

# Комплексные числа

«Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием».

Г. Лейбниц



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

# Комплексные числа

1. Историческая открытия.

2. Основные понятия.

- а) Геометрическое изображение комплексных чисел
- б) Модуль и аргумент комплексного числа.
- в) Формы записи комплексных чисел.
- г) Алгоритм перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной.
- д) Переход от алгебраической формы комплексных чисел к тригонометрической и показательной без использования алгоритма.
- е) Переход от алгебраической формы комплексных чисел к тригонометрической и показательной с использованием алгоритма.

3. Практическое применение

- а) Применение в экономике
- б) Формула Кардано

# 1. Историческая справка

Впервые мнимые величины появились в работе Дж. Кардано «Великое искусство, или об алгебраических правилах» в 1545 году.

Пользу мнимых чисел при решении кубических уравнений впервые оценил итальянский ученый Р. Бомбелли (1572).

Символ  $i$  предложил российский ученый [Л. Эйлер](#) (1777, опубликовано 1794).

Задача о выражении степени  $n$  из комплексного числа была в основном решена в работах английских ученых [А. Муавра](#) (1707, 1724) и Р. Котеса (1722).

Термин «комплексное число» ввел французский ученый Л. Карно (1803).

В употребление термин вошел после работ [К. Гаусса](#) (1831).

Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе датского ученого К. Весселя (1799).

Геометрическое представление комплексных чисел называют иногда «диаграммой Аргана» в честь швейцарского ученого Ж. Аргана.

# Абрахам Муавр (Moivre)

(1667 – 1754)

- Абрахам Муавр – английский математик. Муавр нашел (1707) правила возведения в  $n$  – ю степень и извлечения корня  $n$  – й степени для комплексных чисел.



# Карл Фридрих Гаусс (Gauss)

(1777 – 1855)

- Карл Фридрих Гаусс – немецкий математик. Работы Гаусса оказали большое влияние на развитие теории чисел.



# Леонард Эйлер (Euler)

(1707 – 1783)

- **Леонард Эйлер -**  
математик, академик  
Петербургской  
академии наук. В его  
трудах многие  
математические  
формулы и символика  
впервые получают  
современный вид (ему  
принадлежат  
обозначения для  $e$ ,  $\pi$ ,  $i$ )



# Основные понятия

**Комплексным числом** называется выражение вида  $z=a+bi$ , где  $a$  и  $b$  действительные числа, а  $i$  – мнимая единица, определяемая равенством  $i^2=-1$ .

**Действительные числа:**  $z=a+0i=a$ ,  $z=\operatorname{Re} z$ .

**Мнимые числа:**  $z=0+bi=bi$ ,  $z=\operatorname{Im} z$ .

**Равные комплексные числа:**  $z_1=a+bi$ ,  $z_2=c+di$ ,  
 $z_1=z_2$ , если  $a=c$ ,  $b=d$ .

**Противоположные комплексные числа:**

$$z=a+bi,$$

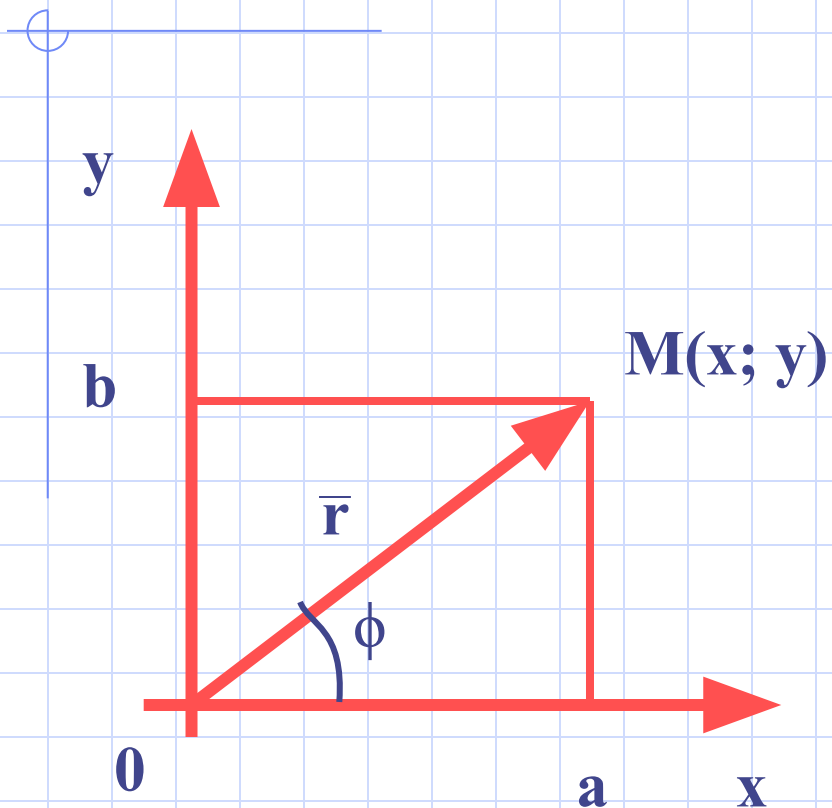
$$z=-a-bi.$$

**Сопряженные комплексные числа:**

$$z=a+bi,$$

$$z=a-bi.$$

# Геометрическая интерпретация комплексных чисел



Комплексные числа на плоскости изображаются в прямоугольной декартовой системе координат либо точкой  $M(a; b)$ , либо радиус – вектором этой точки  $\bar{r} = \overline{OM} = (a; b)$ .



# Модуль и аргумент комплексного числа

**Модуль  
комплексного  
числа**

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Аргумент  
комплексного  
числа**

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} z &= \phi + 2\pi n, \\ n &\in \mathbb{Z}, \\ \phi &= \operatorname{arctg} b/a, \\ -\pi &< \phi \leq \pi. \end{aligned}$$

# Алгоритм перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной

Найти модуль комплексного числа  $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Вычислить  $tg \varphi_0 = \left| \frac{b}{a} \right|$        $\varphi_0 = arctg \left| \frac{b}{a} \right|$

По знакам  $a$  и  $b$  определить четверть, в которой заканчивается искомый угол  $\varphi$

Найти аргумент комплексного числа, используя следующие равенства:

- первая четверть:  $\varphi = \varphi_0$
- вторая четверть:  $\varphi = \pi - \varphi_0$
- третья четверть:  $\varphi = \pi + \varphi_0$
- четвертая четверть:  $\varphi = 2\pi - \varphi_0$

Записать комплексное число в тригонометрической или показательной форме.

## 6. Формы записи комплексных чисел

- Алгебраическая

$$z = a + bi$$

- Тригонометрическая

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

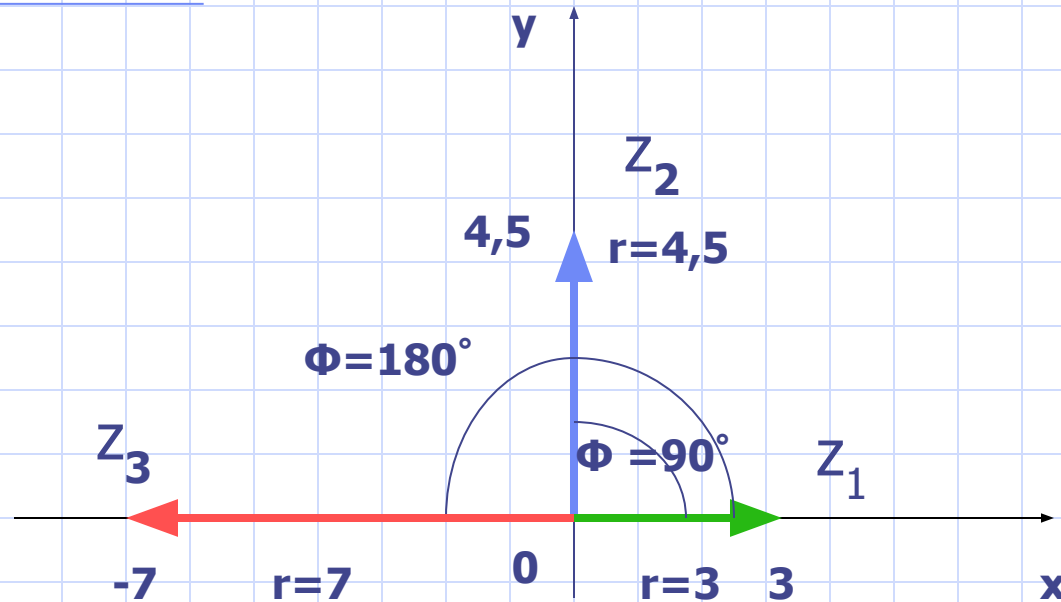
- Показательная

$$z = r e^{i\varphi},$$

$e^{i\varphi} = (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  – формула Эйлера



## 7. Переход от алгебраической формы комплексных чисел к тригонометрической и показательной без использования алгоритма



$$z_1 = 3 = 3 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 3 e^{i0^\circ}$$

$$z_2 = 4,5 = 4,5 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 4,5 e^{i90^\circ}$$

$$z_3 = -7 = 7 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 7 e^{i180^\circ}$$

# Переход от алгебраической формы комплексных чисел к тригонометрической и показательной с использованием алгоритма

$$Z = 2 + 2i,$$

$$a = 2, \quad b = 2,$$

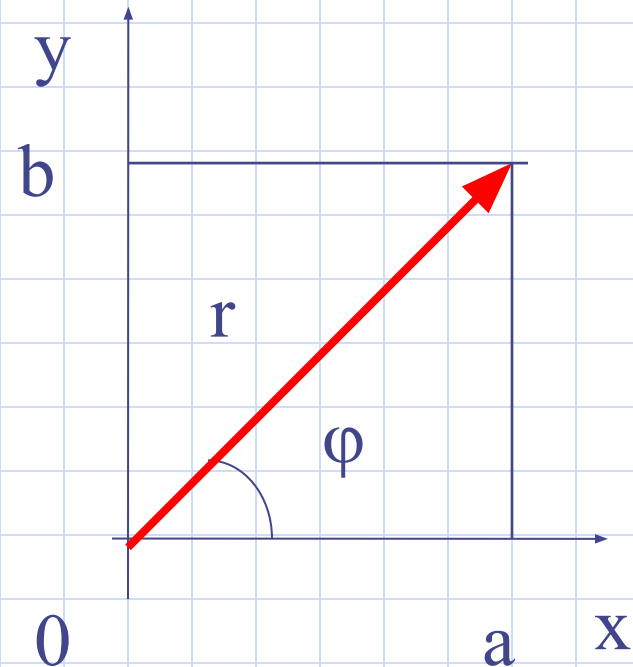
$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

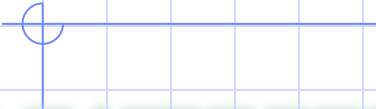
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \left| \frac{2}{2} \right| = 1,$$

$$\operatorname{arctg} \varphi_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$z = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}.$$





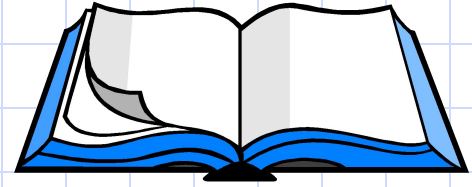
# Практическое применение

# Комплексные числа в ЭКОНОМИКЕ

- Сегодня сложно представить себе ряд наук без применения комплексных чисел. Теория электротехники, электромеханики, радиотехники, самолетостроения и других наук невозможна без применения моделей в виде комплексных чисел. Экономика, более сложная наука, до сих пор не знала применения комплексных чисел .....

- Товар является носителем двух составляющих: потребительских свойств, объективно присущих товару, и цены - денежной оценки потребительских свойств товара конкретным потребителем. С учетом того, что и потребительские свойства товара и его цена являются необходимыми показателями свойств товара, возникает потребность разработки и использования комплексного показателя, характеризующего эти две стороны одного объекта. Именно таким показателем может стать комплексное число, состоящее из действительной и мнимой частей





- Представив какую-либо оценку потребительских свойств товара  $\Pi$  как действительную часть комплексного числа, а его цену  $\mathcal{C}$  - как мнимую часть, получим:
- $T = \Pi + i\mathcal{C}, (1)$