Математика. 1 курс, 2 семестр

Лекция 1. Неопределённый интеграл, его свойства и методы вычисления

1. Неопределенный интеграл и его свойства

- ***Понятие первообразной и неопределенного интеграла***
- ***Свойства неопределенного интервала***
- ***Таблица основных интегралов***

2. Основные методы интегрирования

- ***Метод подведения под знак дифференциала***
- ***Метод замены переменной***
- ***Метод интегрирования по частям***

Глава 1. Неопределенный интеграл

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке этого промежутка

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на всей числовой оси, так как $(\sin x)' = \cos x$.

Теорема 1.1. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда функции $F(x)+C$ (C – произвольная постоянная) и только они являются первообразными для $f(x)$.

Доказательство. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F'(x)=f(x)$. Очевидно, что функции $F(x)+C$ также будут являться первообразными для $f(x)$, так как

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x).$$

Покажем, что функциями вида $F(x)+C$ исчерпываются все первообразные для функции $f(x)$. Действительно, пусть $F(x), \Phi(x))$ – две первообразные для $f(x)$. Тогда $F'(x)=f(x)$, $\Phi'(x)=f(x)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=\Phi(x)-F(x)$. Для нее имеем: $g'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Следовательно, по следствию из теоремы Лагранжа, функция $g(x)$ – постоянна, то есть $g(x)=C$. Поэтому $\Phi(x)-F(x)=g(x)=C$ или $\Phi(x)=F(x)+C$. Итак, все первообразные функции $f(x)$ имеют вид $F(x)+C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

Множество всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** этой функции и обозначается $\int f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C}\,, \tag{1.2}$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, выражение $f(x)\,dx$ называется подынтегральным выражением, переменная x называется переменной интегрирования, число C – постоянной интегрирования.

Так как $F'(x)=f(x)$, то для того чтобы проверить, правильно ли вычислен интеграл, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Например, 1) $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ при $\alpha \neq -1$, так как $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$;

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$, так как $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$;

действительно, при $x > 0$ имеем $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; при $x < 0$ имеем $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$.

1.2. Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)\,.$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx\,.$$

3. Неопределенный интеграл от производной равен самой функции плюс произвольная константа

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C \quad \text{или} \quad \int d\,f(x) = f(x) + C\,.$$

4. Постоянный множитель k можно выносить за знак неопределенного интеграла

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \qquad (k \neq 0)\,.$$

5. Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,.$$

Это свойство справедливо также для любого конечного числа слагаемых.

6. Свойство инвариантности: вид формулы интегрирования останется неизменным (инвариантным), если независимую переменную x заменить любой дифференцируемой функцией $u(x)$, то есть

$$\text{если } \int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(u)\,du = F(u) + C .$$

Проверим эти свойства.

1-е свойство следует из определений неопределенного интеграла и первообразной:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x) .$$

2-е свойство следует из предыдущего свойства, так как дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал аргумента.

Самостоятельно проверьте 3-е, 4-е и 5-е свойства дифференцированием результата и получением при этом подынтегральной функции.

6-е свойство следует из того, что если $F(x)$– первообразная для $f(x)$, то $d\,F(x) = F'(x)dx = f(x)dx$. Тогда по свойству инвариантности первого дифференциала $d\,F(u) = f(u)\,du$ и $\int f(u)\,du = \int dF(u) = F(u) + C$.

Рассмотрим несколько примеров на применение этих свойств.

Выше было показано, что $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$. Тогда $\int x^3\,dx = \dfrac{x^4}{4} + C$ и по свойству инвариантности $\int \sin^3 x\, d(\sin x) = \dfrac{\sin^4 x}{4} + C$.

$$\int \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}\,dx = \int (2x^4 - x^{-1/2})\,dx = 2\int x^4 dx - \int x^{-1/2} dx == 2\left(\frac{x^5}{5} + C_1\right) - \left(\frac{x^{1/2}}{1/2} + C_2\right) = \frac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C.$$

Здесь $C = 2C_1 - C_2$. В дальнейшем, когда будет встречаться сумма интегралов, будем сразу писать одну произвольную постоянную.

Задача интегрирования принципиально труднее задачи дифференцирования. В дифференциальном исчислении существуют правила дифференцирования суммы, произведения, частного, сложных и обратных функций. В интегральном исчислении правил для интегрирования произведения, частного, сложной и обратной функции нет. Имеются лишь отдельные приемы, позволяющие интегрировать некоторые классы функций. Они будут рассмотрены далее. Но сначала приведем таблицу так называемых основных интегралов.

1.3. Таблица основных интегралов

1. $\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1); \qquad \int du = u + C$.

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.

3. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C, \quad (a>0, \quad a\neq 1), \quad \int e^{u}\,du = e^{u}$

4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$.

5. $\int \cos u\,du = \sin u + C$.

6. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$.

7. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$.

8. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\dfrac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u\right| + C$.

9. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{u}{2}\right)\right| + C = \ln\left|\dfrac{1}{\cos u} - \operatorname{tg} u\right| + C$.

10. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C, \quad (a \neq 0)$.

11. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C, \quad (a \neq 0)$.

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C, \quad (a \neq 0)$.

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

Эти формулы нетрудно проверить дифференцированием, т.е. установить, что производная результата интегрирования равна подынтегральной функции. Проверим, например, справедливость формулы (10):

$$\left(\frac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\,\frac{u}{a}\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{u^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+u^2} = \frac{1}{a^2+u^2}.$$

Пример 1.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{5}} + C$ (формула (10), п. 1.3).

Пример 1.2. $\displaystyle\int (7\cos x - 2\sin x)\,dx = 7\int \cos x dx - 2\int \sin x dx = = 7\sin x + 2\cos x + C$.

Пример 1.3. $\displaystyle\int \frac{dt}{9-t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-9} = -\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{18}\ln\left|\frac{t+3}{t-3}\right| + C$ (формула (11), п. 1.3).

Пример 1.4. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = -\mathrm{ctg}\,x - \mathrm{tg}\,x + C$.

2. Основные методы интегрирования

2.1. Метод подведения под знак дифференциала

Этот метод применяется для вычисления интегралов вида $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx$. Воспользуемся тем, что $\varphi'(x)\,dx = d\,\varphi(x)$. При этом говорят, что мы подвели функцию $\varphi(x)$ под знак дифференциала. Если еще сделать замену $u = \varphi(x)$, то мы получим интеграл более простой, чем первоначальный:

$$\boxed{\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx = \int f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x) = \int f(u)\,du}\ . \qquad (2.1)$$

После нахождения интеграла надо вернуться к переменной x, заменив u на $\varphi(x)$.

Отметим, что при подведении функции под знак дифференциала прежде всего используется определение дифференциала

$$\boxed{\varphi'(x)\,dx = d\,\varphi(x)} \qquad (2.2)$$

и два его свойства

$$\boxed{d\,\varphi\,(x) = d\,(\varphi\,(x) + C)}\,, \qquad (2.3)$$

$$\boxed{d\,\varphi\,(x) = \frac{1}{\lambda}\,d\,(\lambda\,\varphi\,(x))} \quad \left(\lambda \neq 0\right)\,. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим, как подвести под знак дифференциала некоторые функции:

$$x^{\alpha}\,dx = \frac{\left(x^{\alpha+1}\right)'}{\alpha+1}\,dx = \frac{d\,x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ (\alpha \neq -1)\,, \qquad \frac{dx}{x} = (\ln x)'\,dx = d\,(\ln x)\,,$$

$$\sin x\,dx = -(\cos x)'\,dx = -\,d\,(\cos x)\,, \qquad \cos x\,dx = (\sin x)'\,dx = d\,(\sin x)\,,$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = (\operatorname{tg} x)'\,dx = d\,(\operatorname{tg} x)\,, \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = -(\operatorname{ctg} x)'\,dx = -\,d\,(\operatorname{ctg} x)\,,$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = \left(\operatorname{arctg} x\right)'\,dx = d\left(\operatorname{arctg} x\right), \qquad e^x\,dx = (e^x)'\,dx = d\,(e^x)\,.$$

Пример 2.1.

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^5} = \int \frac{\frac{1}{3}d\,(3x-1)}{(3x-1)^5} = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{-5} d\,(3x-1) = \frac{1}{3}\int u^{-5}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{(3x-1)^{-4}}{-12} + C.$$

Мы использовали свойства дифференциалов $dx = \frac{1}{3}d\,(3x) = \frac{1}{3}d(3x-1)$ и формулу (1), п. 1.3.

Пример 2.2. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2\ln x + 3}}$.

Воспользуемся правилом подведения под знак дифференциала

$$\frac{dx}{x} = d\,(\ln x) = \frac{1}{2}d\,(2\ln x) = \frac{1}{2}d\,(2\ln x + 3)$$

и введем новую переменную $u = 2\ln x + 3$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2\ln x + 3}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(2\ln x + 3)}{\sqrt{2\ln x + 3}} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2\ln x + 3} + C.$$

В дальнейшем, когда появится навык, можно вводить новую переменную u "мысленно".

Пример 2.3. Найти интеграл $I = \int e^{3\sin x} \cos x \, dx$.

Воспользуемся правилом подведения под знак дифференциала

$$\cos x \, dx = (\sin x)' \, dx = d\,(\sin x) = \frac{1}{3} d\left(3\sin x\right).$$

Тогда $I = \int e^{3\sin x} \cos x \, dx = \frac{1}{3}\int e^{3\sin x} d(3\sin x) = \frac{1}{3} e^{3\sin x} + C$. Здесь мы "мысленно" ввели переменную $u = 3\sin x$ и воспользовались формулой (3), п. 1.3.

Пример 2.4. Найти интеграл $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

Воспользуемся тем, что $x^2\,dx = \frac{d\,x^3}{3}$, $\quad x^6 = \left(x^3\right)^2$, и формулой (12), п. 1.3:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\,x^3}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \sqrt{2x+7}\,dx$. 2. $\int \sin(7x-3)dx$. 3. $\int \frac{x+5x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$. 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$. 5. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$. 7. $\int \frac{dx}{x\ln x}$. 8. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$. 9. $\int e^{-x^3}x^2dx$. 10. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Ответы. 1. $\frac{1}{3}(2x+7)^{3/2}+C$. 2. $-\frac{1}{7}\cos(7x-3)+C$. 3. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{1+x^4}\right|+\frac{5}{2}\sqrt{1+x^4}+C$.

4. $\frac{1}{5}\arcsin 5x+C$. 5. $3\sqrt[3]{\sin x}+C$. 6. $2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+C$. 7. $\ln|\ln x|+C$.

8. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$. 9. $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$. 10. $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$.

2.2. Метод замены переменной

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести данный интеграл к более простому. Такой метод называется методом замены переменной или методом подстановки.

Пусть функция $u=\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке и имеет обратную функцию $x=\psi(u)$. Тогда

$$\boxed{\int f(u)\,du=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\,\Big|_{x=\psi(u)}}\,. \tag{2.5}$$

Выражение, стоящее в правой части этой формулы, означает, что после отыскания интеграла в равенстве (2.5) вместо x нужно подставить его выражение через u.

При замене переменной в интеграле $\int f(u)\,du$ нужно

а) заменить переменную u на функцию $\varphi(x)$, заменить du на $\varphi'(x)\,dx$,

б) вычислить получившийся интеграл,

в) результат выразить через первоначальную переменную u.

Укажем некоторые рекомендации по выбору новой переменной. Пусть $R(u,v)$ − рациональная функция, полученная из u,v с помощью сложения, вычитания, умножения, деления. Рекомендации по выбору новой переменной приведены в следующей таблице.

Тип интеграла	Замена
$I_1 = \int R\left(u, \sqrt{a^2 - u^2}\right)du$	$u = a \cdot \sin x$
$I_2 = \int R\left(u, \sqrt{a^2 + u^2}\right)du$	$u = a \cdot \operatorname{tg} x$
$I_3 = \int R\left(u, \sqrt{u^2 - a^2}\right)du$	$u = \dfrac{a}{\sin x}$
$I_4 = \int R\left(u, \sqrt[n]{au+b}, \sqrt[m]{au+b}\right)du$	$au + b = x^k$, k - *наименьшее общее кратное чисел* m,n

Пример 2.6. Найти $\int \frac{\sqrt{9-u^2}}{u^2}\,du$. Это − интеграл типа I_1.

В соответствии с рекомендацией сделаем замену $u = 3\sin x$. Тогда

$$du = (3\sin x)'\,dx = 3\cos x\,dx, \qquad \sqrt{9-u^2} = \sqrt{9-9\sin^2 x} = 3\cos x.$$

Подставляя выражения для u, du, $\sqrt{9-u^2}$ в интеграл, получим:

$$\int \frac{\sqrt{9-u^2}}{u^2}\,du = \int \frac{3\cos x \cdot 3\cos x\,dx}{9\sin^2 x} = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C/$$

Получившийся результат надо выразить через первоначальную переменную u.
Учитывая, что $u = 3\sin x$, получим

$$\sin x = \frac{u}{3}, \quad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{u^2}{9}} = \frac{\sqrt{9-u^2}}{3}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{9-u^2}}{u}, \quad x = \arcsin\frac{u}{3}.$$

Тогда $\int \frac{\sqrt{9-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{9-u^2}}{u} - \arcsin\frac{u}{3} + C$.

Пример 2.7. Найти $\int \frac{\sqrt{x-9}}{x}dx$. Это − интеграл типа I_4.

В соответствии с рекомендацией сделаем замену $x-9=t^2$. Тогда $x=9+t^2$, $dx=\left(t^2+9\right)'dt=2t\,dt$. Подставим выражения для x, $dx, \sqrt{x-9}=t$ в интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{x-9}}{x}dx=\int \frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2+9}=2\int \frac{(t^2+9)-9}{t^2+9}dt=2\left(\int dt-9\int \frac{dt}{t^2+9}\right)=2t-18\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C.$$

Получившийся результат надо выразить через переменную x. Учитывая, что $t^2=x-9$, $t=\sqrt{x-9}$, получим $\int \frac{\sqrt{x-9}}{x}dx=2\sqrt{x-9}-6\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-9}}{3}+C$.

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$ (замена $x=t^6$), 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ (замена $2x-1=t^4$),

3. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ (замена $x=\sin t$), 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$ (замена $x=a\operatorname{tg} t$).

Ответы. 1. $6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$, 2. $\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right|+C$,

3. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$, 4. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$.

2.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

$$d(uv) = u\,dv + v\,du \quad \text{и} \quad \int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du\,.$$

Используя свойство $\int d(uv) = uv$, получим $uv = \int u\,dv + \int v\,du$ или

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}\,. \tag{2.6}$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Формула применяется, когда подынтегральное выражение можно представить в виде произведения двух множителей u и dv так, чтобы отыскание функции v по ее дифференциалу и вычисление интеграла $\int v\,du$ составляли в совокупности задачу более простую, чем вычисление интеграла $\int u\,dv$.

Умение разбивать разумным образом подынтегральное выражение на множители u и dv вырабатывается в процессе решения задач. Укажем, когда и как это делается в некоторых случаях:

1) интегралы $\int P(x)\, e^{ax} dx$, $\int P(x) \sin ax\, dx$, $\int P(x) \cos ax\, dx$ (где $P(x)$ – многочлен) вычисляются многократным интегрированием по частям, причем следует взять $u = P(x)$, а оставшееся выражение взять за dv; при каждом применении формулы (2.6) степень многочлена будет понижаться на единицу;

2) интегралы вида $\int P(x) \ln x\, dx$, $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$, $\int \arcsin x\, dx$ также вычисляются методом интегрирования по частям, но за u следует взять соответственно функции $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

Пример 2.8. Найти интеграл $\int x^2 e^{-x}\,dx$.

Положим $u = x^2$, $dv = e^{-x}dx$. Тогда $du = 2x\,dx$, $v = \int dv = \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x}$.

При отыскании функции v мы взяли постоянную интегрирования $C = 0$. Легко проверить, что это не повлияет на конечный результат. Теперь применим формулу (2.6):

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x\,e^{-x}dx.$$

Еще раз применим формулу интегрирования по частям, положив $u = x$, $dv = e^{-x}dx$.

Тогда $du = dx$, $v = -e^{-x}$,

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\left(-x\,e^{-x} + \int e^{-x}dx\right) = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C.$$

Заметим, что если в первоначальном интеграле положить $u = e^{-x}$, $dv = x^2dx$, то формула (2.6) приведет к интегралу $\int x^3 e^{-x}dx$, более сложному, чем первоначальный.

Пример 2.9. Найти $\int x\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$.

Положим $u=\operatorname{arctg} x$, $dv = x dx$. Тогда $du=\left(\operatorname{arctg} x\right)' dx = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, $v=\int dv=\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}$,

и, используя формулу (2.6), получим

$$\int x\cdot \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx .$$

Преобразуем подынтегральную функцию: $\dfrac{x^2}{1+x^2}=\dfrac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{1+x^2}$. Тогда

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx = x-\operatorname{arctg} x + C.$$

Итак, окончательно, $\int x\cdot \operatorname{arctg} x\,dx=\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{2}+C$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти интегралы: 1. $\int x\sin 2x\,dx$, 2. $\int x\,e^x dx$, 3. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$.

Ответы. 1. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C$, 2. $x\,e^x-e^x+C$, 3. $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C$.