# ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

# Условие постоянства функции

**Теорема 1.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и во всех внутренних точках отрезка её производная равна нулю, то функция $y = f(x)$ постоянна на этом отрезке.

**Теорема 2.** Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и имеют равные производные во всех внутренних точках отрезка, то разность этих функций постоянна:

$$f(x) - \varphi(x) = C$$

.

# Возрастание и убывание функции

**Теорема 1.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и её производная положительна всюду на интервале $(a;b)$, то $y = f(x)$ строго возрастает на $[a;b]$.

**Теорема 2.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и её производная отрицательна всюду на интервале $(a;b)$, то $y = f(x)$ строго убывает на $[a;b]$.

**Пример:** Найдите интервалы возрастания и убывания функции $y = x(1 + \sqrt{x})$.

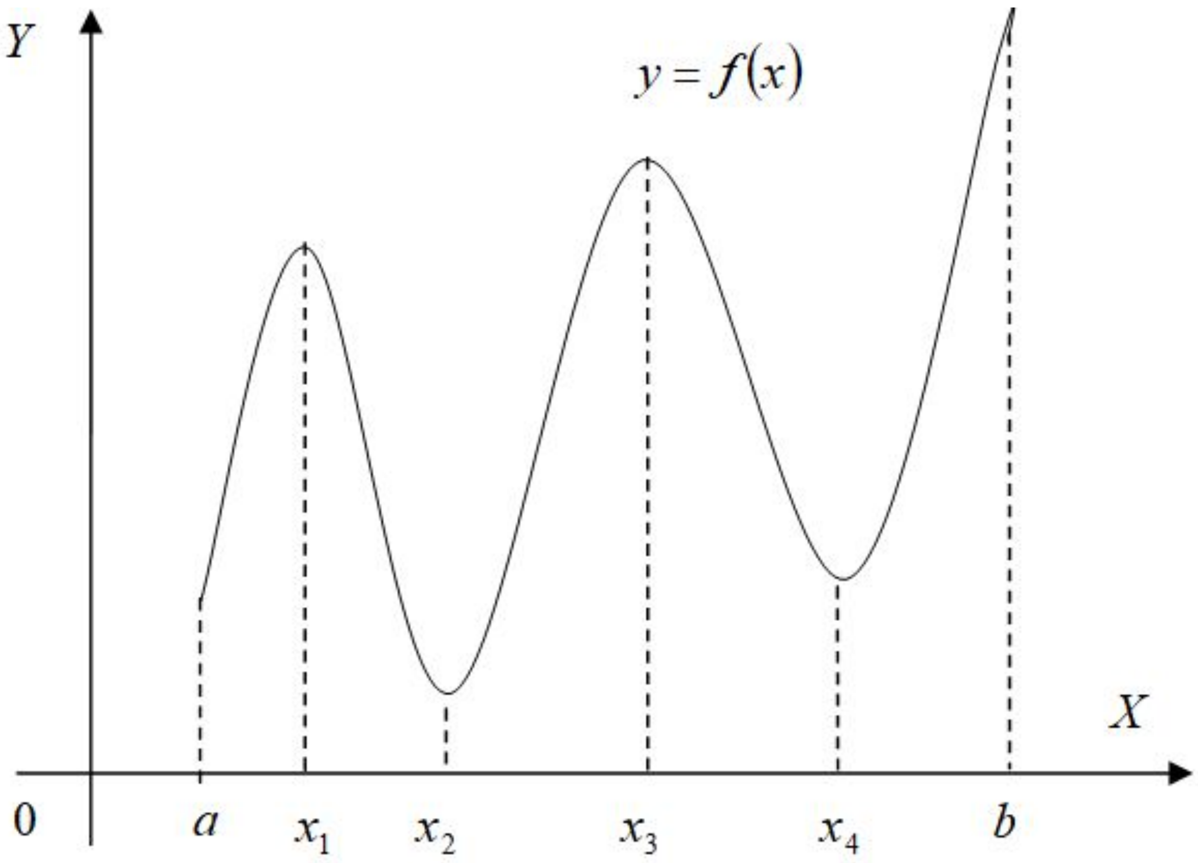
*Решение.* Найдём производную $y' = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Производная положительна в промежутке $[0,+\infty)$. Таким образом, функция возрастает во всей области определения.

# Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

**Определение.** Пусть функция $y = f(x)$, $x \in X$, определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in X$ и непрерывна в этой точке. Точка $x_0$ называется *точкой максимума (минимума)* функции, если существует её окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ( $f(x) \geq f(x_0)$ ), причём знак равенства имеет место лишь в случае $x = x_0$.

**Замечание 1.** Максимум и минимум функции не всегда являются наибольшим и наименьшим значениями функции на данном отрезке. В точках максимума (минимума) функция принимает наибольшее (наименьшее) значение лишь для точек окрестности, достаточно близких к точке максимума (минимума). На рисунке функция $y = f(x)$ достигает максимума в точках $x = x_1$, $x = x_3$. Точки $x = x_2$, $x = x_4$ являются точками минимума. Наибольшее значение функция принимает в точке $x = b$, а наименьшее значение в точке $x = x_2$.

# Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

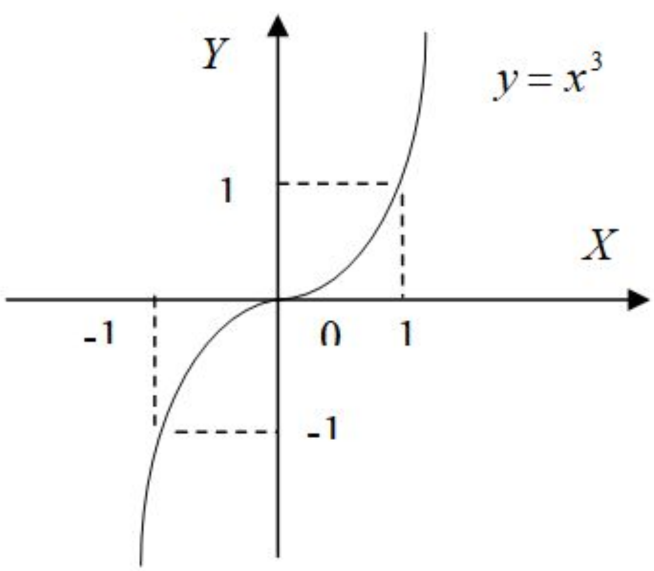


# Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

Точки максимума и минимума называют *точками экстремума*.

**Теорема 1 (необходимое условие существования экстремума).** Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ максимум или минимум, то её производная обращается в нуль в этой точке, т.е. $f'(x_0) = 0$.

**Замечание.** Необходимое условие существования экстремума не является достаточным.

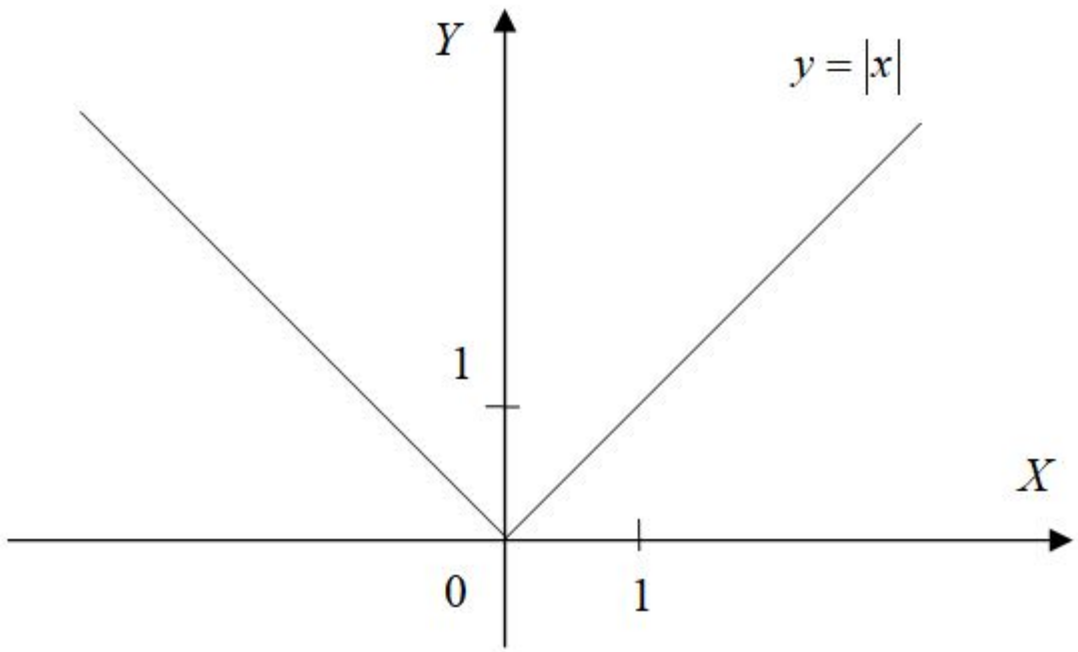



**Пример 1.** $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$. Тогда $f'(0) = 0$, но $x_0 = 0$ не является точкой экстремума.

# Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

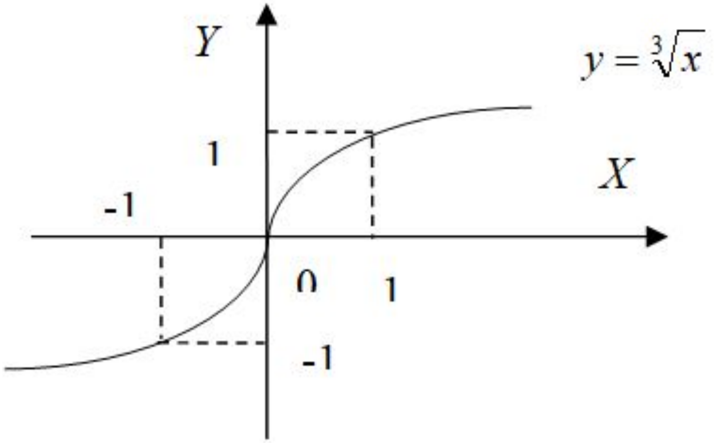
**Замечание.** В точках, в которых производная не существует, может быть или максимум, или минимум, но может ни быть, ни того, ни другого.

**Пример 2.** $f(x)=|x|$ не имеет производной в точке $x_0=0$, но $x_0=0$ - точка минимума этой функции.



# Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

**Пример 3.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$ не имеет производной в точке $x_0=0$, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=\infty$. Точка $x_0=0$ не является точкой экстремума.




Значения аргумента, при которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками*.

# Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

Теорема 2 (достаточное условие существования экстремума). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки $x_0$). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_0$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку $x_0$ слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Пример: Исследуйте на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$.

# Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной

**Теорема.** Пусть $f'(x_0)=0$ и в точке существует вторая производная. Тогда, если $f''(x_0)>0$, то $x_0$ – точка минимума функции, а если $f''(x_0)<0$, то $x_0$ – точка максимума функции.

**Пример:** Исследуйте на экстремум функцию $y=x^3-12x$.

*Решение.*

$D(y)=R$

$y'=3x^2-12=3(x^2-4)$

$y'=0 \Rightarrow x_1=-2, \quad x_2=2$ - критические точки.

$y''=6x, \quad y''(-2)=-12<0 \Rightarrow x_1=-2$ - точка максимума;

$y''(2)=12>0 \Rightarrow x_2=2$ - точка минимума.

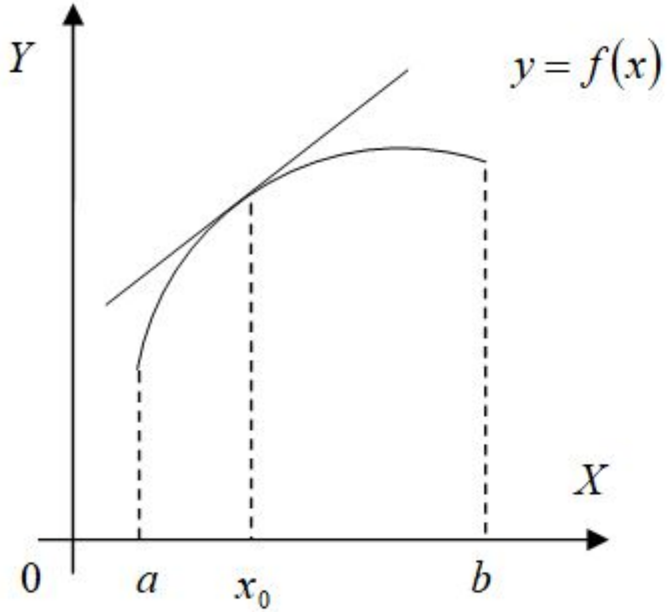
$y_{max}(-2)=16, \quad y_{min}(2)=-16$.

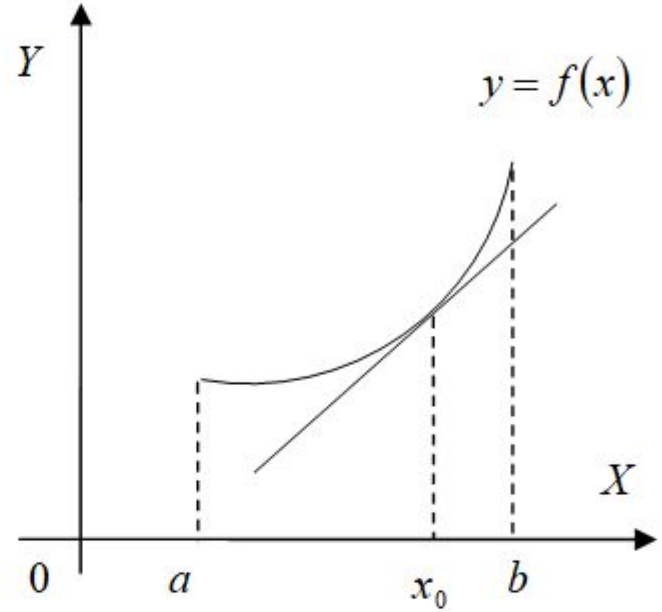
# Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

**Определение 1.** Кривая обращена *выпуклостью вверх* на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат ниже любой её касательной на этом интервале.

Кривая обращена *выпуклостью вниз* на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат выше любой её касательной на этом интервале.

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть *выпуклой*, а обращённую выпуклостью вниз – *вогнутой*.



# Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

**Теорема 1.** Если во всех точках интервала $(a;b)$ вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ обращена выпуклостью вверх (кривая выпукла).

**Теорема 2.** Если во всех точках интервала $(a;b)$ вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е. $f''(x)>0$, то кривая $y=f(x)$ обращена выпуклостью вниз (кривая вогнута).

**Определение 2.** Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба* кривой.

В точке перегиба касательная *пересекает* кривую, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой стороны – над нею.

**Теорема 3 (необходимое условие точки перегиба).** Для того чтобы график функции $y=f(x)$ имел перегиб в точке $x_0$, необходимо, чтобы функция была дифференцируема в точке $x_0$, и чтобы в этой точке вторая производная либо не существовала, либо была равна нулю.

# Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

**Теорема 4** (достаточное условие точки перегиба). Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.

**Пример:** Найдите точки экстремума и точки перегиба функции $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

# Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на данном отрезке

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке данная функция принимает и своё наибольшее, и своё наименьшее значения.

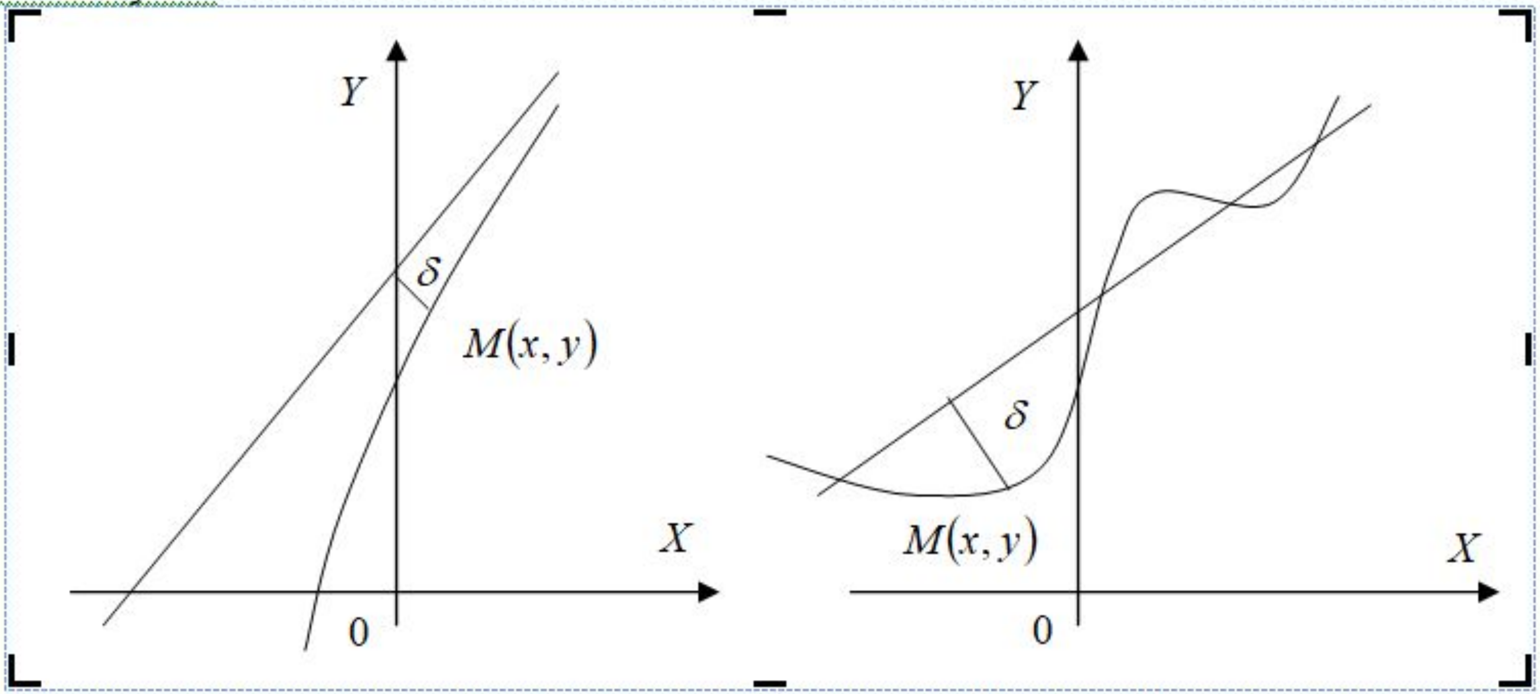
Для того чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, нужно:

1) найти производную данной функции;
2) найти критические точки;
3) вычислить значения функции в найденных точках и на концах отрезка;
4) из всех найденных значений выбрать наибольшее (наименьшее).

**Пример:** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $[-2;3]$.

# Асимптоты

**Определение.** Прямая $A$ называется *асимптотой* кривой, если расстояние $\delta$ от переменной точки $M$ кривой до этой прямой при удалении точки $M$ в бесконечность стремится к нулю.




Различаются *вертикальные* (параллельные оси ординат) и *наклонные* асимптоты.

1) *Вертикальные асимптоты.*

Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ есть асимптота кривой $y=f(x)$.

# Асимптоты

**Пример:** Найдите вертикальные асимптоты кривой $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

*Решение.* Найдём область определения функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$:

$D(y) = (-\infty;1) \cup (1;3) \cup (3;+\infty)$

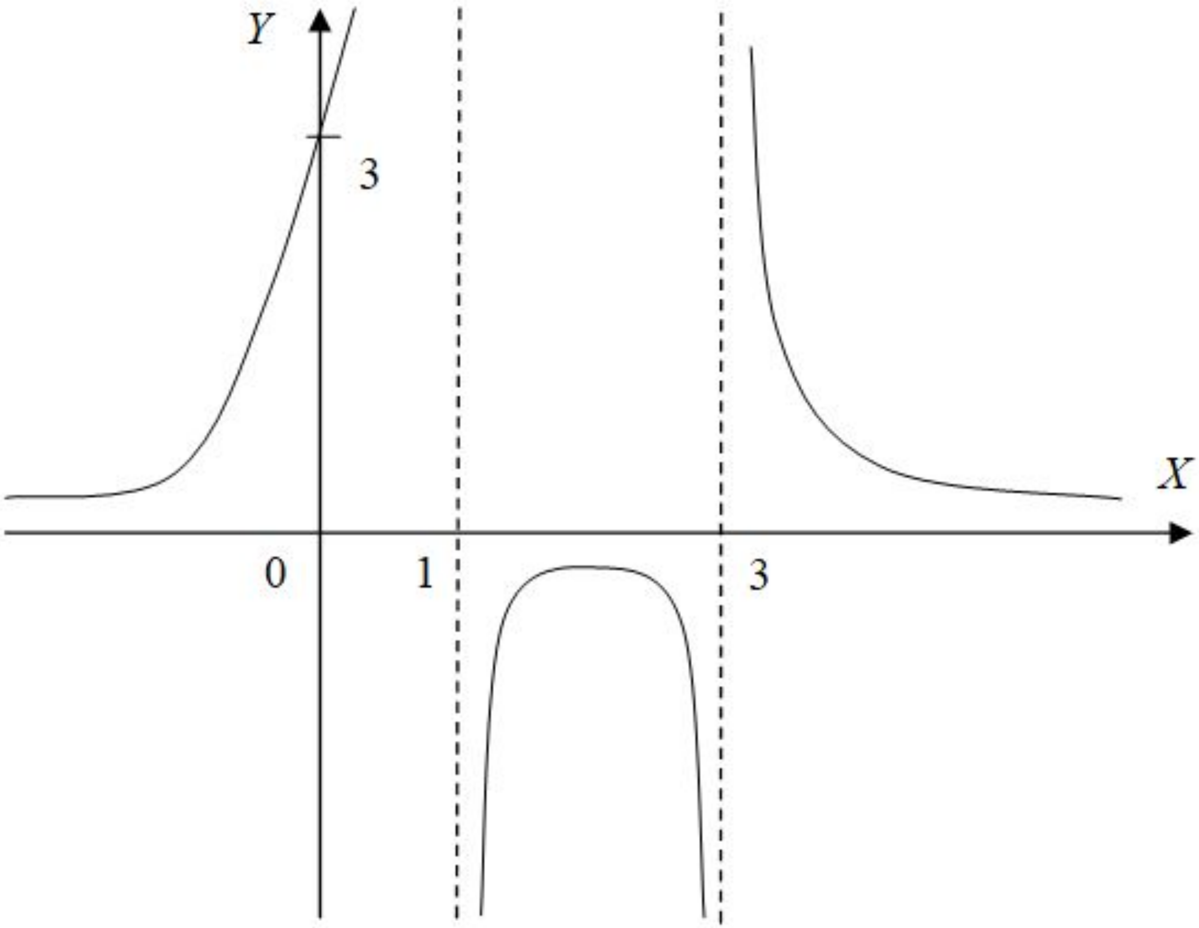
Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = -\infty; \qquad \lim_{x \to 3+0} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = +\infty.$$

Прямые $x = 1$, $x = 3$ являются вертикальными асимптотами.

# Асимптоты



# Асимптоты

2) *Наклонные асимптоты.*

Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. Тогда $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

**Пример:** Найдите асимптоты кривой $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

*Решение.* 1) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = -\infty; \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = +\infty.$$

$x = 0$ - вертикальная асимптота.

2) Найдём коэффициенты $k$ и $b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1; \qquad b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 1}{x} = 2.$$

Получаем уравнение наклонной асимптоты $y = x + 2$.

# Схема полного исследования функции

1) Область определения функции.
2) Чётность, нечётность.
3) Периодичность.
4) Точки пересечения с осями.
5) Точки разрыва, вертикальные асимптоты.
6) Интервалы монотонности, точки экстремума.
7) Точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости.
8) Наклонные, горизонтальные асимптоты.

**Пример:** Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ и постройте её график.

# Схема полного исследования функции

*Решение.*

1) $D(y) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

2) $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{3-x^2} = -y(x)$ - функция нечётная, график симметричен относительно начала координат;

3) функция непериодическая;

4) точка пересечения с осями $Ox$ и $Oy$ - $O(0;0)$;

5) найдём односторонние пределы для точек разрыва:

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty; \qquad \lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty; \qquad \lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty.$$

$x = -\sqrt{3}$ - точка разрыва второго рода;

$x = \sqrt{3}$ - точка разрыва второго рода.

# Схема полного исследования функции

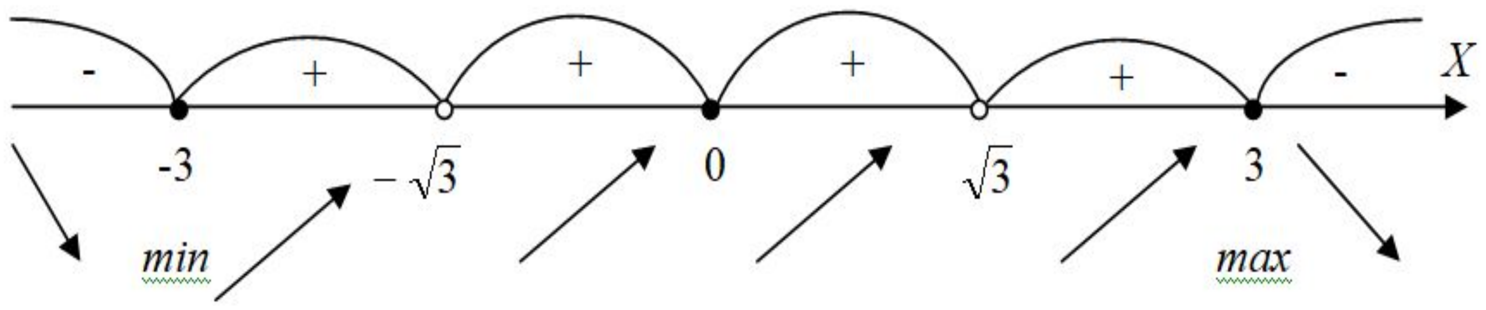
Прямые $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ - вертикальные асимптоты.

6) найдём первую производную функции $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$:

$$y' = \frac{3x^2\left(3 - x^2\right) + 2x \cdot x^3}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{x^2(3 - x)(3 + x)}{\left(\sqrt{3} - x\right)^2\left(\sqrt{3} + x\right)^2};$$

из уравнения $y' = 0$ получаем критические точки $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$.

Определяем знаки первой производной.



# Схема полного исследования функции

В результате получаем две точки экстремума $x = -3$ и $x = 3$. Находим значения функции в этих точках: $y_{\min} = y(-3) = 4{,}5$, $y_{\max} = y(3) = -4{,}5$.

7) найдём вторую производную функции $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$:

$$y'' = \frac{\left(18x - 4x^3\right)\left(3 - x^2\right)^2 - \left(9x^2 - x^4\right)2\left(3 - x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(3 - x^2\right)^4} =$$

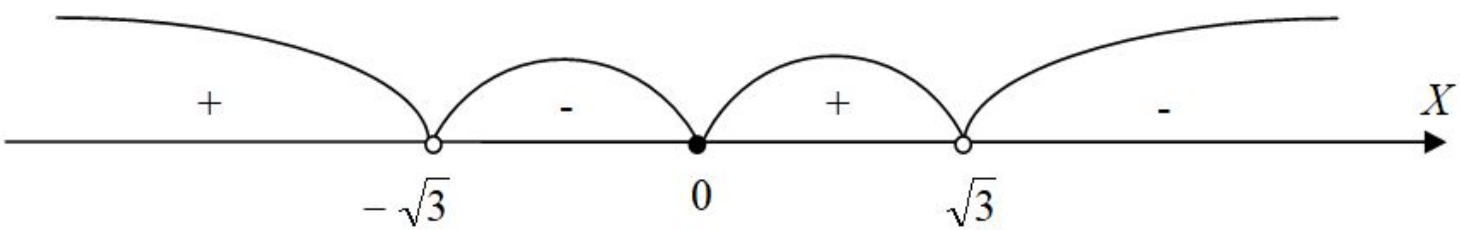
# Схема полного исследования функции

$$= \frac{(18x-4x^3)(3-x^2)+4x(9x^2-x^4)}{(3-x^2)^3} = \frac{54x-12x^3-18x^3+4x^5+36x^3-4x^5}{(3-x^2)^3} =$$

$$= \frac{6x^3+54x}{(3-x^2)^3} = \frac{6x(x^2+9)}{(\sqrt{3}-x)^3(\sqrt{3}+x)^3};$$

при $y''=0$ получаем точку $x=0$.

Определяем знаки второй производной.




Точка $x=0$ является точкой перегиба. На интервалах $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(0;\sqrt{3})$ график функции вогнутый, а на интервалах $(-\sqrt{3};0)$ и $(\sqrt{3};+\infty)$ – выпуклый.

# Схема полного исследования функции

8) найдём коэффициенты $k$ и $b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x-x^3}=-1;\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0.$$

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=-x$.

# Схема полного исследования функции