Действительные числа.

Материалы по математике для обучающихся 10 класса.

Содержание темы:

1. Действительные числа.
2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
3. *Арифметический корень натуральной степени.
4. *Тождественные преобразования выражений с арифметическим корнем натуральной степени.
5. *Степень с рациональным показателем.
6. *Степень с действительным показателем.

Результатом изучения темы является:

умение на базовом уровне:

- находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем;
- проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы;
- вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;
- решать *простейшие иррациональные уравнения, их системы.*

Действительные числа.
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Действительные числа

Рациональные числа

Иррациональные числа

Отрицательные числа

Положительные числа

Нуль

Прочитайте материал § 2 учебника «Алгебра и начала анализа 10-11»
(автор Алимов Ш. А. и другие).
Выпишите определение иррационального числа; приведите примеры иррациональных чисел;
Рассмотрите примеры решения задач на страницах 8-9 учебника.

Действительным числом называется *бесконечная десятичная дробь* вида $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, где a_0 - целое число, а каждая из букв a_1, a_2, a_3 - это одна из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Примеры:

1. Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения:

$$(\sqrt{8}-3)(3+2\sqrt{2})=(\sqrt{4\cdot 2}-3)(3+2\sqrt{2})=$$
$$(\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}-3)(3+2\sqrt{2})=(2\sqrt{2}-3)(3+2\sqrt{2})=$$
$$8-9=-1$$

Число -1 является рациональным (его можно представить в виде дроби).

2. Вычислить: $\sqrt{63}\cdot\sqrt{28}=\sqrt{9\cdot 7}\cdot\sqrt{4\cdot 7}=$
$$\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=3\cdot 2\cdot\sqrt{49}$$
$$=6\cdot 7=42$$

Выполните самостоятельно: из § 2 учебника «Алгебра и начала анализа 10-11» (автор Алимов Ш. А. и другие) упражнение № 9 (2-4), упражнение № 10 (2-4).

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Определение:

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется геометрической прогрессией.

Пример: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

Знаменатель геометрической прогрессии $g = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$

Геометрическая прогрессия называется убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы.

Пример.

- Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей: $b_7 = 12,\ b_{11} = \frac{3}{4}$

Решение:

$$b_7 = 12,\ b_{11} = \frac{3}{4}$$

$$b_7 = b_1 \cdot g^6 \qquad b_{11} = b_1 \cdot g^{10}$$

$$\frac{b_{11}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot g^{10}}{b_1 \cdot g^6} = g^4$$

$$g = \sqrt[4]{\frac{\frac{3}{4}}{12}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

Так как знаменатель геометрической прогрессии меньше 1, то это убывающая геометрическая прогрессия.

Выполните самостоятельно: упражнение № 16 (3).

Арифметический корень натуральной степени.

Определение:

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из **неотрицательного числа** a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b,\ b^n = a; \quad a \geq 0,\ b \geq 0}$$

Рассмотрите свойства арифметического корня натуральной степени на странице 19 учебника.

Примеры:

$$-\frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625} = -\frac{1}{3} \cdot 3 + 5 = -1 + 5 = 4$$

$$\sqrt[3]{343 \cdot 0{,}125} = \sqrt[3]{343} \cdot \sqrt[3]{0{,}125} = 7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$$

$$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$(\sqrt[3]{x})^6 = \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{(x^2)^3} = x^2$$

$$\sqrt{548^2 - 420^2} = \sqrt{(548 - 420) \cdot (548 + 420)} =$$

$$= \sqrt{128 \cdot 968} = \sqrt{64 \cdot 2 \cdot 484 \cdot 2} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{484} \cdot \sqrt{4} =$$

$$= 8 \cdot 22 \cdot 2 = 174$$

Тождественные преобразования выражений с арифметическим корнем натуральной степени: примеры заданий из Открытого Банка Задач ***Единого Государственного Экзамена*** по математике.

$$\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}=\frac{\sqrt[18]{7^2}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[18]{7^3}}=\frac{\sqrt[18]{7^3}}{\sqrt[18]{7^3}}=1$$

$$\sqrt{548^2-420^2}=\sqrt{(548-420)\cdot(548+420)}=\sqrt{128\cdot 968}=\sqrt{64\cdot 2\cdot 484\cdot 2}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{484}\cdot\sqrt{4}=$$
$$=8\cdot 22\cdot 2=352$$

$$5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}=5\cdot\sqrt[6]{9^2}\cdot\sqrt[6]{9}=5\cdot\sqrt[6]{9^3}=5\cdot\sqrt[6]{(3^2)^3}=5\cdot\sqrt[6]{3^6}=5\cdot 3=15$$

$$\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2}, \textit{если } 6\le a\le 10.$$

$$\sqrt{(a-6)^2}=|a-6|=a-6;\ \sqrt{(a-10)^2}=|a-10|=10-a, \textit{то}$$

$$\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2}=(a-6)+(10-a)=a-6+10-a=4$$

Степень с рациональным показателем.

Если *n* – натуральное число, *m* – целое число, то при *a* >0 справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Примеры:

$$\sqrt[4]{b^3} = b^{\frac{3}{4}}; \quad \sqrt[5]{\frac{1}{x}} = \sqrt[5]{x^{-1}} = x^{\frac{-1}{5}}$$

$$64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8; \; 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4$$

Свойства степени с рациональным показателем.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Примеры решения заданий из Открытого Банка Задач
Единого Государственного Экзамена
по математике

$$\frac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}}\cdot n^{\frac{1}{4}}}=6\cdot n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}}=6\cdot n^{\frac{4}{12}-\frac{1}{12}-\frac{3}{12}}=6\cdot n^{0}=6\cdot 1=6$$

$$\frac{a^{3,33}}{a^{2,11}\cdot a^{2,22}}\ \textit{при}\quad a=\frac{2}{7}$$

$$\frac{a^{3,33}}{a^{2,11+2,22}}=\frac{a^{3,33}}{a^{4,33}}=a^{3,33-4,33}=a^{-1}=(\frac{2}{7})^{-1}=\frac{7}{2}=3,5$$

$$\frac{n^{\frac{5}{6}}}{n^{\frac{1}{12}}\cdot n^{\frac{1}{4}}}=n^{\frac{5}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}}=n^{\frac{10}{12}-\frac{1}{12}-\frac{3}{12}}=n^{\frac{6}{12}}=n^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}=\sqrt{64}=8$$

$$n=64$$

Задания для домашней работы.

1. Выполните упражнение № 60 на странице 31 учебника.
2. Вычислите значения выражений № 70.
3. Прочитайте решение задачи

№ 4 на странице 15 учебника.

4. Выполните упражнение № 20

Вычислите:

$$\left(\left(2x^{3}\right)^{4}-\left(x^{2}\right)^{6}\right):3x^{12}$$

$$49^{2}\cdot 4^{3}:196$$

$$\frac{3^{6,5}}{9^{2,25}}$$

$$3^{\sqrt{5}+10}\cdot 3^{-5-\sqrt{5}}$$