ЛЕКЦИЯ № 1

Введение.
Механика. Элементы кинематики.

ВОПРОСЫ

Введение.

1. Механическое движение. Система отсчёта. Средняя и мгновенная скорости.
2. Ускорение. Уравнение кинематики поступательного равнопеременного движения (вывод).
3. Движение материальной точки по окружности. Угловая скорость и угловое ускорение.

Введение

Физика это наука изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы её движений. Понятия физики и её законы лежат в основе всего естествознания. Физика относится к точным наукам и изучает количественные закономерности явлений.

В методах физических исследований выделяют четыре этапа:

1) Опыт – наблюдение исследуемого явления в точно контролируемых условиях;

Для объяснения данных привлекаются гипотезы.

2) Гипотеза – это научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо факта или явления и требующее доказательства;

Для проверки гипотезы ставят эксперимент.

3) Эксперимент – создание явления, которое естественно в природе не наблюдается, для отделения от некоторых субъективных условий или факторов;

Если гипотеза прошла успешную проверку, она превращается в теорию или закон.

4) Физическая теория представляет собой систему основных идей, обобщающих данные и отражающих объективные закономерности природы.

Основные этапы развития физики:
1) Атомарное строение, законы статики – античность и средние века;
2) Создание классической механики – 17 век, Галилей, Ньютон;
3) Создание в 20 веке квантовой теории и теории относительности (излучение абсолютно чёрного тела и распространение света в среде);
4) Проблемы физики на сегодняшний день.

Проблемы физики:
1) элементарные частицы (кварки и глюоны);
2) астрофизика (чёрные дыры, квазары и т.д.);
3) физика ядра (термоядерный синтез);
4) квантовая электроника (γ-лазеры);
5) физика твёрдого тела (сверхпроводимость).

143

Роль физики в развитии техники:
1) Развитие термодинамики дало промышленности тепловые машины;
2) Электродинамика – электродвигатели;
3) Ядерная физика – АЭС.

143

Физика и моделирование. Физика служит для описания явлений, для предсказания результата явлений, т.е. можно сказать, что физика, на основе теорий и законов, строит математические модели явлений, протекающих в природе.

Даже простейший процесс, такой как прямолинейное равномерное движение, описывается с помощь математической модели:

$S = V * t$.

Эта математическая модель (или физическая формула) позволяет по двум заданным величинам найти третью величину.

Другой пример: задача о движении двух тел: с помощью формул движения и взаимодействия мы можем сказать где они будут находиться в некоторый момент времени. Здесь будет использовано формул больше, но это тоже модель некоторого явления или процесса.

Иногда математические формулы получаются настолько сложные, что их аналитически решить не возможно (например, задача о движении трёх и более небесных тел), тогда на помощь приходит Электронная Вычислительная Машина и специальные методы расчёта. Но это тоже будет некоторая математическая модель.

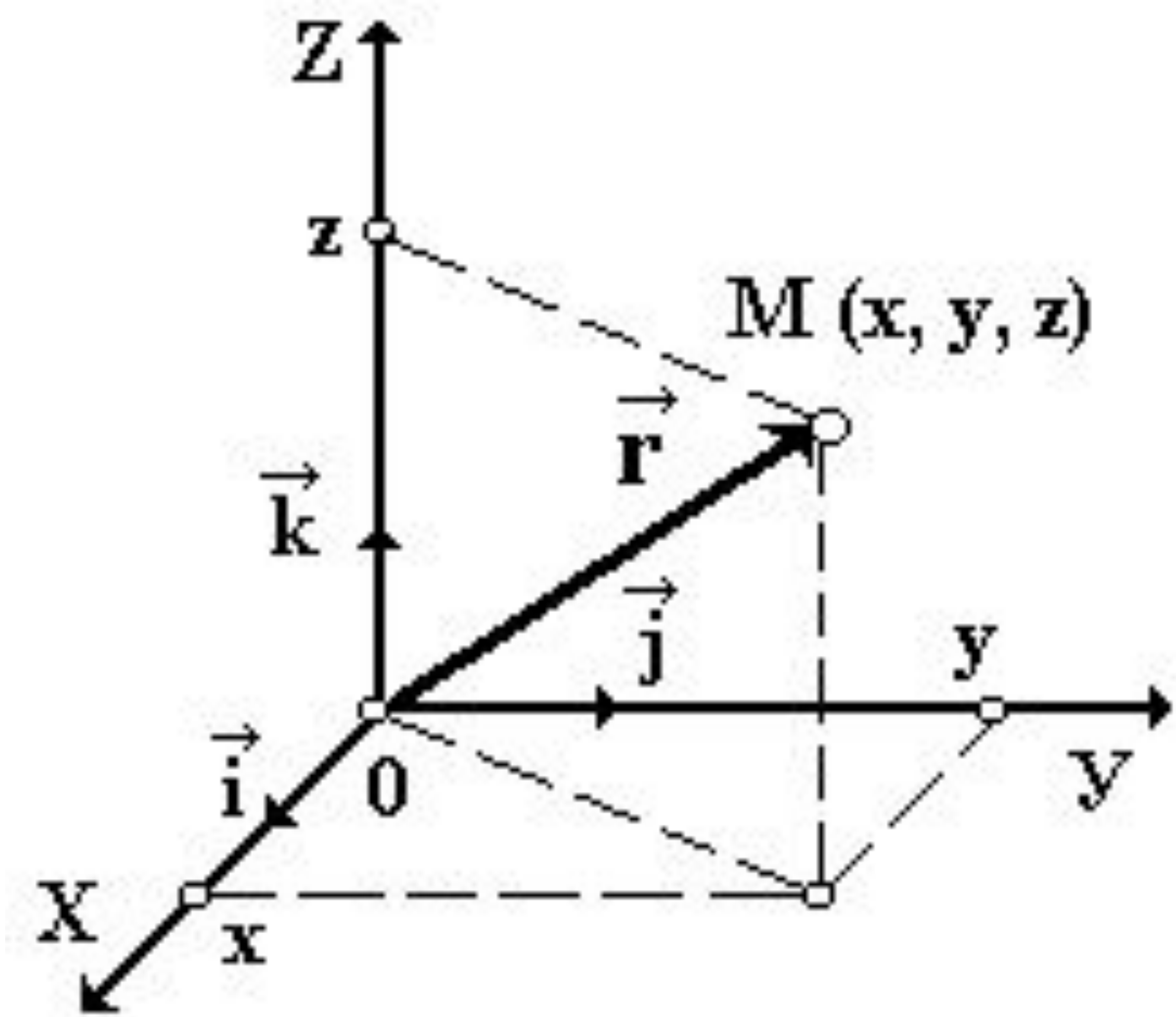
Также, с усложнением экспериментов компьютеру отводится задача управления, сбора и обработки данных.

Вопрос № 1.
Механическое движение.
Система отсчёта.
Материальная точка.
Траектория.
Перемещение и путь.
Средняя и мгновенная скорости.

143

Кинематика изучает законы движения тел.
Материальная точка – модель тела, размерами которого можно пренебречь, по сравнению с расстояниями в задаче.
Механическое движение – изменение положения тела с течением времени относительно других тел.

Система отсчёта – тело отсчёта, система координат, часы. Декартова система отсчёта в Евклидовом пространстве (пространство, в котором выполняются аксиомы геометрии). Положение тела задаётся через радиус-вектор $\vec{r}$ или через координаты (x, y, z) (численно равны проекциям радиус-вектора).



143

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, – единичные ортогональные вектора, направленные вдоль осей x, y, z, соответственно. Вектор $\vec{r}$, также может быть представлен в виде произведения величины $|\vec{r}|$ (модуль вектора) и направления – $\vec{e}_r$ (единичный вектор, который задаёт направление).

Траектория – линия, вдоль которой движется тело.
Путь – расстояние, которое проходит тело по траектории. Скалярная величина, которая характеризуется только величиной – модулем.
Перемещение – вектор, направленный из начальной точки в конечную, характеризуется модулем и направлением.

Так как тело может менять положение, то положение задают в зависимости от времени:

векторно

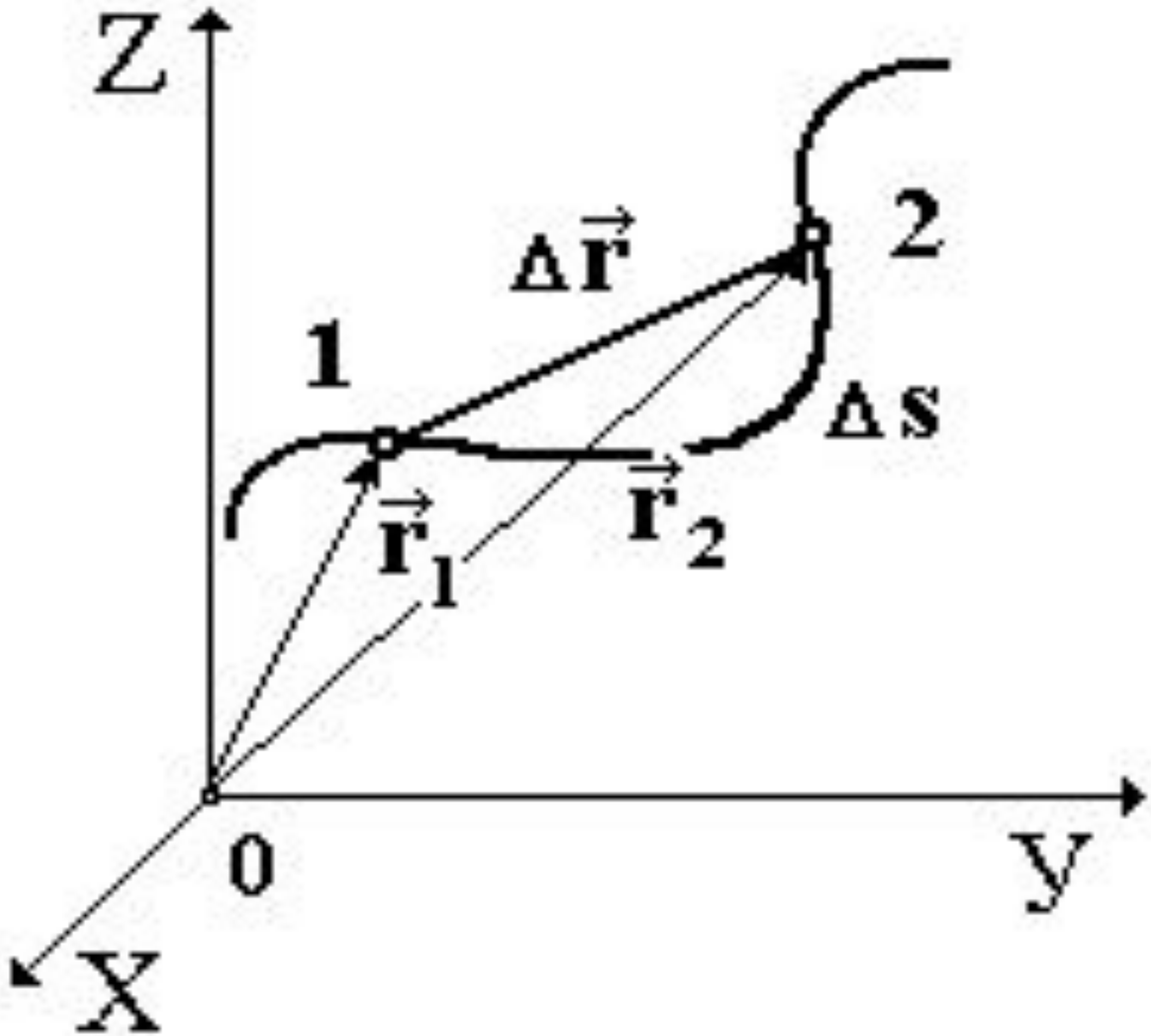
$$\vec{r} = \vec{r}(t);$$

или скалярно

$$x = x(t);$$

$$y = y(t);$$

$$z = z(t).$$



143

Изменение положения с течением промежутка времени Δ*t* характеризуют скоростью. Средняя скорость (по пути и по перемещению, соответственно)

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad \vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

143

Мгновенная скорость (по пути и по перемещению, соответственно)

$$\upsilon_{\text{м}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dot{S},$$

$$\vec{\upsilon}_{\text{м}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$$

точка над символом обозначает производную по времени.

Здесь dS, dr, dt – дифференциал, очень малое изменение величины – приращение (ещё может быть очень малая доля некоторой величины), dS / dt, dr / dt – производная, она показывает изменение одной величины в зависимости от другой.

Вопрос № 2.
Ускорение.
Тангенциальное и нормальное ускорения.
Уравнение кинематики поступательного равнопеременного движения (вывод).

143

Изменение скорости характеризуют ускорением.

Среднее ускорение

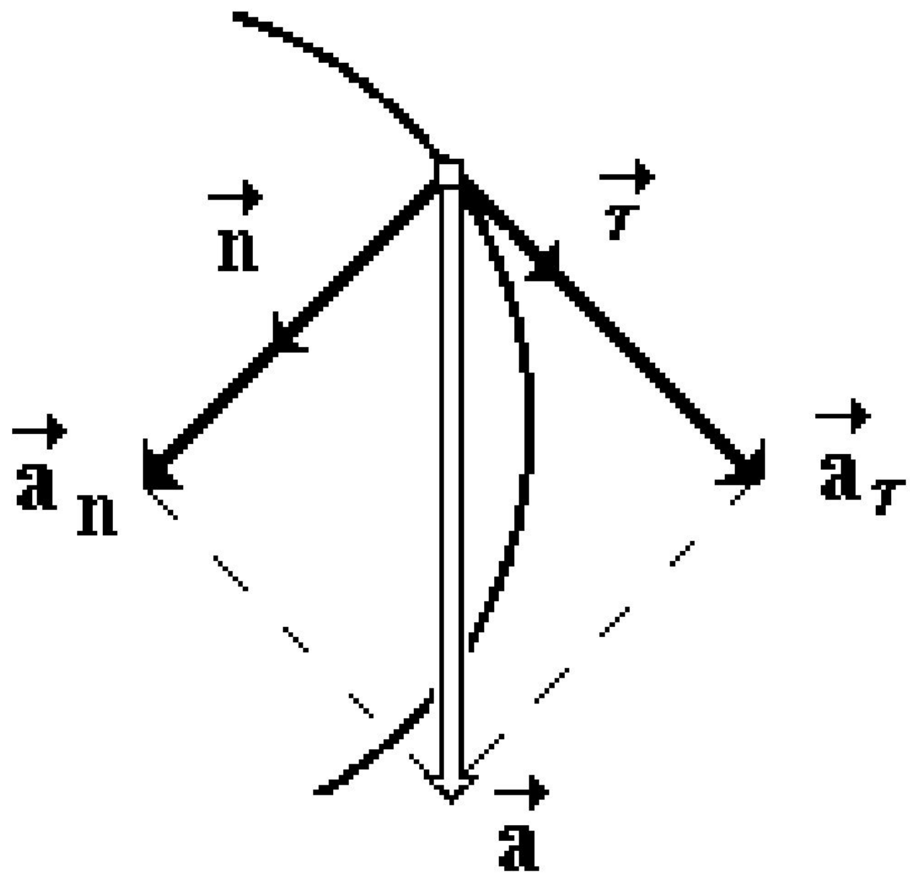
$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \qquad \vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение (по пути и по перемещению, соответственно)

$$a_{\text{м}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{S},$$

$$\vec{a}_{\text{м}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Выделим на траектории бесконечно малый участок d*S*, который можно заменить дугой окружности с радиусом *R*. Отметим также вектора τ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории, *n* – единичный вектор, направленный по радиусу *R* к центру окружности.


$\vec{n}$
$\vec{\tau}$
$\vec{a}_n$
$\vec{a}_\tau$
$\vec{a}$

Скорость представим в виде

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{\tau}$$

тогда ускорение можно записать следующим образом

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\upsilon\vec{\tau})}{\mathrm{d}t} = \dot{\upsilon}\vec{\tau} + \upsilon\dot{\vec{\tau}} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{n}$$

Нормальное ускорение, направлено по нормали к траектории, изменяет направление движения

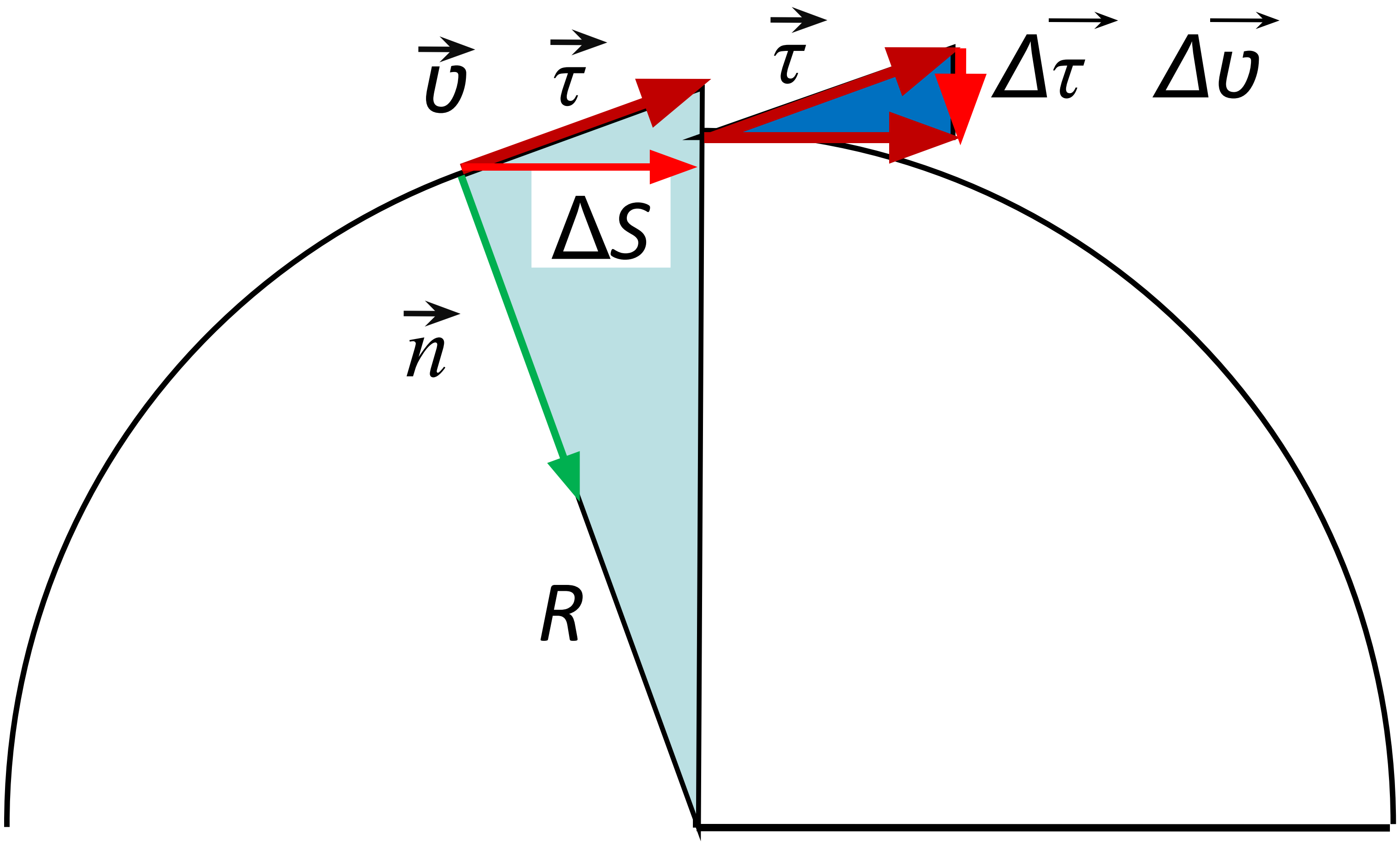
$$\vec{a}_n = \upsilon\dot{\vec{\tau}} = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$$

Тангенциальное ускорение, направлено по касательной к траектории, изменяет модуль скорости

$$\vec{a}_\tau = \dot{\upsilon}\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

Рассмотрим на рисунке два подобных треугольника, с катетами R, ΔS и τ, $\Delta\tau$ (или υ, $\Delta\upsilon$).

143



$\vec{\upsilon}$
$\vec{\tau}$
$\vec{\tau}$
$\overrightarrow{\Delta\tau}$
$\overrightarrow{\Delta\upsilon}$
ΔS
$\vec{n}$
R

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} \approx \frac{\Delta S}{R}$$ В пределе $\Delta t \to 0$ $$\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} = \frac{\mathrm{d}S}{R}$$

Поделим на промежуток времени dt и преобразуем

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau \mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{R\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \tau = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\frac{\tau}{R} = \upsilon\frac{\tau}{R} = \frac{\upsilon}{R}$$

или

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}; \vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} = \upsilon\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

Вычисление пути
Равномерное движение

$$\vec{a} = 0 \quad \vec{\upsilon} = \text{const}$$

$$S = |\Delta\vec{r}| \quad \Delta\vec{r} = \vec{\upsilon}t \quad S = \upsilon t$$

Если движение задано про проекциям

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{x} + \Delta\vec{y} + \Delta\vec{z}$$

Аналогично вычисляем скорость

$$|\upsilon| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$

$$\upsilon = \upsilon_x + \upsilon_y + \upsilon_z$$

Равноускоренное движение

$$\vec{a} = \mathrm{const} \qquad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$$

Весь путь разбивают на множество участков, на которых скорость можно считать постоянной (за малый промежуток времени изменением скорости можно пренебречь)

Полный путь или перемещение получаем сложением этих малых участков

$$\Delta\vec{r} = \sum \vec{\upsilon}\Delta t$$

Чем меньше промежутки времени, тем точнее расчёт.

Переходим к пределу

$$\Delta\vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \sum \vec{\upsilon}\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\upsilon}(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (\vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t)\mathrm{d}t = \left(\vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

Положим начальный момент времени равным нулю и добавим начальное положение $\vec{r}_0$ или S_0

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$S = S_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Это закон кинематики равноускоренного движения

Вычислить ускорение можно следующими способами (аналогично скорости и перемещению)

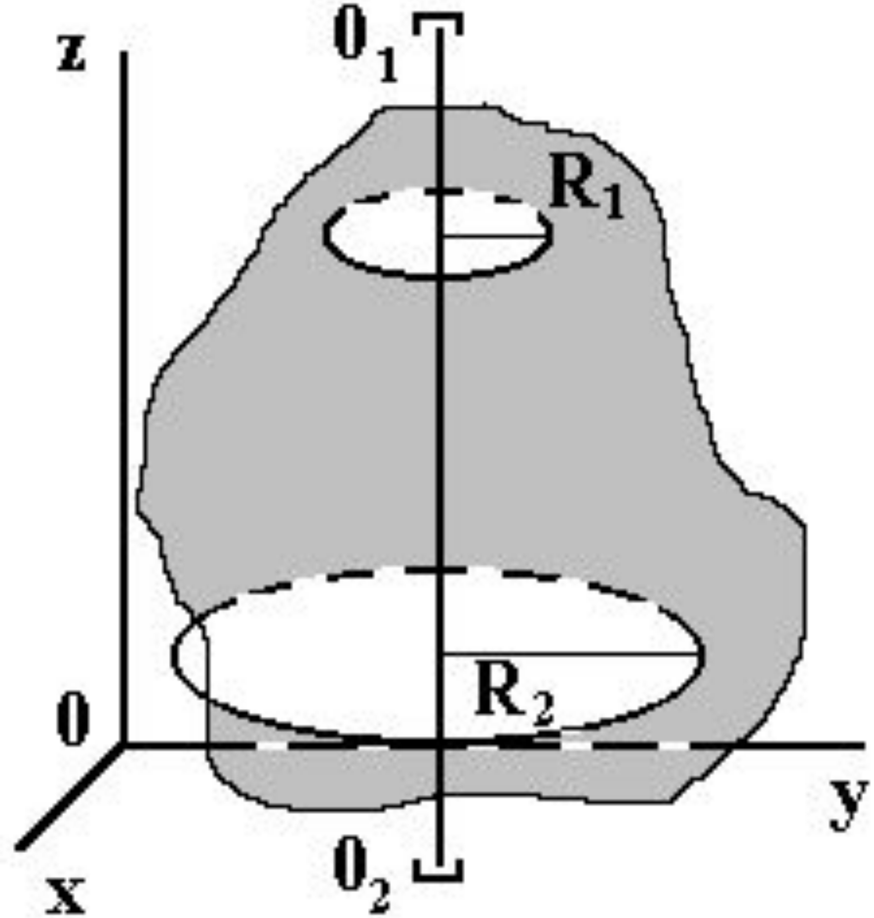
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

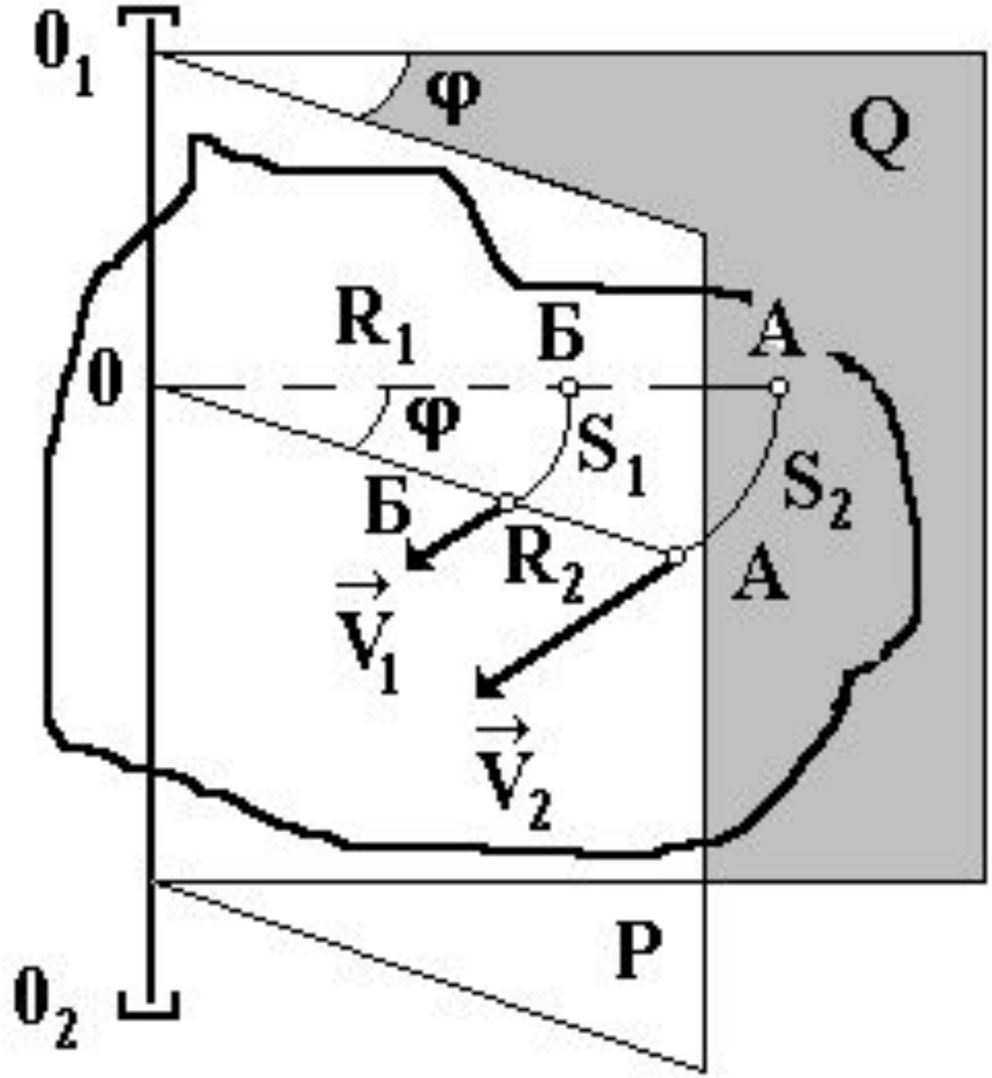
$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Вопрос № 3.
Движение материальной точки по окружности.
Угловая скорость и угловое ускорение.
Уравнения кинематики вращательного движения.
Связь между линейными и угловыми характеристиками движения.

143

Вращательное движение
Вращательным движением абсолютно твердого тела называют движение, при котором все его точки описывают окружности, лежащие в параллельных плоскостях, а центры их лежат на оси вращения.


z
0_1
R_1
0
R_2
y
x
0_2



143

Вращательное движение характеризуется углом поворота φ, угловой скорость вращения ω, угловым ускорением ε

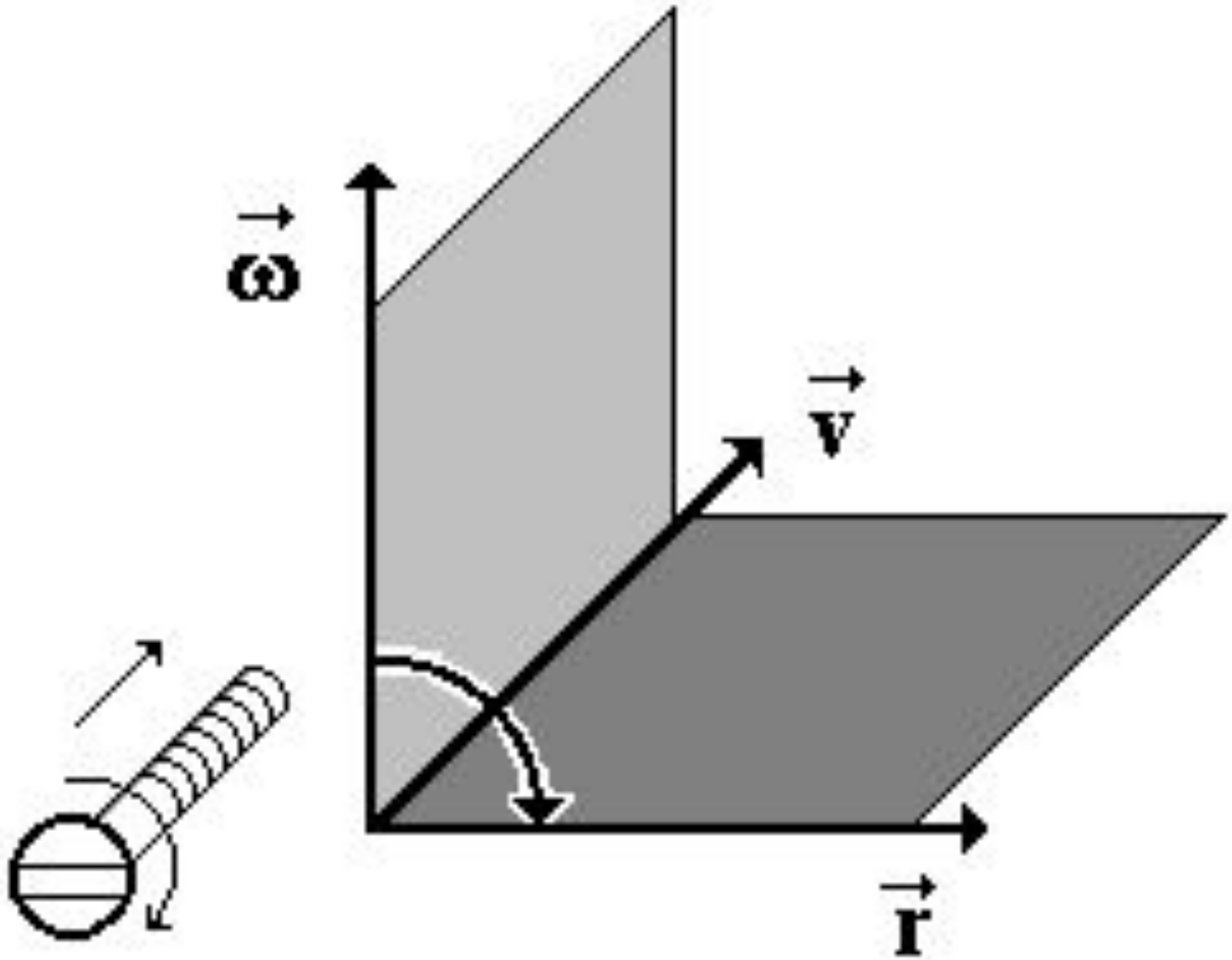
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

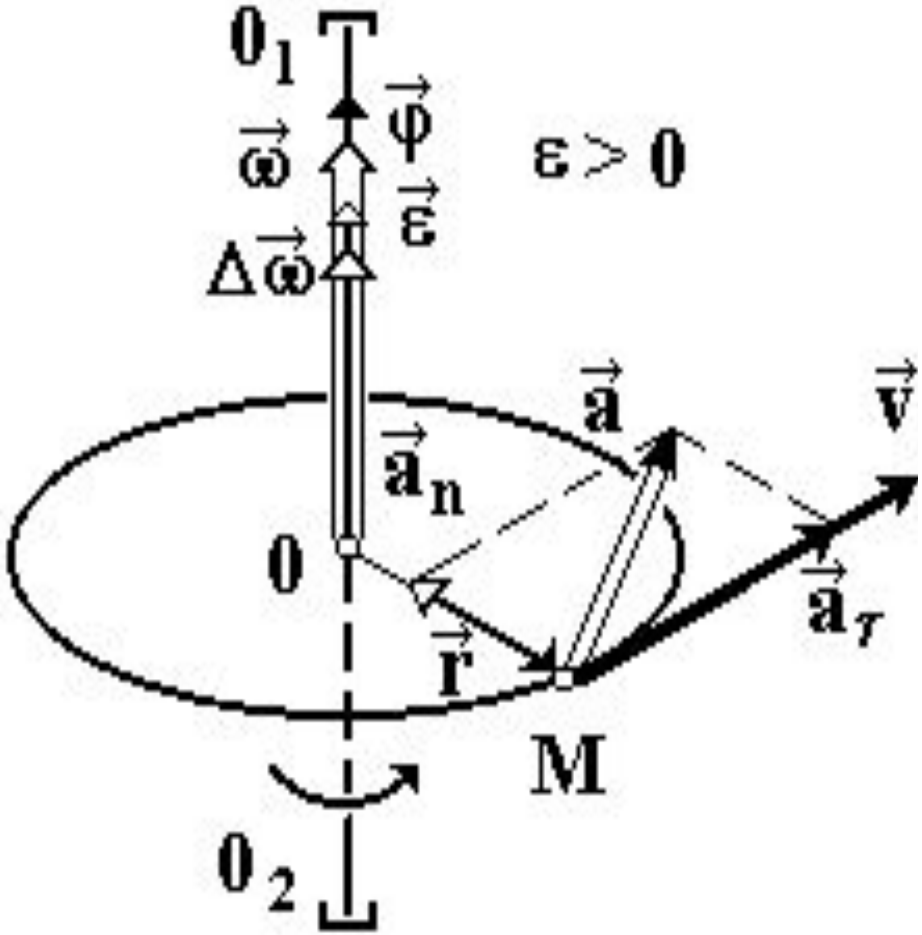
Вектор ω направляют вдоль оси вращения согласно правилу правого буравчика

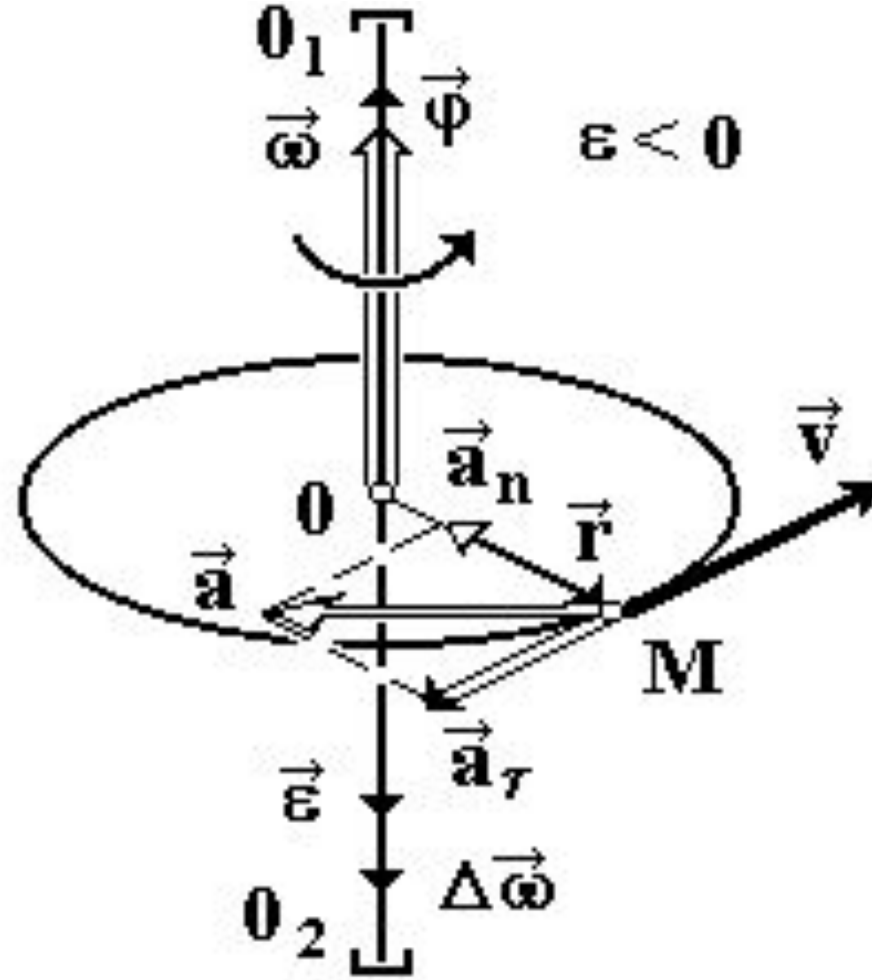
$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

143


$\vec{\omega}$
$\vec{v}$
$\vec{r}$

Вектора ω и ε направлены одинаково, если вращение ускоренное, вектора ω и ε направлены в разные стороны, если вращение замедленное.


0_1
$\vec{\varphi}$
$\vec{\omega}$
$\varepsilon > 0$
$\vec{\varepsilon}$
$\Delta\vec{\omega}$
$\vec{a}$
$\vec{v}$
$\vec{a}_n$
0
$\vec{a}_\tau$
$\vec{r}$
M
0_2


0_1
$\vec{\varphi}$
$\vec{\omega}$
$\varepsilon < 0$
$\vec{v}$
$\vec{a}_n$
0
$\vec{r}$
$\vec{a}$
M
$\vec{a}_\tau$
$\vec{\varepsilon}$
$\Delta\vec{\omega}$
0_2

Связь величин

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right] \quad \vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right] \quad S = \varphi \times r$$

Закон кинематики равнопеременного вращательного движения

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2}$$

Так же, для описания вращательного движения используют частоту (количество оборотов за 1 секунду) и период (время одного полного оборота)

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\nu}$$

143

Циклическая частота она же угловая скорость вращения – количество оборотов за 2π секунды

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остаётся параллельной самой себе.

Вращательное движение – все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

ЛЕКЦИЯ № 2

Динамика

ВОПРОСЫ

4. Динамика. Масса, инертность, сила. Первый закон Ньютона.
5. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Закон сохранения импульса (вывод). Центр масс (центр инерции). Закон движения центра инерции.
6. Реактивное движение. Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

Вопрос № 4.
Динамика.
Границы применимости классического способа описания движения частиц.
Масса, инертность, сила.
Фундаментальные силы.
Первый закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчёта.

143

Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами, которые обуславливают тот или иной характер движения. Основная задача Динамики по силе найти закон движения или по закону движения найти силу.

Состояние частиц

Абсолютно свободных тел нет. Состояние частицы (и, как следствие, описание её движения) зависит от системы отсчёта. Например, человек в поезде покоится относительно вагона и движется относительно перрона. Трудно отдать предпочтение той или иной системе отсчёта.

Законы Ньютоновой механики выполняются если (границы применимости):
1) Пространство Евклидово (т.е. описывается аксиомами евклидовой геометрии, также, трёхмерное);
2) Пространство изотропно;
3) Гелиоцентрическая система инерциальна (в центре системы солнце, которое движется без ускорения);

4) Закон всемирного тяготения выполняется для всей известной для нас вселенной;
5) Изменение всех полей со скоростью света;
6) Скорость тел много меньше скорости света ($v << c$);
7) Массы тел много больше масс элементарных частиц ($M >> m$).

Основные понятия
Масса – физическая величина, мера инертности.
Инертность – свойство тел сопротивляться при попытке изменить скорость.
Сила – физическая величина, мера взаимодействия тел.

В природе существуют четыре фундаментальные силы (все взаимодействия в природе сводятся к этим четырём силам):

1) Гравитационное взаимодействие (всемирное тяготение);

2) Электромагнитное взаимодействие (электрическое и магнитное поле);

3) Сильное или ядерное взаимодействие (связь частиц в атомном ядре);
4) Слабое взаимодействие (процессы распада элементарных частиц).

1-й закон Ньютона (закон инерции): Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Инерциальные системы отсчёта – системы отсчёта, в которых тела движутся без ускорения если на них не действуют силы со стороны других тел или в которых выполняется 1-й закон Ньютона.
1-й закон Ньютона нужен для определения инерциальных систем.

Вопрос № 5.
Второй закон Ньютона как уравнение движения.
Третий закон Ньютона.
Закон сохранения импульса (вывод).
Центр масс (центр инерции). Закон движения центра инерции.

Законы Ньютона получены в результате обобщения большого количества опытных фактов. Например, в результате взаимодействия (независимо от вида взаимодействия) два тела получают ускорения, такие, что выполняется равенство:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2$$

Если рассматривать через импульс тела – произведение массы тела на его скорость, то получим:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}=m\vec{a}$$

Скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе *F* – уравнение движения тела или основной закон динамики поступательного движения.
Он же 2-й закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

143

3-й закон Ньютона: Силы с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по модулю и противоположны по направлению и направлены вдоль линии, которая проходит через их центр масс:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

143

Закон сохранения импульса. Рассмотрим замкнутую систему из N тел. Запишем изменение импульса и действующие силы на тело для каждого тела:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_1^{\text{в}},$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2N} + \vec{F}_2^{\text{в}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_N}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots + \vec{F}_{N(N-1)} + \vec{F}_N^{\text{в}}.$$

Просуммируем все эти уравнения

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i\neq j}^{N}\vec{F}_{ij}+\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\text{в}}$$

Первая сумма справа равна нулю по 3-му закону Ньютона: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.
Втора сумма справа равна нулю так как на замкнутую или изолированную систему не действуют никакие силы (внешняя сила равна нулю $F^{в} = 0$).

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}\dot{\vec{p}}_i=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i=\mathrm{const}$$

Закон сохранения импульса:
В замкнутой изолированной системе полный импульс остаётся постоянным.

Центром масс или центром инерции системы называется такая воображаемая точка, радиус-вектор R которой выражается через радиус-векторы r_1, r_2, … материальных точек по формуле:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

143

Продифференцируем по времени, умножим на массу всей системы ($M = m_1 + m_2 + \ldots$):

$$MR = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots,$$

$$MV = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 + \ldots,$$

$$p = MV.$$

Отсюда, используя закон сохранения масс, получаем закон движения центра масс:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{\text{в}}$$

Таким образом, центр масс изменяет своё движение только под действием внешней силы. Внутренние силы на движение центра масс не влияют.

Примеры: движение снаряда; как до взрыва, так и после взрыва, центр масс движется по параболе, Земля и Луна вращающиеся вокруг общего центра масс, который расположен от центра Земли на расстоянии 4670 км, при радиусе Земли 6371 км.

6. Реактивное движение. Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

До сих пор рассматривали движение с постоянной массой. Рассмотрим движение с переменной массой – движение ракеты, которая движется за счёт отталкивания от газов, образовавшихся при сжигании топлива.

Такое движение принято называть реактивным. Но в широком смысле всякое движение есть реактивное движение, поскольку для придания импульса телу необходимо другое тело. Между телами происходит взаимодействие и они могут двигаться. Без взаимодействия заставить двигаться тело (или остановиться) невозможно.

Рассмотрим движение тела с переменной массой – движение ракеты.

Пусть $m(t)$ – масса ракеты в момент времени t, $\upsilon(t)$ – скорость ракеты в тот же момент, $\upsilon(t)m(t)$ – импульс ракеты.

За время dt масса и скорость получат приращения dm и dυ (d$m < 0$, d$\upsilon > 0$).

Новый импульс ракеты

$(m + dm) * (\upsilon + d\upsilon)$,

импульс движения газов

$dm_{газ} * \upsilon_{газ}$.

Изменение импульса за время dt равно приращению Fdt – импульса силы:

$$(m+\mathrm{d}m)*(\vec{\upsilon}+\mathrm{d}\vec{\upsilon})+\mathrm{d}m_{газ}*\vec{\upsilon}_{газ} - m\vec{\upsilon} = \vec{F}\mathrm{d}t.$$

С учётом того, что (dm*dυ)→0

$$m\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}\mathrm{d}m+ m\mathrm{d}\vec{\upsilon}+\mathrm{d}m_{газ}*\vec{\upsilon}_{газ} - m\vec{\upsilon} = \vec{F}\mathrm{d}t$$

Далее, изменение массы ракеты со знаком «–»:

$$-\,\mathrm{d}m = +\,\mathrm{d}m_{газ};$$

Меняем скорость истечения газа относительно неподвижной системы отсчёта (относительно Земли) на скорость газа относительно ракеты $\upsilon_{отн}$:

$$\vec{\upsilon}_{газ} - \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{отн}:$$

$$-\,\vec{\upsilon}_{отн}\mathrm{d}m + m\mathrm{d}\vec{\upsilon} = \vec{F}\mathrm{d}t.$$

Выполняем следующие преобразования:

$$m\mathrm{d}\upsilon = F\mathrm{d}t + \upsilon_{\text{отн}}\mathrm{d}m.$$

Делим на дифференциал времени dt и получаем уравнение Мещерского:

Запишем уравнение Мещерского – уравнение движения точки с переменной массой

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\vec{\upsilon}_{\text{отн}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\vec{F}^{\text{в}}$$

Здесь m – масса ракеты, υ – скорость ракеты, $\upsilon_{отн}$ – скорость истечения газов относительно ракеты, dm/dt – скорость сжигания топлива, $F^в$ – внешняя сила, $\upsilon_{отн}$ dm/dt – реактивная сила.

Рассмотрим движение ракеты в случае невесомости ($F^{в} = 0$). Начальная скорость ракеты равна нулю, направление газов и ракеты противоположное ($\upsilon \uparrow\downarrow \upsilon_{отн}$):

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = -\upsilon_{отн}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\upsilon = -\upsilon_{отн}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

Решение уравнения Мещерского с этими начальными условиями даёт решение – формулу Циолковского

$$\upsilon = \int \mathrm{d}\upsilon = -\upsilon_{\text{отн}} \int \frac{\mathrm{d}m}{m} = -\upsilon_{\text{отн}} \ln m + C$$

Константу C определяем из начальных условий:

$\upsilon = 0$ – начальная скорость;

m_0 – начальная масса.

$$C = \upsilon_{\text{отн}} \ln m_0.$$

Таким образом, получаем формулу Циолковского:

$$\upsilon = \upsilon_{\text{отн}} \ln \frac{m_0}{m}, \quad \frac{m_0}{m} = \exp \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{отн}}}.$$

ЛЕКЦИЯ № 3

Законы сохранения

143

ВОПРОСЫ

7. Динамика вращательного движения.
Момент импульса частицы.
Момент силы. Плечо силы.
Уравнение моментов.
Закон сохранения момента импульса.

8. Кинетическая энергия. Работа постоянной и переменной силы.
9. Потенциальная энергия. Условие потенциальности.
10. Закон сохранения механической энергии изолированной системы. Законы Кеплера.

Вопрос № 7.
Динамика вращательного движения.
Момент импульса частицы.
Момент силы. Плечо силы.
Уравнение моментов.
Закон сохранения момента
импульса.

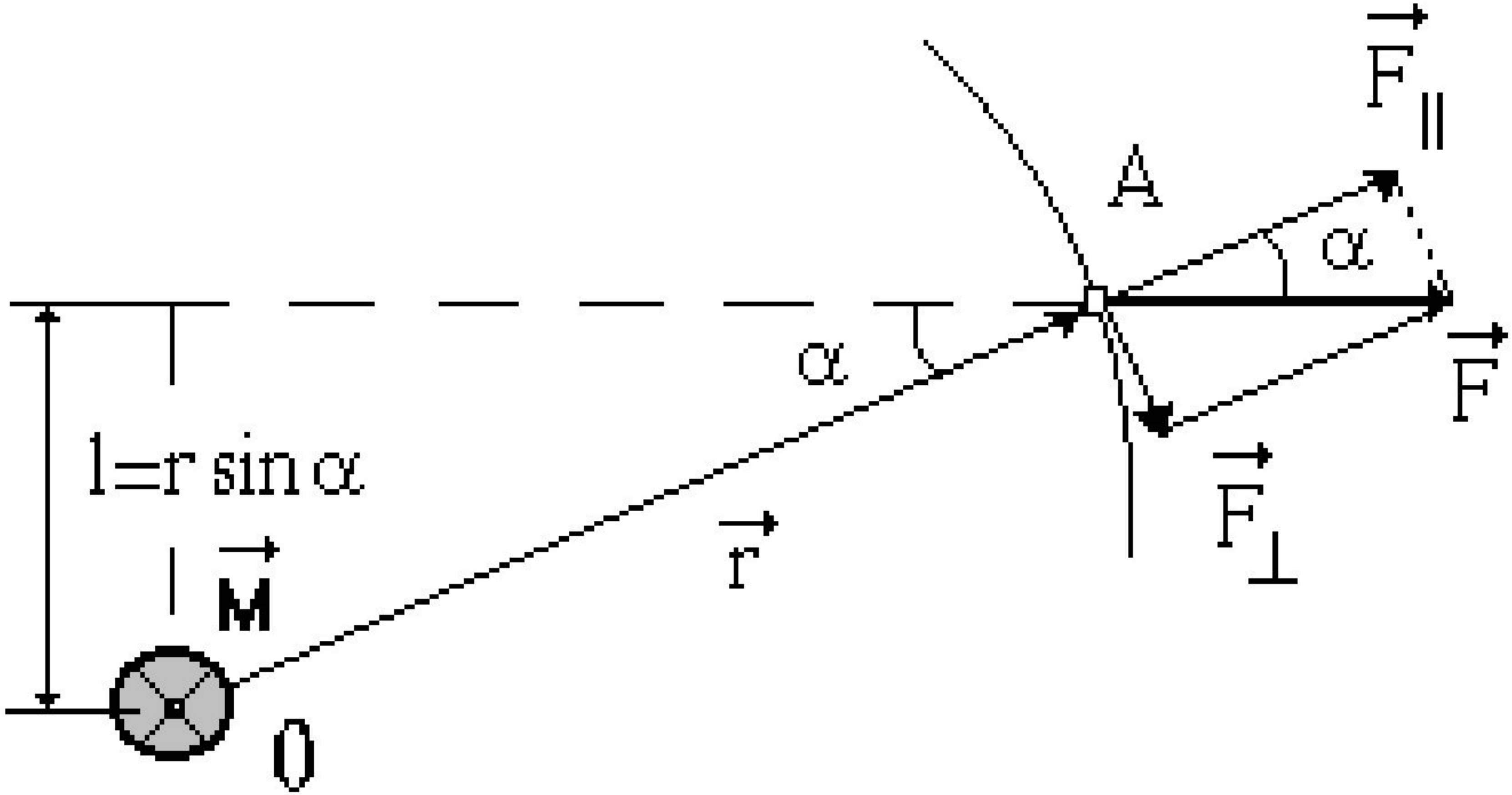
Вектором момента силы относительно полюса (точки *O*) называют векторное произведение радиус-вектора и вектора силы

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

$$\left|\vec{M}\right| = rF\sin\alpha = F * \ell$$

Величина $\ell = r * \sin\alpha$ называется плечом силы.

143



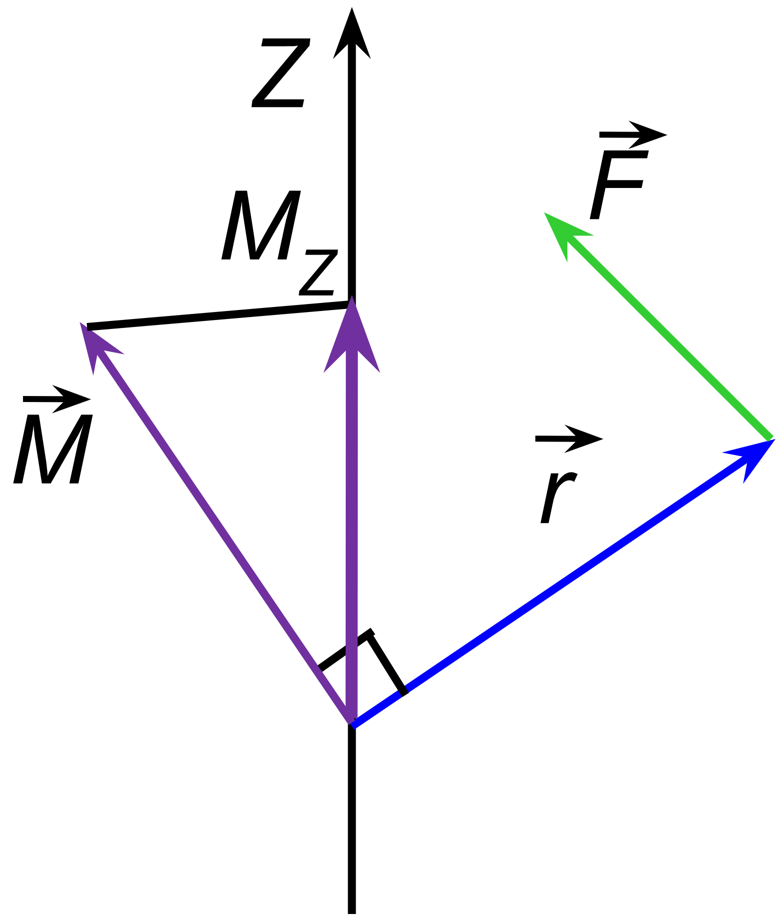
$\vec{F}_{\parallel}$
A
α
α
$\vec{F}$
$l = r \sin\alpha$
$\vec{F}_{\perp}$
$\vec{r}$
$\vec{M}$
0

143

Проекция вектора момента силы на произвольную ось, проходящую через полюс, равна проекции на эту ось векторного произведения радиус-вектора и вектора силы относительно полюса *O*, лежащего на этой оси:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]_z$$

143


Z
$\vec{F}$
M_Z
$\vec{M}$
$\vec{r}$

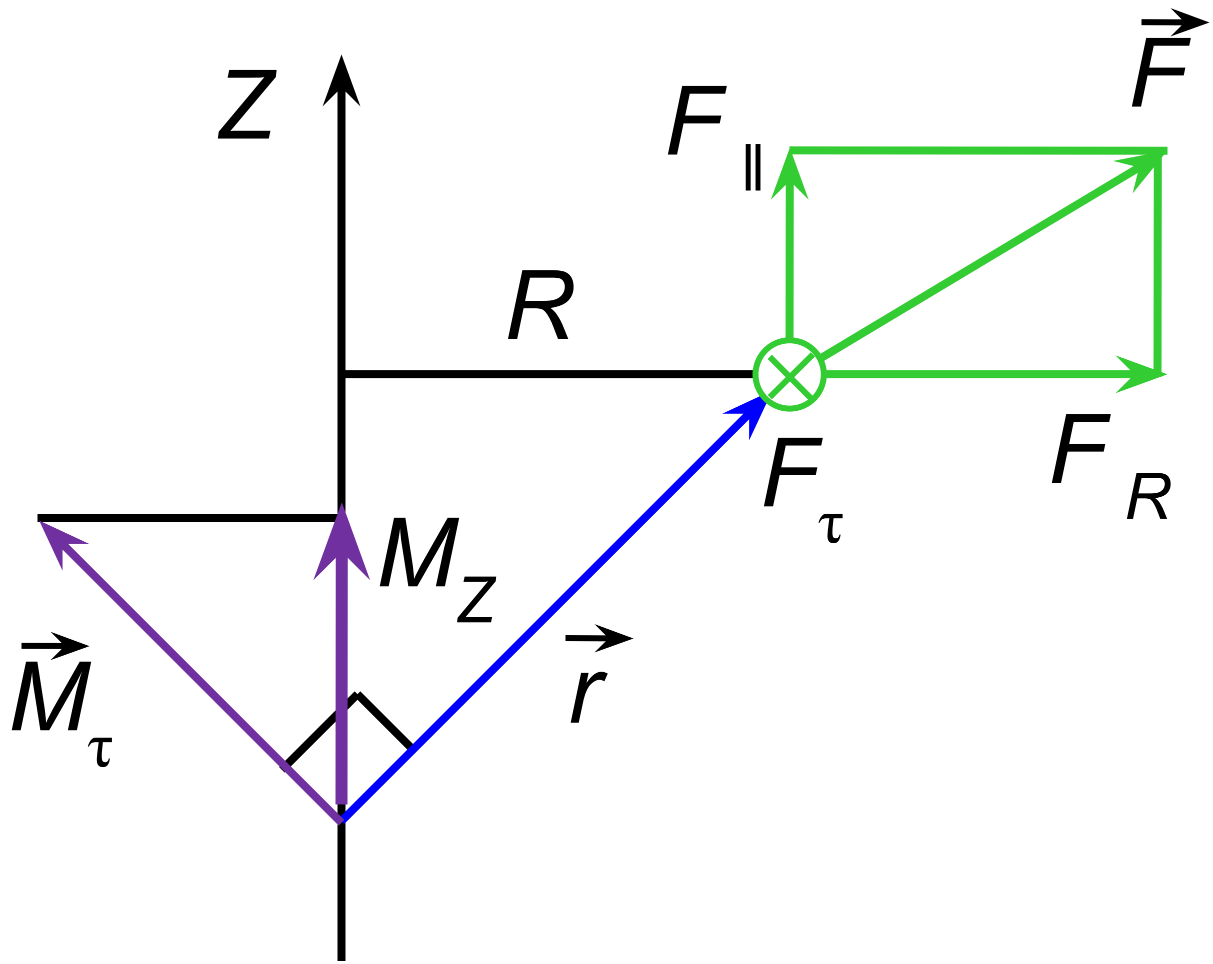
Рассмотрим вопрос следующим способом.

Разложим вектор силы F на три составляющие: F_τ, $F_\parallel$, F_R.

F_τ – сила перпендикулярная оси Z и плоскости рисунка;

$F_\parallel$ – сила параллельная оси Z, лежащая в плоскости рисунка;

F_R – сила перпендикулярная оси Z, лежащая в плоскости рисунк



143

Поскольку $F_{\parallel}$, F_R лежат в плоскости рисунка,

то $M_{\parallel}$, M_R $\perp$ плоскости рисунка, следовательно,

$(M_{\parallel})_z$, $(M_R)_z = 0$.

F_{τ} $\perp$ плоскости рисунка, следовательно, проекция M_{τ} на ось Z, не равна нулю ($(M_{\tau})_z = 0$).

То есть, $M_Z = (M_{\tau})_z = R \cdot F_{\tau}$.

Если на точку действует несколько сил, то можно говорить о равнодействующей силе – векторной сумме сил, действующих на тело

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Вектор момента результирующей силы относительно полюса *O* равен геометрической сумме векторов моментов составляющих сил относительно того же полюса.

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$$

Вектором момента импульса материальной точки относительно полюса *O* называют векторное произведение радиус-вектора и вектора импульса относительно этого же полюса

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times (m\vec{v})]$$

$$|\vec{L}| = |[\vec{r} \times \vec{p}]| = rp \sin \alpha$$

143

Проекция момента импульса твердого тела на произвольную ось, проходящую через полюс *O*, равна проекции на эту ось векторного произведения радиус-вектора и вектора импульса тела относительно того же полюса *O*, лежащего на этой оси, т. е.

$$\vec{L}_z = [\vec{r} \times \vec{p}]_z$$

Запишем момент импульса и продифференцируем его

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

$$\dot{\vec{L}} = [\vec{r} \times \dot{\vec{p}}] = [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$$

Получили новое выражение, которое называется уравнением моментов или основное уравнение динамики вращательного движения

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

Можно получить закон сохранения момента импульса (аналогично закону сохранения импульса).
В замкнутой системе (M = 0) суммарный момент импульса остаётся постоянным.

$$\vec{L} = \text{const}$$

Пространство однородно, следовательно, параллельный перенос системы из одного места в другое не изменяет свойств системы – закон сохранения импульса нарушаться не будет.

Пространство изотропно, следовательно, поворот замкнутой системы как целого не отражается на её механических свойствах – закон сохранения момента импульса нарушаться не будет.

Вопрос № 8.
Кинетическая энергия.
Работа постоянной и переменной силы.
Мощность.
1-я и 2-я космические скорости.

Запишем уравнение движения частицы и домножим на перемещение (dS = v dt):

$$m\dot{\vec{\upsilon}} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\upsilon}\mathrm{d}t\right) = \vec{F}_{\text{внеш}}\left(\mathrm{d}\vec{S}\right)$$

$$m\vec{\upsilon}\mathrm{d}\vec{\upsilon} = m\mathrm{d}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \vec{F}_{\text{внеш}}\mathrm{d}\vec{S}$$

143

Если система замкнута, то $F_{\text{внеш}} = 0$

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \text{const} = T$$

T – кинетическая энергия

$$T = \frac{m\vec{\upsilon}^{\,2}}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Если на частицу действует постоянная сила *F*, кинетическая энергия не остаётся постоянной. В этом случае кинетическая энергия за время d*t* изменяется на величину

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{S}$$

d*A* – работа, совершаемая силой *F* на пути d*S* (d*S* = *υ**d*t*). Работа равна изменению кинетической энергии:

$$A = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Пример: Вычислим работу, которую совершают внешние силы при сжатии пружины (работа переменной силы):

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} = \int_0^x kxdx = \left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^x = \frac{kx^2}{2}$$

здесь $F = kx$ – внешняя сила, равная силе упругости но противоположно направленная, k – коэффициент упругости, x – сжатие пружины.

Мощность – работа совершаемая в единицу времени

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{\upsilon}$$

Запишем закон всемирного тяготения и потенциальную энергию гравитационного взаимодействия

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad W = -G\frac{m_1 m_2}{R},$$

здесь G = 6,6720*10^{-11} Н*м^2/кг^2 гравитационная постоянная, m_1, m_2 – масса тел, R – расстояние между центрами масс тел.

1-я космическая скорость – скорость, с которой тело движется над поверхностью земли не падая

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = G\frac{M_{\text{Земли}}m}{R^2}, \quad \upsilon = \sqrt{G\frac{M_{\text{Земли}}}{R}} = \sqrt{gR}$$

Скорость тела, которое вращается вокруг Земли на некоторой высоте *h*

$$v = \sqrt{G\frac{M_{\text{Çåìëè}}}{R+h}}$$

Если тело получит достаточное количество энергии (кинетической), то эта энергия будет потрачена на преодоление потенциального барьера и тело покинет Землю навсегда. То есть, телу сообщили 2-ю космическую скорость

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = G\frac{M_{\text{Земли}}m}{R}, \quad \upsilon = \sqrt{2G\frac{M_{\text{Земли}}}{R}}$$

Вопрос № 9.
Консервативные силы.
Потенциальная энергия.
Связь силы и потенциальной энергии (условие потенциальности).

Взаимодействие между телами осуществляется посредством физических полей. Каждое тело создаёт вокруг себя особое состояние, называемое силовым полем.

Центральное поле – сила, действующая на любую точку в пространстве направлена к центру. Однородное поле: $\vec{F}$ = const. Стационарное поле – поле не меняется со временем. Нестационарное поле – поле меняется со временем.

Консервативные силы:
1) Это силы, работа которых не зависит от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое;
2) Это силы, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю.

Потенциальная энергия
Если работа зависит только от начального и конечного положений, то каждой точке поля можно сопоставить некоторую функцию $U(x, y, z)$. Величину U назовём потенциальной энергией.

Через эту функцию можно определить работу по перемещению частицы из 1-го положения во 2-е:

$$A_{12} = U_1 - U_2,$$

работа также приводит к изменению кинетической энергии:

$$A = T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow$$

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 = E -$$

полная механическая энергия.

Кинетическая энергия увеличивается за счёт убыли потенциальной.

Зная вид $U(x, y, z)$ можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{S} = F\mathrm{d}S\cos\alpha$$

угол α – угол между вектором силы и вектором перемещения.

В проекции на ось X:

$$\mathrm{d}A_x = F_x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}U_x$$

Если полагать, что изменений силы вдоль других осей нет или рассматривать одномерную задачу только вдоль одной оси *X* (d*y*, d*z* = 0; *y*, *z* = const), то можно говорить о частной производной:

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

143

Если учитывать все компоненты, то получим:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} =$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= -\nabla U = -\mathrm{grad} U$$

Здесь grad – это оператор набла или градиент – вектор, направленный в сторону максимального роста поля. Оператор набла – математический оператор – компоненты которого являются частными производными по координатам

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)$$

Условие потенциальности

Поля, которые можно описывать функцией П(x, y, z, t), называются потенциальными, градиент этой функции определяет силу в каждой точке поля:

F = gradП,

П – потенциал.

В случае стационарного поля, его силы будут консервативными $\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$.

Вопрос № 10.
Закон сохранения механической энергии изолированной системы и однородность времени.
Обобщённый закон сохранения энергии.
Финитное и инфинитное движение.
Законы Кеплера.

Закон сохранения энергии в механике

Полная механическая энергия замкнутой изолированной системы складывается из кинетической энергии частиц и потенциальной энергии взаимодействия частиц:

$$E = \sum_{i}^{N} T_i + \sum_{i \neq j}^{N} U_{ij} = \mathrm{const},$$

U_{ij} – энергия взаимодействия частиц.

Кинетическая энергия поступательного движения

$$\frac{m\upsilon^2}{2}$$

Кинетическая энергия вращательного движения

$$\frac{I\omega^2}{2}$$

Потенциальная энергия деформированной пружины

$$\frac{kx^2}{2}$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел

$$-G\frac{m_1 m_2}{R}$$

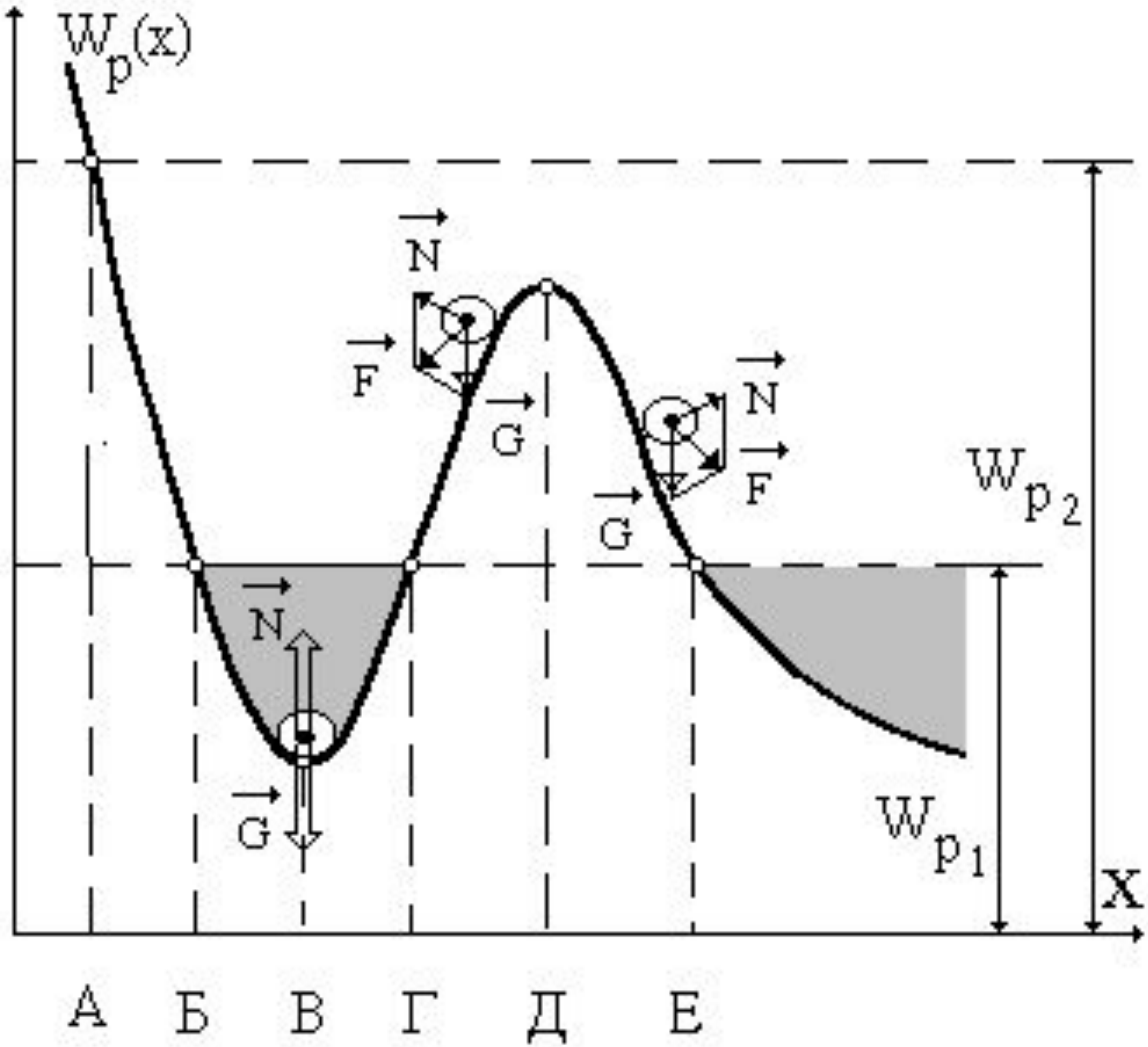
143

Если в системе есть силы приводящие к потери механической энергии (диссипативные), то полная механическая энергия уменьшается.

Общефизический закон сохранения энергии: энергия никогда не создаётся и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую.

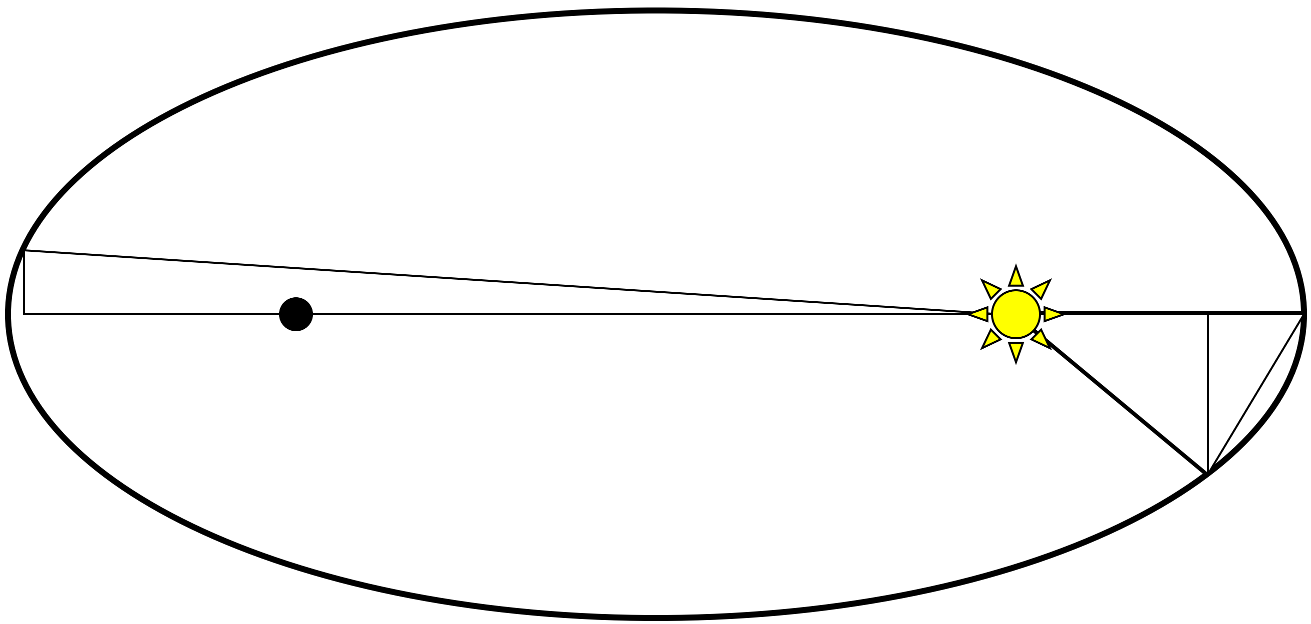
В основе сохранения энергии лежит однородность времени, т.е. равнозначность всех моментов времени. Следовательно, изменение одного момента времени на другой не изменяет свойств механической системы. Закон сохранения энергии выполняется в любой момент времени.

Движение частицы в потенциальном поле: Если полная энергия частицы меньше значения потенциального барьера, то частица может проникать только в ограниченную область пространства – такое движение называют финитным. Если частица может преодолеть потенциальный барьер, то движение будет инфинитным (неограниченным).



$W_p(x)$
$\vec{N}$
$\vec{F}$
$\vec{G}$
$\vec{N}$
$\vec{F}$
$\vec{G}$
W_{p_2}
$\vec{N}$
$\vec{G}$
W_{p_1}
X
А Б В Г Д Е

Законы Кеплера
1) Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого расположено Солнце.
2) Радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади.



143

3) Квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

На основе законов Кеплера Ньютон открыл закон всемирного тяготения

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

здесь G = 6,6720*10^{-11} Н*$м^2$/$кг^2$ гравитационная постоянная, m_1, m_2 – масса тел, R – расстояние между центрами масс тел.

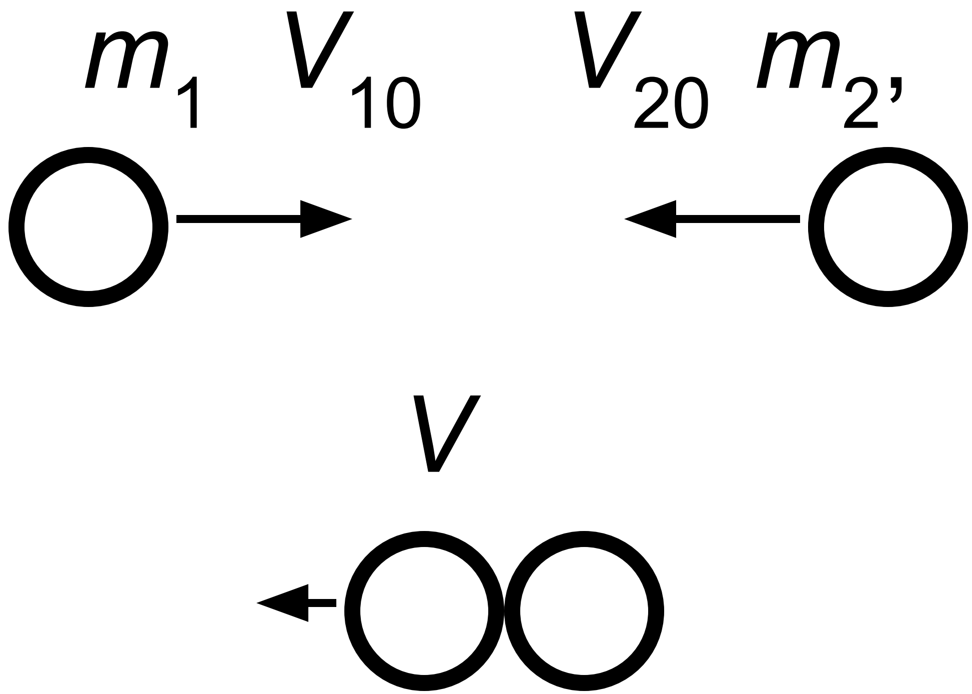
Абсолютно упругий удар – удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие виды энергии, тела после удара продолжают двигаться раздельно.
Абсолютно неупругий удар – удар, после которого тела движутся совместно с одинаковой скоростью, либо покоятся.

Закон сохранения импульса выполняется в обоих случаях. Закон сохранения энергии выполняется в случае абсолютно упругого удара. В случае абсолютно неупругого удара закон сохранения механической энергии не выполняется. Механическая энергия полностью или частично переходит в немеханические виды энергии.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух шаров массами m_1 и m_2. Удар будем считать центральным – скорости шаров направлены вдоль линии, которая проходит через их центры масс. Закон сохранения импульса будет выглядеть так

$$m_1\vec{V}_{10} + m_2\vec{V}_{20} = (m_1 + m_2)\vec{V}$$

V_{10}, V_{20}, V – скорость шаров до и после удара.

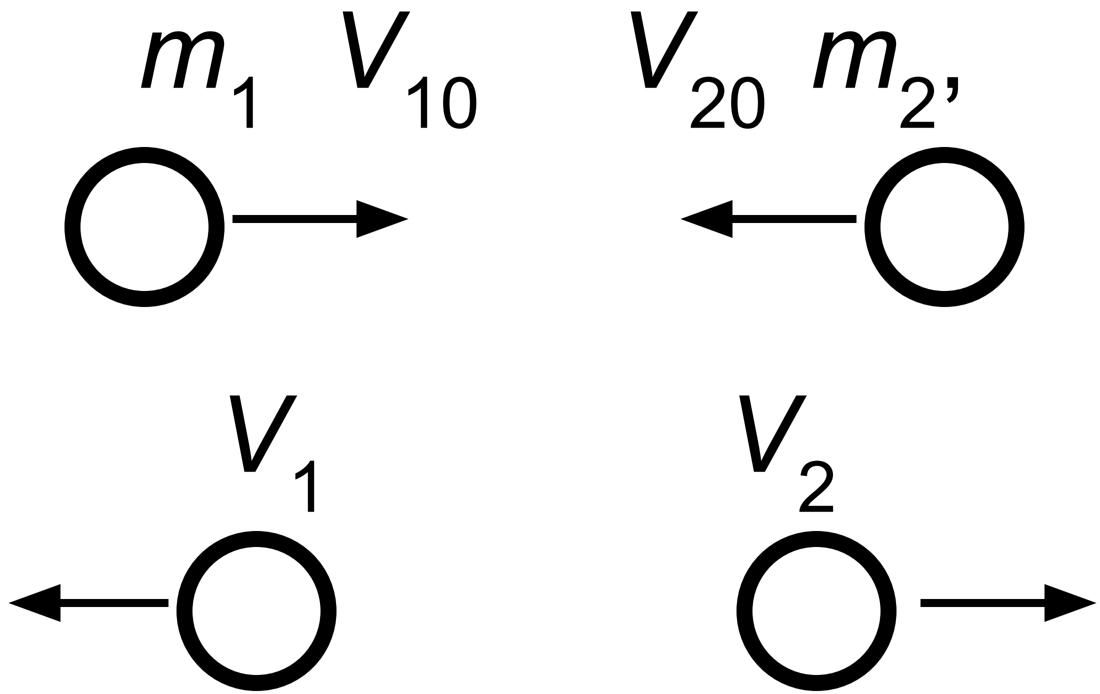


200

Рассмотрим абсолютно упругий центральный удар. В этом случае необходимо записать закон сохранения энергии и закон сохранения механической энергии

$$m_1\vec{V}_{10} + m_2\vec{V}_{20} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$$

$$\frac{m_1V_{10}^2}{2} + \frac{m_2V_{20}^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}$$


m_1
V_{10}
V_{20}
m_2’
V_1
V_2

Решив совместно эти уравнения получим выражения для скорости шаров после удара

$$\vec{V}_1 = -\vec{V}_{10} + 2\frac{m_1\vec{V}_{10} + m_2\vec{V}_{20}}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{V}_2 = -\vec{V}_{20} + 2\frac{m_1\vec{V}_{10} + m_2\vec{V}_{20}}{m_1 + m_2}.$$

Отметим, что если масса одно шара много больше второго, то его скорость изменяться практически не будет, скорость второго изменится значительно (первое уравнение для случая $m_1 << m_2$, второе для случая $m_1 >> m_2$)

$$\vec{V}_1 = -\vec{V}_{10} + 2\vec{V}_{20},$$

$$V_2 = -V_{20} + 2V_{10}.$$

Если при столкновении шаров один из них покоится и их массы равны, то ударяющий после удара будет покоиться, а другой продолжит движение со скоростью первого шара.

Если при столкновении шаров один из них покоится и их массы равны, а удар не центральный, то после удара шары будут двигаться так, что угол межу их векторами будет равен 90°.