

Компьютерная арифметика

1

§ 26. Особенности представления чисел в компьютере

Особенности представления чисел

Число в математике может состоять из любого количества цифр, которое требуется в решаемой задаче.

При хранении числа в памяти компьютера, число разрядов, отводимых для хранения каждого числа, ограничено и точность вычислений тоже ограничена.

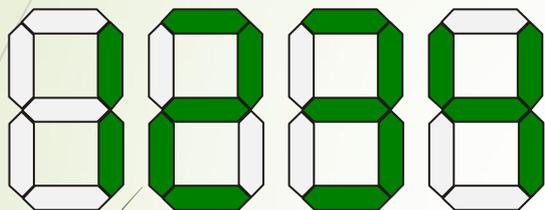
Например, можно ли число π указанной точностью записать в ПК?

```
3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944
5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647
0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559
6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360
0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953
0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724
8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737
```

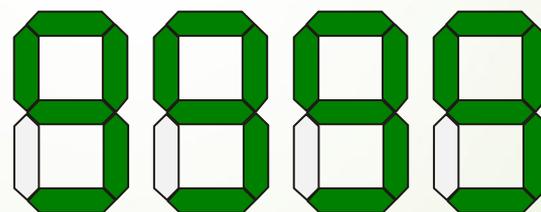
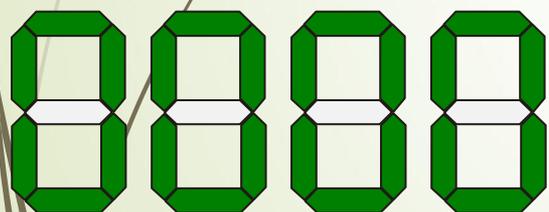
Предельные значения чисел

В математике *нет* предельных значений!

В компьютере – предельные значения ограничены количеством разрядов.

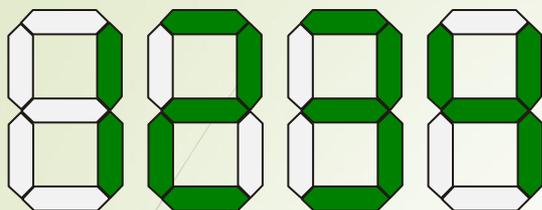


Какой диапазон?



~~10000?~~

Предельные значения чисел



K разрядов

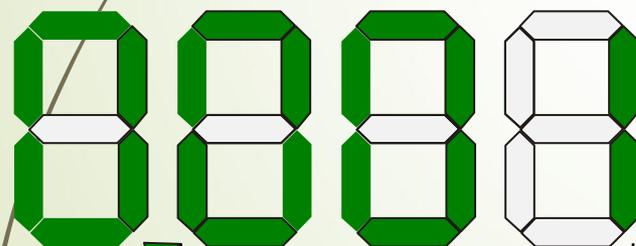
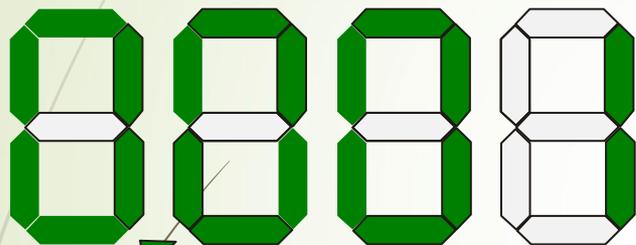
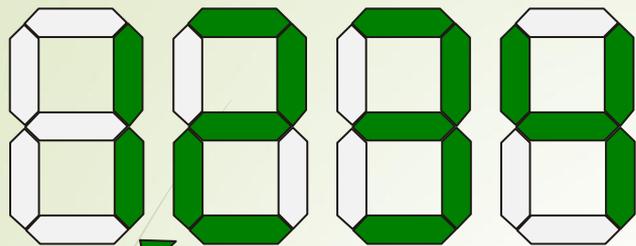
система счисления
с основанием B

$$C_{\max} = B^K - 1$$

Переполнение разрядной сетки — это ситуация, когда число, которое требуется сохранить, не помещается в имеющемся количестве разрядов вычислительного устройства.

Переполнение не связано с системой счисления, а вызвано ограниченным количеством разрядов устройства и не зависит от количества возможных значений в каждом из этих разрядов.

Вещественные числа

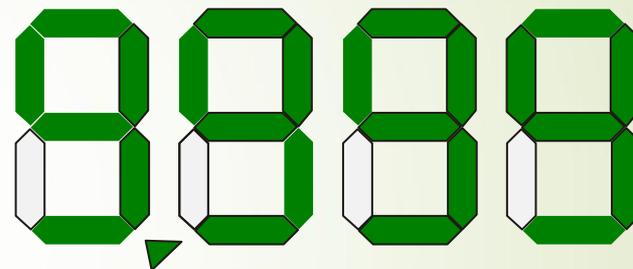


F разрядов в дробной части

Рассмотрим число с одним знаком в целой и тремя знаками в дробной части.



Какой диапазон?

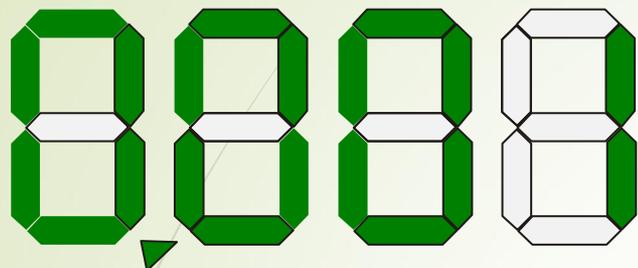


СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ С
ОСНОВАНИЕМ B

$$C_{\min} = B^{-F}$$

В данном случае число, имеющее более 3-х знаков после запятой, не может быть представлено **ТОЧНО**

Вещественные числа

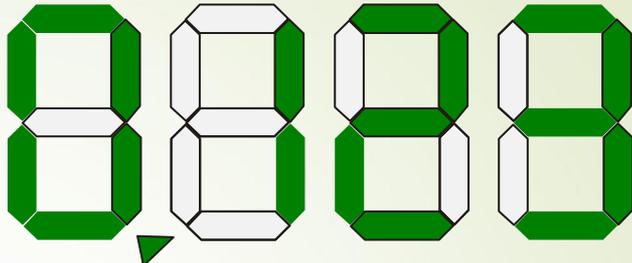


Минимальное
значение C_{\min}

Любое значение, которое меньше C_{\min} , **неотлично от нуля.**

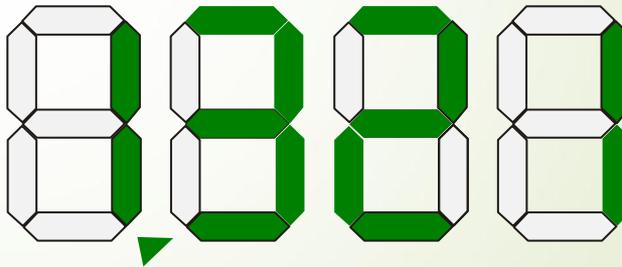
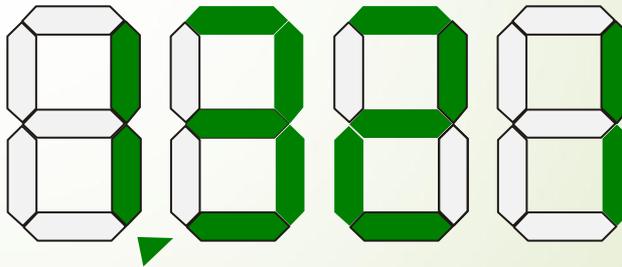
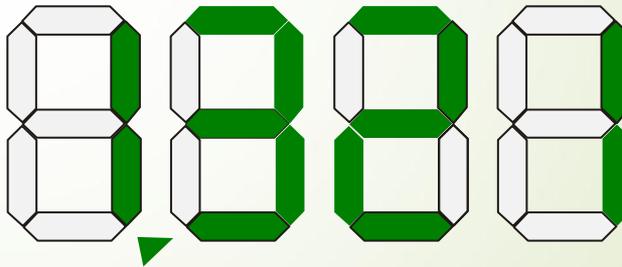
Такой эффект называется **антипереполнением.**

Неточность представления

0,1234567 → 



Не все вещественные числа могут быть представлены в компьютере точно!

1,3211 → 
1,3212 → 
1,3214 → 

Дополнительная погрешность при переводе дробных чисел из 10 в 2 систему счисления. Объясните почему?

Сравнение вещественных чисел

$$X = 10^6, Y = 10^{-6}$$

хранится неточно!

$$X \cdot Y \approx 1$$

неточный результат!



При сравнении вещественных чисел желательно избегать операции «равно»!

$$X \cdot Y \approx 1 \rightarrow |1 - X \cdot Y| \leq \varepsilon$$

$$X \approx Y \rightarrow |X - Y| \leq \varepsilon$$

допустимая погрешность (10^{-6})

Различие между вещественными и целыми числами

Операции с целыми числами, как правило, выполняются значительно быстрее, чем с вещественными. Не случайно в ядре современных процессоров реализованы только целочисленные арифметические действия, а для вещественной арифметики используется специализированный встроенный блок — *математический сопроцессор*.

Кроме того, использование целых типов данных позволяет экономить компьютерную память. Например, целые числа в диапазоне от 0 до 255 в языке Паскаль можно хранить в переменных типа *byte*, которые занимают всего один байт в памяти. В то же время самое «короткое» вещественное число (типа *single*) требует четырёх байтов памяти.

Операции деления нацело и нахождение целочисленного остатка применимо только для целых чисел.

Дискретность представления чисел

1. Целые числа дискретны.
2. Вещественные числа **непрерывны**.
3. Компьютер работает только с **дискретными** данными.



Для хранения вещественных чисел
нужна **дискретизация!**

4. При дискретизации может происходить **потеря информации** (искажение данных).
5. Большинство **трудностей** связано с кодированием вещественных чисел.
6. Целые и вещественные числа в компьютере хранятся и обрабатываются по-разному

Программное повышение точности

Современные модели процессоров Intel «умеют» обрабатывать 8-, 16-, 32- и 64-разрядные двоичные целые числа, а также (в математическом сопроцессоре) 32-, 64- и 80-разрядные вещественные числа. Для большинства практических задач такой разрядности вполне достаточно. Если для каких-либо особо точных расчетов требуется повысить разрядность вычислений, это можно сделать программно.

Домашнее задание

П. 26 выучить, письменно №2,3 стр 227

2. Вычислите максимальное целое положительное значение для 16- и 32-разрядных двоичных чисел.
3. Пользуясь калькулятором, вычислите границу антипереполнения для чисел с 16 двоичными разрядами в дробной части. Напишите два близких дробных числа, которые для полученного значения окажутся неразличимыми.