Обобщенный ряд Фурье

В математике доказывается, что произвольная непрерывная функция *s(t)* для которой выполняется условие

$$\int_{t1}^{t2} || s(t)||^2 \, dt < \infty ,$$

может быть *абсолютно точно* представлена в виде бесконечной суммы ряда

$$s(t) = c_0 \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \ldots . c_n \varphi_n(t) \ldots ,$$

где $\varphi_n(t)$ – система ортогональных непрерывных функций,

Обобщенный ряд Фурье

Что такое система ортогональных функций? Система действительных функций $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots \varphi_n(t), \ldots$, называется ортогональной на отрезке $[t_1, t_2]$, если

$$\int_{t1}^{t2} \varphi_n(t)\, \varphi_m(t)\, dt = 0 \quad при \quad n \neq m$$

При этом предполагается, что ни одна из них тождественно не равна нулю на этом интервале:

$$\lambda n = \int_{t1}^{t2} \varphi_n^2(t) \neq 0 \quad при\ любом \quad n.$$

Обеспечивает наилучшую аппроксимацию функции s(t)

Ортогональные функции

Одной из наиболее удобных систем ортогональных функций, которые могут использоваться для разложения произвольных сигналов, является система тригонометрических функций - синусов и косинусов:

$$\varphi_{cn}(t) = cos\ (2\pi f_n t),\ \varphi_{sn}(t) = sin\ (2\pi f_n t), \tag{1.11}$$

или в комплексной форме

$$\varphi_{en}(t) = exp(j\ 2\pi f_n t). \tag{1.12}$$

Обобщенный ряд Фурье

При соблюдении условий $\lambda_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ система называется *нормальной*. Если же эти условия не выполнены, то при желании можно перейти к системе $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$, которая уже заведомо будет нормальной. Обратимся к примерам.

1) Важнейшим примером ортогональной системы функций как раз и является тригонометрическая система

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \ldots, \ \cos nx, \ \sin nx, \ \ldots \tag{17}$$

в промежутке $[-\pi, \pi]$, которую мы рассматривали выше; ее ортогональность следует из соотношений (6), (8), (9) и (13). Однако нормальной она не будет ввиду (10) и (14). Умножая тригонометрические функции (17) на надлежащие множители, легко получить нормальную систему:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{17*}$$

Система тригонометрических функций

Если в качестве базиса разложения выбрана система тригогнометрических функций, то говорят не об обобщенном ряде Фурье, а просто - о разложении функции в ряд Фурье

$$s(t) = c_0 + \Sigma\ a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t), \qquad (1.13)$$

где коэффициенты ряда a_n и b_n рассчитываются по формулам

$$a_n = (1/ t_2 - t_1) \int_{t1}^{t2} s(t) \cos(2\pi f_n t)dt, \qquad (1.14)$$

$$b_n = (1/ t_2 - t_1) \int_{t1}^{t2} s(t) \sin(2\pi f_n t)dt. \qquad (1.15)$$

Ряд Фурье

для которой коэффициенты c_n определяются по формуле

$$c_n = 1/T \int_{t1}^{t2 = t1+T} s(t)\, exp(\, -j2\pi f_n t\,)\, dt\,. \qquad (1.17)$$

Набор коэффициентов ряда Фурье сигнала называется *спектром Фурье этого сигнала* или просто *спектром.*

Разложение фунции в ряд Фурье называют ее гармоническим или *спектральным анализом*, а слагаемые ряда, аппроксимирующего функцию – ее *спектральными составляющими*. Таким образом, спектральный анализ сигнала *s(t)* показывает: сколько и каких по величине спектральных составляющих (гармоник) содержится в данном сигнале.

Ряд Фурье

Его короче можно записать так:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}, \tag{10}$$

полагая

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_m = \frac{1}{2}(a_m - b_m i), \quad c_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + b_m i), \tag{11}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

так что *

$$c_{-m} = \bar{c}_m. \tag{12}$$

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье функции* $f(x)$.

Ряд Фурье

Коэффициенты c_m разложения (10), определяемые формулами (11), если учесть формулы Эйлера — Фурье (9), могут быть записаны единообразно:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{-nui}\, du. \qquad (13)$$

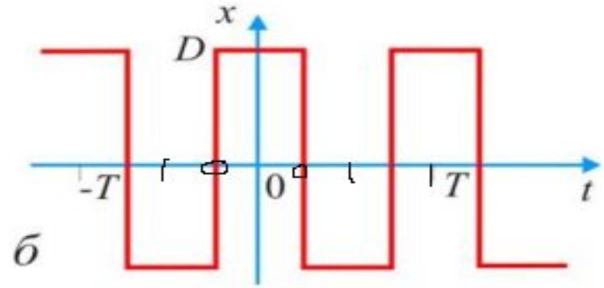
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$c_n = 1/T \int_{t1}^{t2 = t1 + T} s(t)\, exp(-j2\pi f_n t)\, dt .$$

Или в комплексной форме

$$s(t) = \Sigma c_n\, exp(j2\pi f_n t),$$

Ряд Фурье



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt\,;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot\cos n\,\omega_1 t\,dt\,;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot\sin n\,\omega_1 t\,dt\,.$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = 0\,;$$

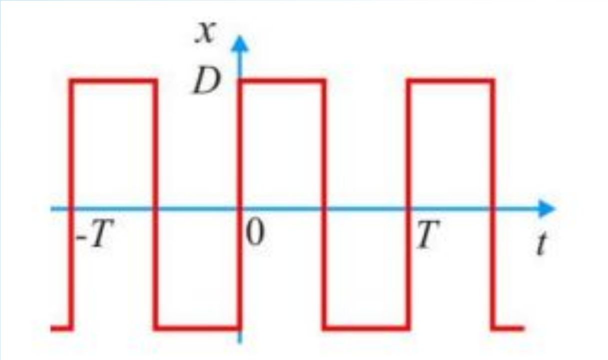
$$a_n = \frac{4D}{T}\left[\int_{0}^{T/4} \cos n\,\omega_1 t\,dt + \int_{T/4}^{T/2} (-1)\cos n\,\omega_1 t\,dt\right] = \frac{4D}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\,.$$

$$b_n = 0\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$x(t) = \frac{4D}{\pi}\left(\cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t + \ldots\right)$$

$$x(t) = \frac{4D}{\pi}\left[\cos\omega_1 t + \frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t - \pi) + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t + \ldots\right]$$

Ряд Фурье



$$a_n = \frac{2D}{T}\int_{-T/2}^{0}(-1)\cos n\omega_1 t\,dt + \int_{0}^{T/2}\cos n\omega_1 t\,dt = 0,$$

$$b_n = \frac{2D}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}(-1)\sin n\omega_1 t\,dt + \int_{0}^{T/2}\sin n\omega_1 t\,dt\right] = \frac{2D}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

$$x(t) = \frac{4D}{\pi}\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \ldots\right).$$

$$x(t) = \frac{4D}{\pi}\left[\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots\right]$$

Ряд Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t]. \quad (2.5)$$

Этот ряд называется тригонометрическим рядом Фурье. Коэффициенты ряда определяются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, dt\ ; \quad (2.6)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos n\, \omega_1 t\, dt; \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin n\, \omega_1 t\, dt\ . \quad (2.8)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt\ ;$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos n\, \omega_1 t\, dt\ ;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin n\, \omega_1 t\, dt\ .$$

Ряд Фурье

Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, является нечетной, то есть $x(t) = -x(-t)$, то коэффициенты $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и в разложении (2.5) остаются только синусоидальные составляющие:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t .$$

Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, является четной, то есть $x(t) = x(-t)$, то коэффициенты $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и в разложении (2.5) остаются только постоянная и косинусоидальные составляющие:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) .$$

Получила распространение и другая форма записи тригонометрического ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n) , \qquad (2.12)$$

где амплитуда A_n и фаза ϕ_n n-ой гармонической составляющей связаны с коэффициентами a_n и b_n соотношениями:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} ; \quad \phi_n = \arg(a_n - jb_n) = -\mathrm{arctg}\frac{b_n}{a_n} \qquad (2.13)$$

или

$$a_n = A_n \cos\phi_n ; \quad b_n = A_n \sin\phi_n . \qquad (2.14)$$

Ряд Фурье

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift}\,dt$$

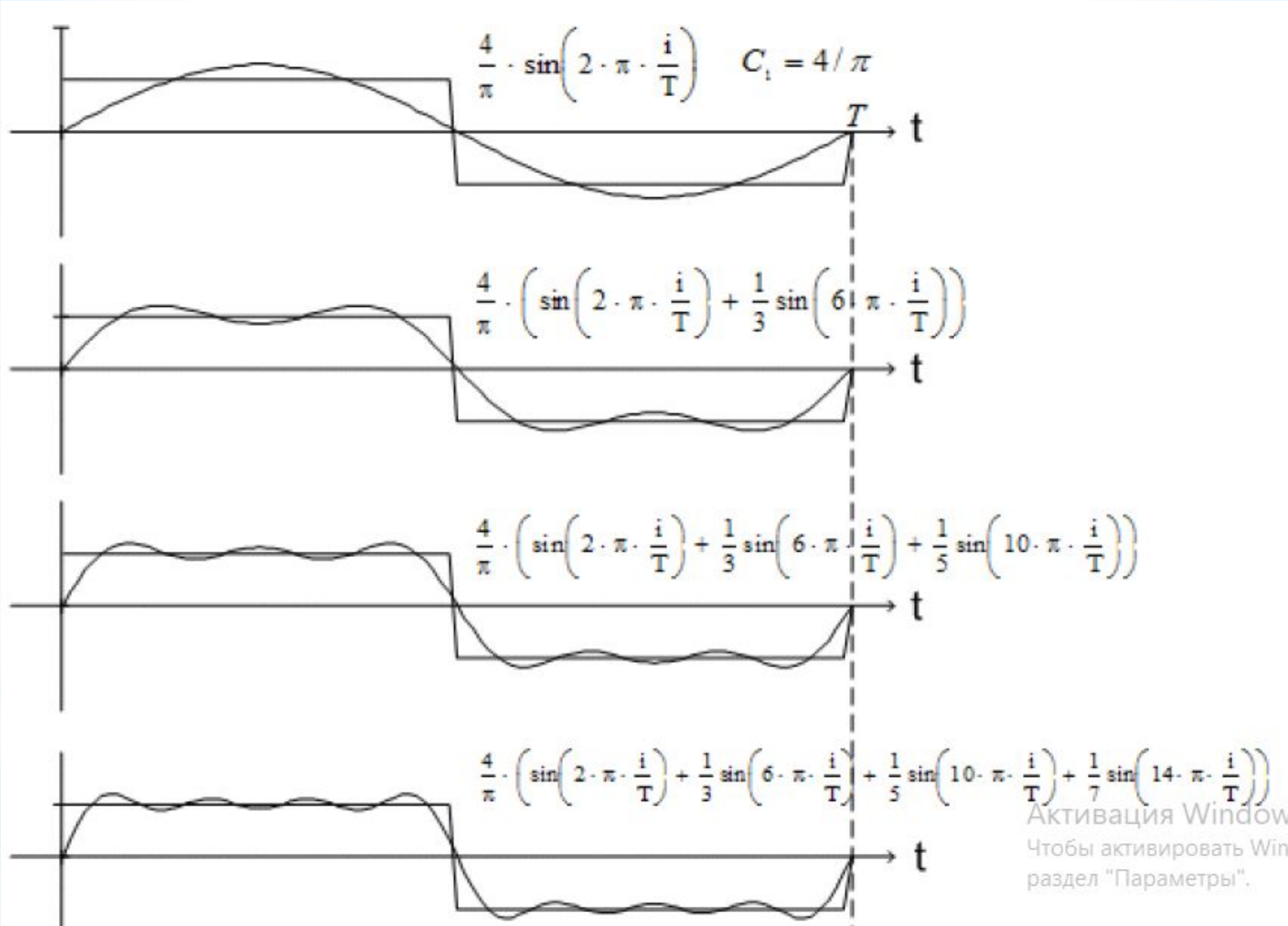
$$= \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-2\pi ift}\,dt = \frac{A}{-2\pi if}\left[e^{-2\pi ift}\Big|_{-T/2}^{T/2}\right]$$

$$= \frac{A}{-2\pi if}\left[e^{-\pi ifT} - e^{\pi ifT}\right] = \frac{AT}{\pi fT}\left[\frac{e^{\pi ifT} - e^{-\pi ifT}}{2i}\right]$$

$$= \frac{AT}{\pi fT}\sin(\pi fT) = AT\left[\operatorname{sinc}(fT)\right]$$

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Ряд Фурье



$\frac{4}{\pi}\cdot\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)$
$C_1 = 4/\pi$
T
t
$\frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(6\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)\right)$
t
$\frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(6\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)+\frac{1}{5}\sin\left(10\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)\right)$
t
$\frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(6\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)+\frac{1}{5}\sin\left(10\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)+\frac{1}{7}\sin\left(14\cdot\pi\cdot\frac{i}{T}\right)\right)$
t

Ряд Фурье

Для непериодических сигналов конечной длительности *s(t)* используется другая форма разложения, при которой дискретность или шаг вычисления спектра стремится по величине к нулю и дискретный ряд Фурье переходит в интеграл Фурье или *преобразование Фурье*. Переход от ряда Фурье для периодического сигнала к интегралу Фурье для непериодического сигнала можно объяснить следующим образом. Любую финитную непериодическую функцию можно рассматривать как функцию периодическую, с периодом $T = \infty$. Тогда к ней можно применить разложение в ряд Фурье с дискретностью

Ряд Фурье

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, exp(j2\pi\, ft)\, df \,. \qquad (1.20)$$

Это выражение представляет непериодическую функцию $S(t)$, как бесконечную сумму экспоненциальных функций $exp(2\pi ft)$ с частотами на интервале $(-\infty < f < \infty)$ и весами, определяемыми для каждой частоты величиной $S(f)$, которая называется *функцией спектральной плотности* и имеет тот же смысл, что и коэффициенты c_n для ряда Фурье.

Функция спектральной плотности для интеграла Фурье определяется следующим образом

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, exp(-j2\pi\, ft)\, dt \,. \qquad (1.21)$$

Ряд Фурье

Функция $S(f)$ (спектральная плотность или просто *спектр*) является прямым преобразованием Фурье сигнала $s(t)$. Она характеризует амплитуды различных частотных составляющих, входящих в этот сигнал. Поэтому говорят, что фунция $S(f)$ является частотным представлением сигнала $s(t)$.

В свою очередь, временной сигнал $s(t)$ может быть получен обратным преобразованием Фурье его спектра $S(f)$. Обе формы представления эквивалентны, поскольку могут быть получены друг из друга линейным преобразованием, хотя более привычной для нас и является временная форма представления сигнала – его задание значениями в различные моменты времени.

Символически, прямое и обратное преобразования Фурье часто обозначают, как

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] \quad \text{и} \quad s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(f)]. \qquad (1.22)$$

Свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье, как мы показали, служит инструментом для представления функций времени через экспоненциальные (гармонические) составляющие с различными частотами. То есть возможны два равнозначных способа определения сигналов - во временной и частотной областях. Выясним, как влияют определенные действия, совершаемые над сигналом в одной области, на ее вид в другой области. К примеру – как, при изменении дли-

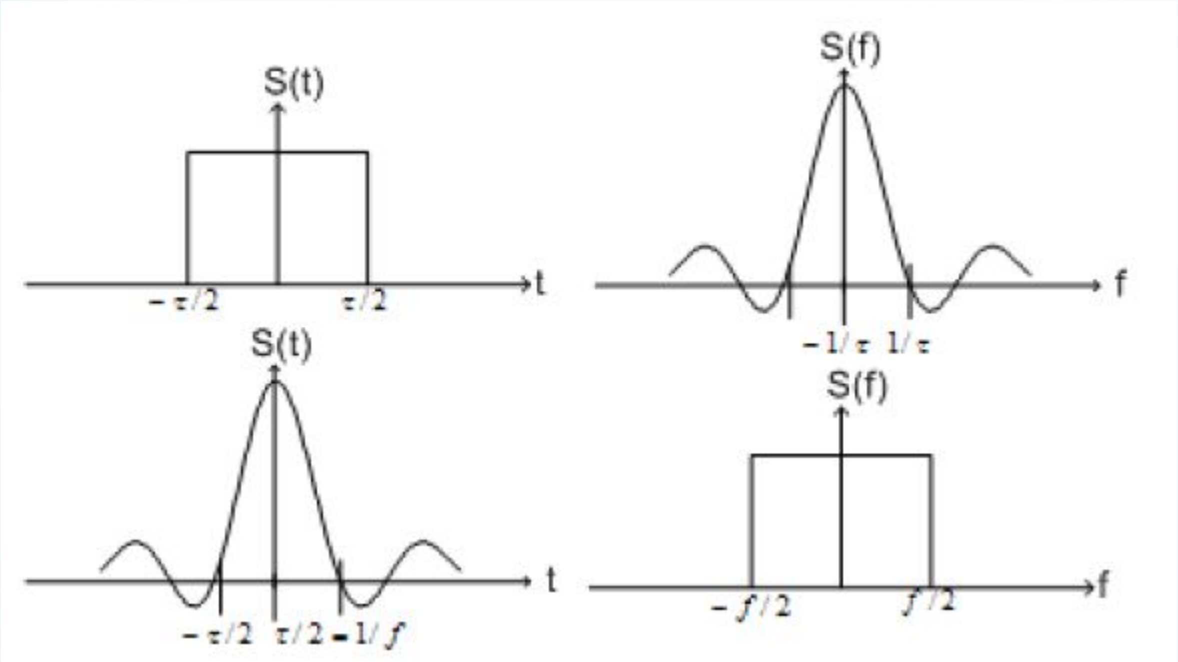
Свойство симметрии

Свойство симметрии прямого и обратного преобразований Фурье можно сформулировать следующим образом:

если $s(t) = A(t)$ *и соответствующий ему спектр* $S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = B(f)$,

то сигналу $s(t) = B(t)$ *соответствует спектр* $S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = A(f)$.

Свойства преобразования Фурье



Свойства преобразования Фурье

Свойство линейности

Свойство линейности преобразования Фурье можно сформулировать следующим образом: *спектр суммы сигналов равен сумме их спектров*, иными словами, если

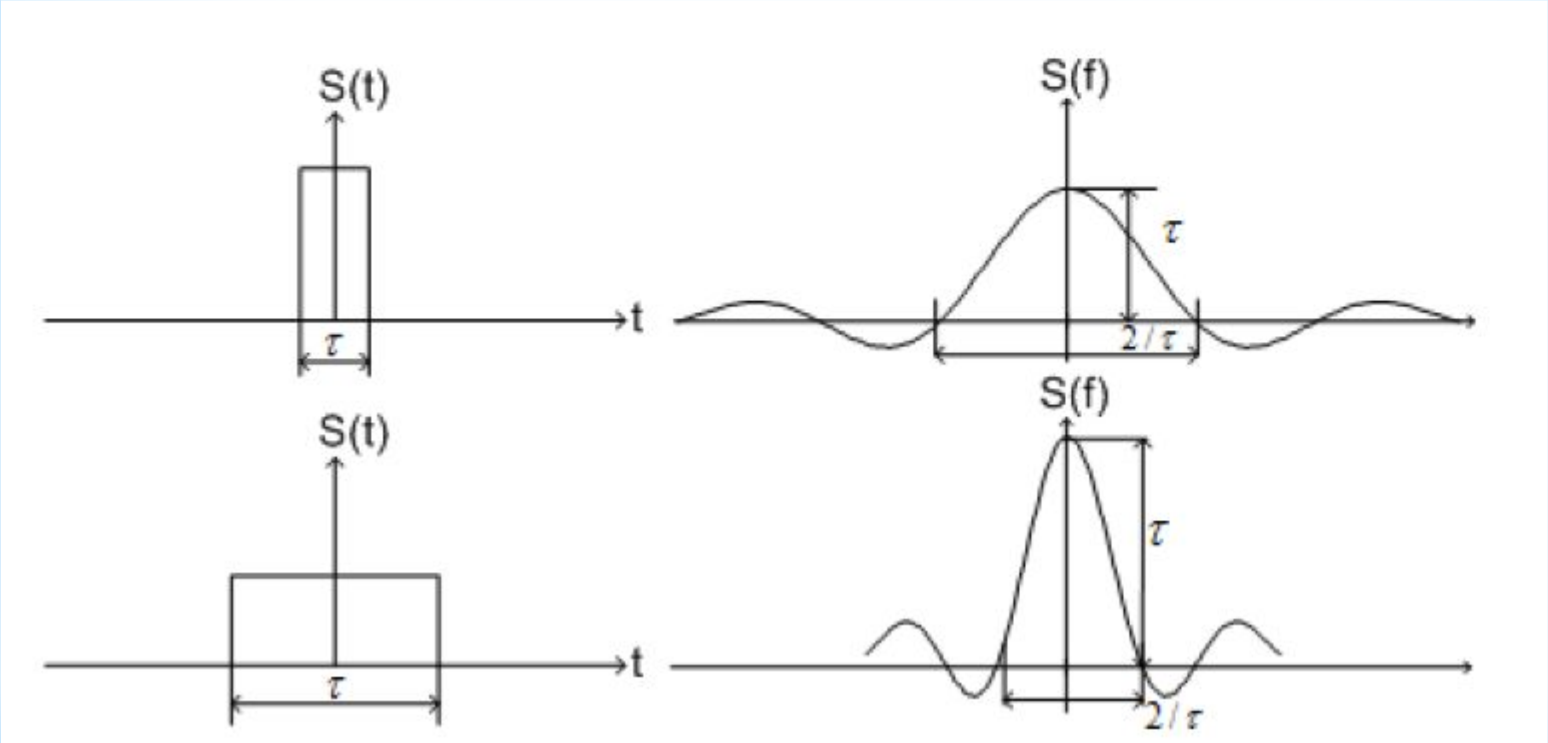
$$s(t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \quad \text{то} \quad S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = a_1 \mathcal{F}[s_1(t)] + a_2 \mathcal{F}[s_2(t)]$$

Свойство изменения масштаба

Это свойство формулируется следующим образом:

$$\text{если} \quad S(f) = \mathcal{F}[s(t)], \quad \text{то} \quad \mathcal{F}[s(a\,t)] = 1/a\, S(f/a).$$

Свойства преобразования Фурье



Свойства преобразования Фурье

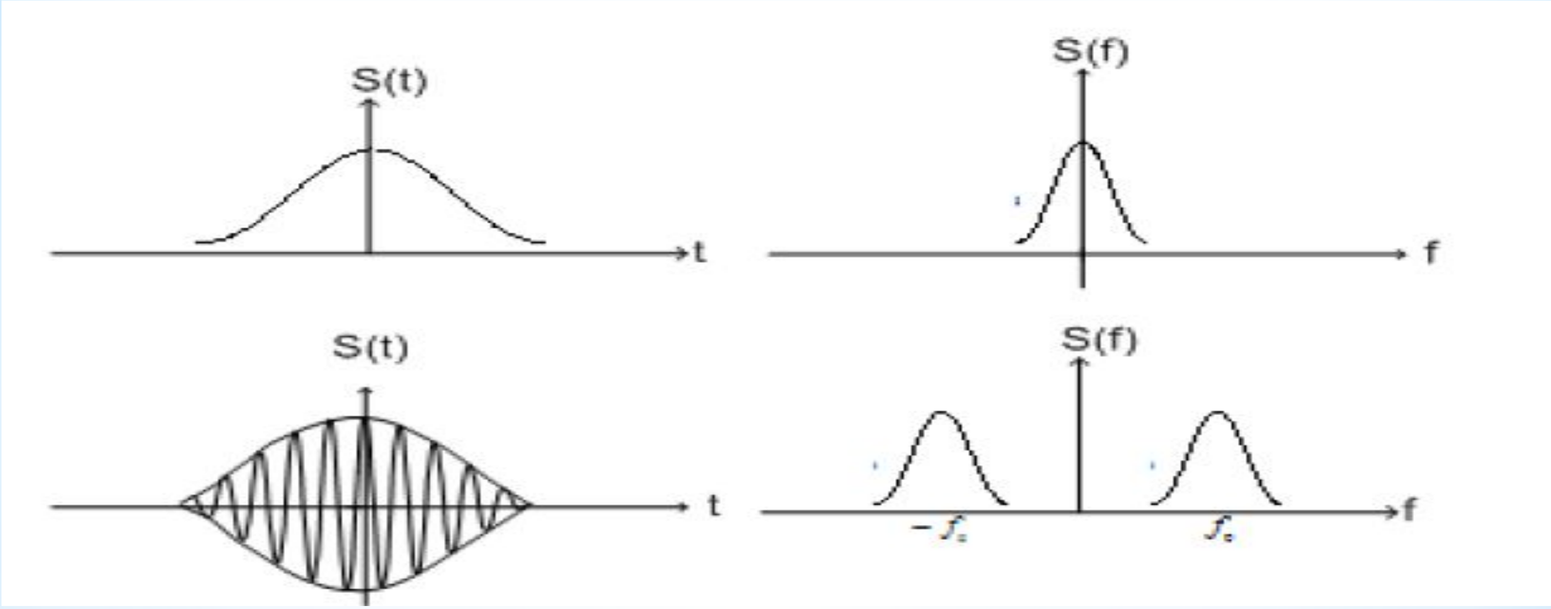
Свойство частотного сдвига

Свойство частотного сдвига состоит в следующем:

если $S(f) = \mathcal{F}[s(t)]$ *то* $\mathcal{F}[s(t)exp(j2\pi f_0 t)] = S(f + f_0)$,

Иными словами, если сигнал $S(t)$ умножить на экспоненту вида $exp(j2\pi f_0 t)$ (на комплексную синусоиду) то спектр этого сигнала $S(f)$ сдвинется по оси частот на величину f_0. Данное свойство преобразования Фурье иллюстрируется и широко используется в радиотехнических устройствах (преобразование частоты сигнала).

Свойства преобразования Фурье



Свойство временного сдвига

Если $\mathcal{F}[s(t)] = S(f)$ то $\mathcal{F}[s(t-\tau)] = S(f)\, exp(-j2\pi f\tau)]$

То есть, при временном сдвиге сигнала его амплитудный спектр не изменяется, а фазовый спектр приобретает дополнительное слагаемое, линейно зависящее от частоты.

Свойства преобразования Фурье

Теорема о свертке

Свертка сигналов является очень часто используемым в радиотехнике интегральным преобразованием сигналов, поскольку она, в частности, описывает прохождение сигнала через линейную систему с постоянными параметрами (усилители, фильтры, дифференцирующие и интегрирующие звенья и т.п.) . Операция свертки записывается следующим образом:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Символически свертка обозначается, как $f(t) \otimes h(t)$.

Свойства преобразования Фурье

Таким образом, теорема о свертке может быть сформулирована примерно следующим образом: *свертке двух функций во временной области соответствует произведение спектров этих функций, и обратно, свертке двух спектров соответствует произведение соответствующих им временных функций.*

В символах преобразования Фурье эта теорема может быть записана таким образом:

$$\mathcal{F}[s_1(t) \otimes s_2(t)] = \mathcal{F}[s_1(t)]\ \mathcal{F}[s_2(t)] = S_1(f)\ S_2(f)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[S_1(f) \otimes S_2(f)] = s_1(t)\ s_2(t)\,.$$