ТЕМА: УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

Цвиль М.М.

Учебные вопросы:

1. Декартова система координат. Уравнение линии. Прямая на плоскости.

2. Кривые второго порядка.

Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные координатные оси с общим началом О в точке пересечения. Одну из осей назовем *осью абцисс (OX)*, другую – *осью ординат (OY)*. Это исходное построение называют *системой прямоугольных* или *декартовых координат* на плоскости.

Определение. Уравнением линии (кривой) на плоскости Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

В общем виде уравнение линии имеет вид: $F(x,y)=0$.

Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0 \quad , \quad A^2 + B^2 > 0 \qquad (1.1)$$

где *A, B, C* – вещественные числа (неравенство означает, что коэффициенты *A* и *B* не обращаются в нуль одновременно). Вектор $\bar{n} = (A; B)$ называется *вектором нормали* и перпендикулярен данной прямой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом представляет собой уравнение, разрешенное относительно *y*:

$$y = kx + b \tag{1.2}$$

Здесь *k* – угловой коэффициент прямой (тангенс угла, который прямая образует с положительным направление оси *OX*).

Уравнение прямой в отрезках записывается в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{1.3}$$

где *a* и *b* – соответствующие координаты точек пересечения прямой с осью *OX* (точка *A(a;0)*) и *OY* (точка *B(0;b)*).

Каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n},$$

а *параметрическое* –

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty), \qquad (1.4)$$

где $A(x_1, y_1)$- точка, лежащая на прямой, а $\bar{l} = (m; n)$ - *направляющий вектор* прямой.

Пример 1.1. Дана прямая $5y-3x-2=0$. Выписать ее вектор нормали, найти угловой коэффициент, построить прямую на плоскости.

Решение. Сравнивая уравнение данной прямой с (1.2), замечаем, что в нашем случае A=-3 (коэффициент при *x*), B=5 (коэффициент при *y*), поэтому $\overline{n}=(-3;5)$. Чтобы найти угловой коэффициент, исходное уравнение необходимо разрешить относительно *y:*

$$5y=3x+2 \quad ; \quad y=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5} . \qquad (1.5)$$

Сравнивая с уравнением (1.2), замечаем, что *k=3/5.* Как известно, для построения прямой необходимо знать координаты двух точек, через которые проходит прямая. Задавая значения *x*, из (1.5) можно найти соответствующие значения *y*: $x=0 \Rightarrow y=0+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$;

$x=1 \Rightarrow y=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$. Итак, остается провести прямую, проходящую через точки *A(0; 2/5), B(1; 1).*

Пример 1.2. Привести к уравнению в отрезках прямую, заданную общим уравнением

$$2y - 3x + 6 = 0 \qquad .$$

Решение. Проведем преобразования общего уравнения, чтобы привести его к виду (1.3).

.

$$2y - 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y = 6 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

Последнее уравнение и есть искомое уравнение в отрезках.

Угол φ между прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом ($y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$), определяется с помощью формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_2 k_1 + 1} \qquad (1.6)$$

Из (1.6) вытекают *условия параллельности* **(** $k_1 = k_2$) и *перпендикулярности двух прямых* ($k_1 k_2 = -1$).

Пример 1.3. Выбрать из прямых (I) – (V) параллельные и перпендикулярные, определить угол между прямыми (I) и (VI):

(I) $y-3x-2=0$

(II) $2x+6y=0$

(III) $3x-y=5$

(IV) $x-3y+3=0$

(V) $x+3y-7=0$

VI) $x+y=2$

Решение. Сначала для каждой прямой найдем угловой коэффициент:

(I) $y-3x-2=0 \Rightarrow y=3x+2 \Rightarrow k_1=3$

(II) $2x+6y=0 \Rightarrow 6y=-2x \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x \Rightarrow k_2=-\frac{1}{3}$

(III) $3x-y=5 \Rightarrow y=3x-5 \Rightarrow k_3=3$

(IV) $x-3y+3=0 \Rightarrow 3y=x+3 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+1 \Rightarrow k_4=\frac{1}{3}$

(V) $x+3y-7=0 \Rightarrow 3y=-x+7 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \Rightarrow k_5=-\frac{1}{3}$

(VI) $x+y=2 \Rightarrow y=-x+2 \Rightarrow k_6=-1$

Поскольку $k_1 = k_3$, $k_2 = k_5$, получаем, что прямые (I) и (III), (II) и (V) параллельны. С другой стороны,

$k_1 k_2 = -1$, а потому прямые (I) и (II) перпендикулярны (следовательно, перпендикулярны и прямые (III) и (II), (I) и (V), (III) и (V)). Чтобы найти тангенс угла между прямыми (I) и (VI), воспользуемся формулой (8):

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_6 - k_1}{k_6 k_1 + 1} = \frac{-1-3}{(-1)\cdot 3 + 1} = 2$$

Но тогда $\varphi = arctg 2$.

Составление уравнений прямых.

Рассмотрим основные типы возникающих задач.

1) *Записать уравнение прямой с известным угловым коэффициентом* k *, проходящей через заданную точку*

$A(x_1, y_1)$. Ответом является уравнение

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (1.7)$$

2) *Записать уравнение прямой, проходящей через заданную точку* $A(x_1, y_1)$ *параллельно прямой* $y = k_1 x + b$ Для решения используем уравнение (1.7) и учтем, что угловые коэффициенты параллельных прямых совпадают:

$$y - y_1 = k_1(x - x_1) \qquad (1.8)$$

3) *Записать уравнение прямой, проходящей через заданную точку* $A(x_1, y_1)$ *перпендикулярно прямой* $y = k_1 x + b$. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 k = -1$,

поэтому $k = -1/k_1$. Остается подставить это в (1.8) и получить уравнение:

$$y - y_1 = \frac{-1}{k_1}(x - x_1) \tag{1.9}$$

4) *Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки* $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, имеет вид

$$\frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B} \tag{1.10}$$

Пример 1.4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A(2,-3)* и образующей с положительным направлением оси *OX* угол 120^0.

Решение. Координаты точки известны, а угловой коэффициент - это тангенс угла наклона, т.е.

$k = \mathrm{tg}120^0 = -\sqrt{3}$. Подставляя в (1.7), получаем:

$$y - (-3) = -\sqrt{3}(x - 2)$$

или

$$y + \sqrt{3}x + (3 - 2\sqrt{3}) = 0$$

Пример1.5. Составить уравнения прямых, проходящих через точку *A(2,-3)* параллельно и перпендикулярно прямой

$2y + 4x - 5 = 0$.

Решение. Так как $y = \dfrac{-4x+5}{2} = -2x + \dfrac{5}{2}$, то угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -2$. Чтобы составить уравнение прямой, проходящей через *A(2,-3)* параллельно данной прямой, воспользуемся уравнением (1.8):

$y - (-3) = -2(x-2)$ или $y + 2x - 1 = 0$.

Аналогично действуем при составлении уравнения перпендикулярной прямой, только используем (1.9):

$y - (-3) = \dfrac{-1}{-2}(x-2)$, и окончательно $2y - x + 8 = 0$.

Проверка: $2 \cdot (-3) - 2 + 8 \equiv 0$

Пример 1.6. Написать уравнение прямой, проходящей через точки *A(3;3), B(-1;5)*.

Решение. Подставляя в (1.10) координаты данных точек, получаем:

$$\frac{y-5}{3-5}=\frac{x-(-1)}{3-(-1)}\Rightarrow\frac{y-5}{-2}=\frac{x+1}{4}\Rightarrow 2(y-5)=-(x+1)$$

Собирая теперь все в одну сторону, приходим к уравнению $2y+x-9=0$. Проверить результат можно, подставляя в него поочередно координаты точек (как при проверка в примере 6): $2\cdot 3+3-9\equiv 0$ $2\cdot 5+(-1)-9\equiv 0$.

Замечание. В некоторых задачах нужно найти точку пересечения заданных прямых. Для этого решают систему уравнений, задающих эти прямые.

Пример 1.7. В треугольнике с вершинами *O(0;0), A(3;3), B(-1;5)* найти уравнения стороны *AB,* медианы *AE* и высоты *OK,* а также длину высоты *OK*.

Решение. Уравнения стороны *AB* было получено при решении примера 6: $2y + x - 9 = 0$.Далее, по определению медианы треугольника точка *E* – середина отрезка *BO,* поэтому ее координаты можно найти по формуле (1.3):

$$x_E = \frac{x_B + x_O}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}, \quad y_E = \frac{y_B + y_O}{2} = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}.$$

Таким образом, теперь надо составить уравнение прямой, проходящей через точки *A(3;3)* и *E(-1/2;5/2).* Подставляем их координаты в (1.10):

$$\frac{y - 5/2}{3 - 5/2} = \frac{x - (-1/2)}{3 - (-1/2)} \Rightarrow \frac{2y-5}{1} = \frac{2x+1}{7}. \Rightarrow 14y - 35 = 2x + 1 \Rightarrow 7y - x - 18 = 0$$

Итак, уравнение медианы *AE* имеет вид $7y - x - 18 = 0$.

Далее, высота *OK* – это прямая, проходящая через вершину *O* перпендикулярно прямой *AB*. Воспользуемся уравнением (11). Угловой коэффициент прямой *AB* находим из уравнения : $2y + x - 9 = 0$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

, поэтому $k_1 = -1/2$. Тогда имеем:

$$y - 0 = \frac{-1}{-1/2}(x - 0)$$

, и уравнение высоты *OK* $y = 2x$.

Теперь найдем координаты *K* – точки пересечения построенной высоты и прямой *AB*. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y + x - 9 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 9 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9/5 \\ y = 18/5 \end{cases}$$

$$K\left(\frac{9}{5}; \frac{18}{5}\right).$$

Итак,

$$|OK| = \sqrt{\frac{9^2}{25} + \frac{18^2}{25}} = \sqrt{\frac{81 + 324}{25}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 5}{25}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

. В силу (2.1)

Кривые второго порядка

Определение 2.1. Всякая линия, которая в некоторой системе координат описывается уравнением второй степени относительно переменных x и y, называется **кривой второго порядка**.

В самом общем виде уравнение кривой второго порядка таково:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (2.1)$$

где *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* — действительные числа, причём *A*, *B*, *C* одновременно не равны нулю.

Рассмотрим, прежде всего, конкретные виды кривых второго порядка и уже затем вернемся к уравнению (2.1).

2.1. ЭЛЛИПС. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ

Определение 2.2. **Эллипсом** называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Для вывода уравнения эллипса введем систему координат: ось абсцисс проведем через фокусы F_1 и F_2, а ось ординат – перпендикулярно оси абсцисс через середину расстояния между ними. Обозначим через $2c$ – расстояние между фокусами.

Тогда (рис. 1) фокусы имеют координаты

$F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$. Пусть $M(x,y)$ –текущая точка эллипса.

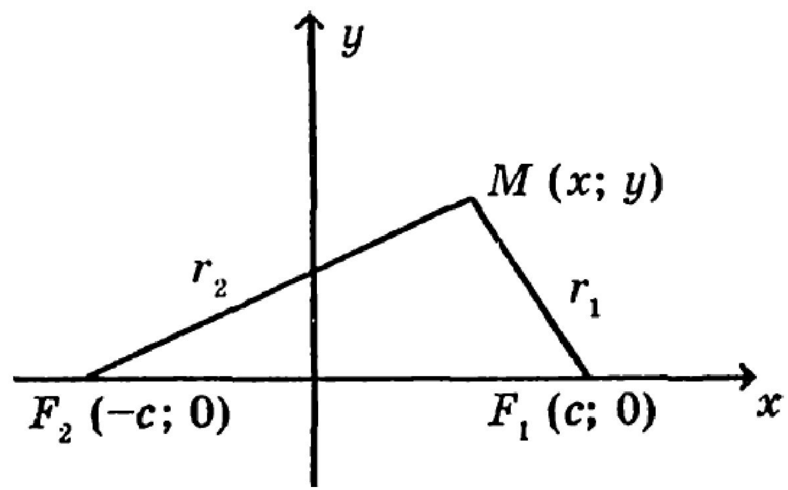


Рис. 1

Расстояние $r_1 = F_1M,\ r_2 = F_2M$ называются радиусами-векторами точки и вычисляются очень просто:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ ,\ r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (2.2)$$

Из определения эллипса следует, что

$$r_1 + r_2 = 2a \quad , \qquad (2.3)$$

а простой подсчет показывает, что

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx \qquad (2.4)$$

Разделив (2.4) на (2.3), имеем:

$$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x \; . \qquad (2.5)$$

Складываем и вычитаем (2.3) с (2.5). Результатом являются формулы, связывающие радиус-векторы текущей точки эллипса с ее абсциссой и заданными параметрами:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x \qquad (2.6)$$

Приравнивая r_2^2 в формулах (2.2) и (2.6), имеем:

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2 \qquad (2.7)$$

Из условия 2a > 2c (сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны) следует, что a > c, разность a^2-c^2 - положительна. Обозначив $b^2=a^2-c^2$, получаем из (2.7) :

$$\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2.$$

После деления обеих частей равенства на b^2, приходим к каноническому уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2.8)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ И ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЛИПСА.

1) Если точка (x; y) лежит на эллипсе , то точка (x; -y) тоже лежит на эллипсе. Это означает, что эллипс симметричен относительно оси абсцисс. Аналогично показывается, что эллипс симметричен и относительно оси ординат.

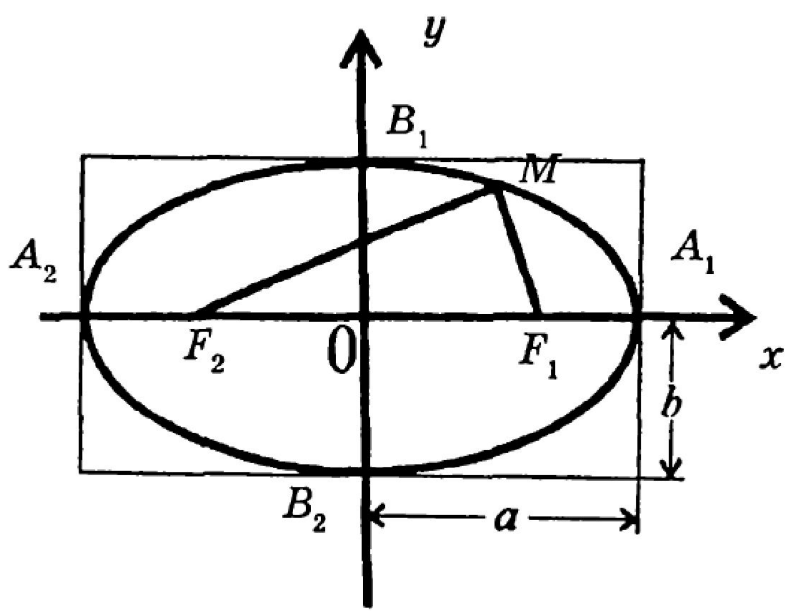
2) Находим точки пересечения эллипса с координатными осями: при y = 0 имеем $\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$. Значит, эллипс пересекает ось абсцисс в точках $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$. Эти точки называются вершинами эллипса. Если x = 0, то $\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b$, и мы отмечаем еще две вершины эллипса $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$.

3) Выражая из уравнения эллипса y явно через x, получаем $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Область определения этой функции $-a \le x \le a$, т. е. эллипс не выходит за пределы этой полосы. Рассуждая подобным образом, увидим, что эллипс не выходит и за пределы полосы $-b \le y \le b$. Значит, весь эллипс находится в прямоугольнике . $\begin{cases} -a \le x \le a \\ -b \le y \le b \end{cases}$

4) В первом квадранте $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Из этого равенства следует, что с увеличением x от 0 до *a*, y убывает от b до 0.

Механически эллипс можно построить таким образом: нить длиной 2а закрепить в фокусах и , в точку М поместить острие карандаша и, натянув нить, описать точкой М эллипс.

Полагая в каноническом уравнении эллипса $b=a$, получаем окружность радиуса a с центром в начале координат. Значит, окружность –частный случай эллипса.



Определение. Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к длине большой оси

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad .$$

Из равенства $b^2 = a^2 - c^2$ или $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ следуют два важных соотношения

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

которые показывают, что эксцентриситет эллипса характеризует степень сжатия (растяжения) эллипса вдоль оси Оу: чем меньше ε, тем больше отношение $\frac{b}{a}$ и, значит, эллипс более вытянут вдоль оси Оу; минимальное значение эксцентриситета ε=0 соответствует тому, что b=a, т. е. равенство нулю эксцентриситета отвечает случаю окружности. Формулы (2.6) позволяют установить связь радиусов-векторов текущей точки с эксцентриситетом:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x \quad \cdot \qquad (2.9)$$

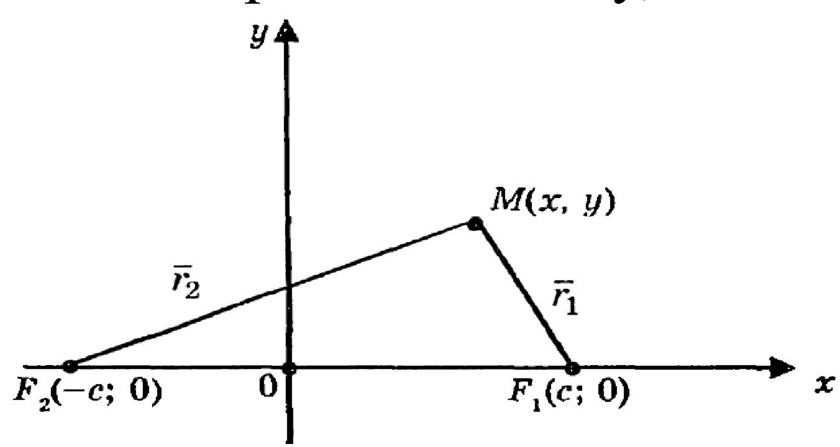
2.2. ГИПЕРБОЛА.

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

Систему координат выбираем, как и в предыдущем случае (при выводе уравнения эллипса). Фокусы имеют те же координаты: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, но теперь 2c>2a (длина любой их сторон треугольника больше разности длин двух других сторон) и обозначим величину $b^2 = c^2 - a^2$

Далее, для текущей точки гиперболы, расположенной справа от оси Оу, имеем (рис.3):



$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} r_2 - r_1 = 2a \\ r_2^2 - r_1^2 = 4cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 + r_1 = 2\dfrac{c}{a}x \\ r_2 - r_1 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{c}{a}x - a \\ r_2 = \dfrac{c}{a}x + a \end{cases}$$

И тогда $(x+c)^2 + y^2 = \left(\dfrac{c}{a}x + a\right)^2$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2$$

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.10)$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ГИПЕРБОЛЫ

1) Если точка (x; y) лежит на гиперболе, то на гиперболе лежат точки (-x; y)и (x; -y) и (-x; -y). Это значит, что обе координатные оси являются осями симметрии, а начало координат – центром симметрии гиперболы или просто ее центром. Ось абсцисс называется фокальной осью гиперболы (или действительной осью).

2) Находим точки пересечения гиперболы с осями координат. При y = 0 получаем $x = \pm a$. Точки $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ называются действительными вершинами гиперболы. Гипербола не имеет точек пересечения с осью Oy; тем не менее точки $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$ имеют большое значение для построения гиперболы. Их называют мнимыми вершинами гиперболы.

3) Выразим y явно через x: $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Эта функция определена когда $x \le -a$ и $x \ge a$. Это говорит о том, что гипербола имеет две ветви: левую и правую.

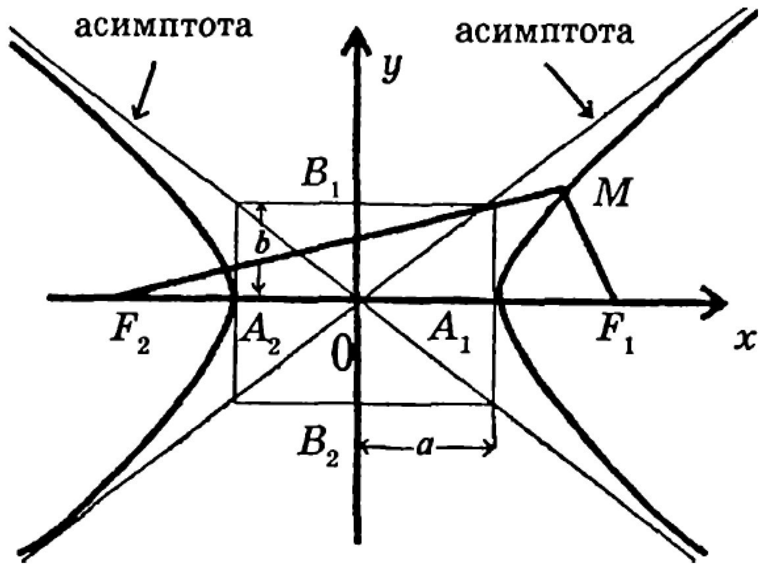
4) В первом квадранте $y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Когда $x \to +\infty$ то, $y \to +\infty$ возрастая.

5) Прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой гиперболы.

Из соображений симметрии следует, что прямая $y = -\frac{b}{a}x$ тоже является асимптотой гиперболы.

ПОСТРОЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

Прежде всего, построим асимптоты гиперболы. С этой целью изобразим прямоугольник со сторонами 2*a* и 2*b* (рис. 4).



Диагонали этого прямоугольника и есть асимптоты. Теперь в первом квадранте от вершины A_1 график гиперболы возрастая стремится к , приближаясь к асимптоте. В остальных квадрантах график гиперболы строится на основе симметрии.

Если $b=a$, гипербола называется равнобочной.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к длине действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Т. к. c > a, то ε>1 (в отличие от эксцентриситета эллипса).

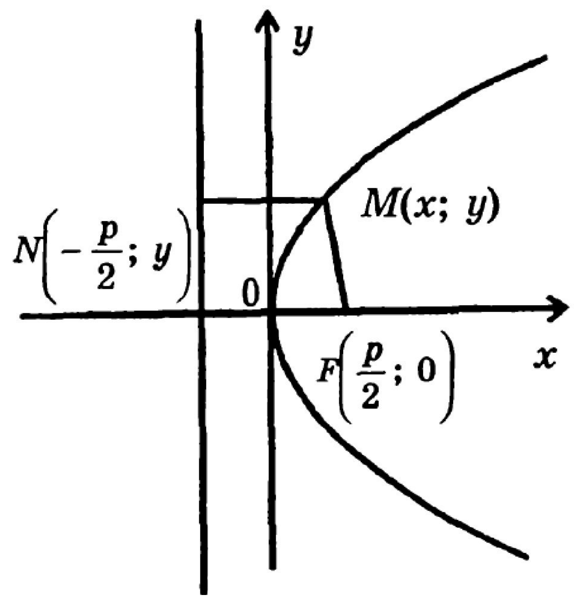
Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ следует, что

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ и } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

откуда ясно, что эксцентриситет характеризует степень сжатия (растяжения) гиперболы вдоль оси Оу

2.3. ПАРАБОЛА. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

Для составления уравнения параболы выбираем систему координат: ось абсцисс проводим через фокус перпендикулярно директрисе, ось ординат – перпендикулярно оси Ox через середину расстояния *p* между фокусом и директрисой (рис. 5).



Величина *p* называе… ы.

Пусть M(x; y) –текущая точка параболы, $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – ее фокус, $N\left(-\frac{p}{2};0\right)$ основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Тогда

$$\overline{FM}=\left(x-\frac{p}{2};y\right),\quad \overline{NM}=\left(x+\frac{p}{2};0\right)$$

По определению параболы $\left\|\overline{FM}\right\|=\left\|\overline{NM}\right\|$

т. е.

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Отсюда

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

т. е.

$$y^2=2px \quad , \qquad (2.11)$$

Это и есть каноническое уравнение параболы.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ И ПОСТРОЕНИЕ ПАРАБОЛЫ

1) Если точка (x; y) лежит на параболе, то точка (x; -y) тоже лежит на параболе. Значит, парабола симметрична относительно оси Ox, т. е. ось Ox – ось симметрии параболы.

2) O(0 ; 0) – единственная точка пересечения параболы с координатными осями. Эта точка называется вершиной параболы.

3) Выразив y явным образом через x, имеем:

$$y = \pm\sqrt{2px} \quad .$$

Учитывая, что p > 0, делаем вывод, что область определения параболы: x≥0. Это говорит о том, что парабола целиком расположена в правой полуплоскости.

4) Формула $y = +\sqrt{2px}$ (верхняя часть параболы) говорит о том, что с ростом x: от 0 до +∞ y тоже растет от 0 до +∞. Парабола имеет вид, изображенный на рис. 5.