

Финансовая математика.

28.02.22

Два типа задач на кредиты.

- **1 тип.** Выплаты кредита производятся **равными платежами**. Эта схема называется «аннуитет».
- **2 тип.** Выплаты кредита подбираются так, что **сумма долга уменьшается равномерно**. Это так называемая схема с дифференцированными платежами.

1 тип – часто применяется формула n членов **геометрической прогрессии**.

2 тип - часто применяется формула n членов **арифметической прогрессии**.

Задание 17 № 526699  

В июле 2022 года планируется взять кредит на сумму 177 120 рублей. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 25% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

S - сумма кредита

$\gamma\%$ - процентная ставка ($r\%$)

После каждого начисления процентов сумма долга увеличивается в k раз.

$$S + \frac{\gamma}{100} \cdot S = S \underbrace{\left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)}_k = k \cdot S$$

$$k = \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)$$

Кредит 35 млн.
процентная ставка
3%

$$35 + 0.03 \cdot 35 =$$

$$35 (1 + 0,03) =$$

$$35 \cdot 1,03$$

$$S = 35 \text{ млн.}$$

$$r = 3\%$$

$$k = 1,03$$

②

 $S = 177\,120$ руб. величина кредита $r = 25\%$ процентная ставка

$$k = \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

 x руб. — платеж ежегодно. $n = 4$ года — срок кредитования.

года	долг	долг + %	платеж	остаток
1	S	$k \cdot S$	x	$kS - x$
2	$kS - x$	$k^2S - kx$	x	$k^2S - kx - x$
3	$k^2S - kx - x$	$k^3S - k^2x - kx$	x	$k^3S - k^2x - kx - x$
4	$k^3S - k^2x - kx - x$	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$	x	0.

$$k^4S - k^3x - k^2x - kx = 0$$

$$k^4S = x(k^3 + k^2 + k + 1)$$

-4-

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
 Сумма
геометр.
прогрессии.

$$b_1 = 1 \quad q = k$$

$$k^4 S = x \cdot \frac{k^4 - 1}{k - 1}$$

$$(1,25)^4 \cdot 177\,120 = x \cdot \frac{1,25^4 - 1}{1,25 - 1}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot 177\,120 = x \cdot \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^4 - 1}{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot 177\,120 = x \cdot \frac{\frac{625}{256} - 1}{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot 177\,120 = x \cdot \frac{369 \cdot 4}{256 \cdot 1} \cdot 64$$

$$x = \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot 177\,120}{\frac{369}{64}}$$

$$x = \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot 177\,120 \cdot 64}{369}$$

$$x = \frac{177120 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot 64}{369}$$

$$x = 480 \cdot \frac{5^4}{4^4} \cdot 4^3$$

$$x = 480 \cdot \frac{5^4}{4}$$

$$x = 120 \cdot 5^4$$

$$x = 75000$$

Сумма взносов равна $4 \cdot 75000 = 300000$ руб.

Ответ: 300 000

Задача 2.17.5. (ЕГЭ-2018. Основная волна)

В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн. рублей, где S – натуральное число. Условия возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Сколько рублей необходимо взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами, и банку будет выплачено 311 040 рублей?

S млн. руб. - величина кредита

$n = 4$ года срок кредитования

$r = 20\%$ кредитная ставка

X млн. руб. - платится.

$$k = 1 + \frac{r}{100}$$

$$X = \frac{311040}{4} = 77760$$

-6-

год	гаш	гаш + %	взношение	остаток
1	S	$k \cdot S$	$k \cdot S$ X	$k \cdot S - X$
2	$k \cdot S - X$	$k \cdot (kS - X)$ $= k^2 S - kX$	X	$k^2 S - kX - X$
3	$k^2 S - kX - X$	$k^3 S - k^2 X - kX$	X	$k^3 S - k^2 X - kX - X$
4	$k^3 S - k^2 X - kX - X$	$k^4 S - k^3 X - k^2 X - kX$	X	0

$$k^4 S - k^3 X - k^2 X - kX = X$$

$$k^4 S = k^3 X + k^2 X + kX + X$$

$$k^4 S = X (k^3 + k^2 + k + 1)$$

-4-

$$K^4 S = x \cdot \frac{K^4 - 1}{K - 1} - \text{сумма}\br/>\text{геометр.}\br/>\text{прогрессии.}$$

$$K^4 S = x \cdot \frac{1,2^4 - 1}{1,2 - 1}$$

$$1,2^4 S = x \cdot 5 \cdot (1,2^4 - 1)$$

$$S = \frac{5x \cdot \left(\left(\frac{6}{5}\right)^4 - 1\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)^4}$$

$$6^4 = 36^2 = 1296$$

$$S = \frac{5x \cdot \left(\frac{1296}{625} - 1\right)}{\frac{1296}{625} - 1} = \frac{5 \cdot 77760 \cdot 671}{1296} = 300 \cdot 671 =$$

$$= 201300 \text{ руб.}$$

ЗАДАЧА 58. 15 января планируют взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

— 1 января каждого года долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит в январе каждого года равными суммами после начисления процентов.

Если каждый год переводить в банк по 2 073 600 р., то кредит можно выплатить за 4 года. Если переводить по 3 513 600 р., то кредит можно выплатить за 2 года. Найдите r .

5 млн. р. - кредит.

7% - процентная ставка.

$$k = \left(1 + \frac{7}{100}\right)$$

	год	год + 7%	возраста	остаток
1	S	$k \cdot S$	3513600	$kS - 3513600$
2	$kS - 3513600$	$k(kS - 3513600)$	3513600	0

Составим уравнение

$$K \cdot (K S - 3513500) - 3513600 = 0$$

Выразим S через K .

$$K^2 S - 3513600 \cdot K = 3513600$$

$$K^2 S = 3513600(1 + K)$$

$$S = \frac{3513600(1 + K)}{K^2}$$

Обозначим $x = 2073600$ р. платеж
4 года.

год	год	год + %	платеж	остаток
1	S	$\kappa \cdot S$	x	$\kappa \cdot S - x$
2	$\kappa S - x$	$\kappa(\kappa S - x) =$ $= \kappa^2 S - \kappa x$	x	$\kappa^2 S - \kappa x - x$
3	$\kappa^2 S - \kappa x - x$	$\kappa(\kappa^2 S - \kappa x - x) =$ $= \kappa^3 S - \kappa^2 x -$ $- \kappa x$	x	$\kappa^3 S - \kappa^2 x -$ $- \kappa x - x$
4	$\kappa^3 S - \kappa^2 x - \kappa x -$ $- x$	$\kappa(\kappa^3 S - \kappa^2 x - \kappa x - x) =$ $= \kappa^4 S - \kappa^3 x - \kappa^2 x -$ $- \kappa x$	x	0

$$\kappa^4 S - \kappa^3 x - \kappa^2 x - \kappa x - x = 0,$$

тогда ставим $S = \frac{3513600(1+k)}{k^2}$

$$k^4 \cdot \frac{3513600(1+k)}{k^2} - k^3 x - k^2 x - kx - x = 0$$

$$3513600(1+k) \cdot k^2 - k^2 x (k+1) - x(k+1) = 0$$

$$k > 0 \quad k+1 \neq 0$$

$$3513600 k^2 - k^2 x - x = 0$$

$$x = 2073600$$

$$3513600 k^2 - 2073600 \cdot k^2 - x = 0$$

$$(3513600 - 2073600) k^2 = 2073600$$

$$k^2 = \frac{2073600}{1440000}$$

$$k^2 = 1,44$$

$$k = 1,2 \quad \underline{k > 0}$$

$$k = \left(1 + \frac{r}{100}\right) =$$

$$r = 20\%$$

Ответ: 20%

ЗАДАЧА 52. 1 января 2015 г. Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн р. в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное число месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. р.?

мес.	нач. сум.	$\alpha + \beta$ млн руб.	платеж	остаток
	год	год + %	год	
1	1100	$1100 \cdot 1,01$	275	836
2	836	$836 \cdot 1,01$	275	569,36
3	569,36	$569,36 \cdot 1,01$	275	300,0536
4	300,0536	$300,0536 \cdot 1,01$	275	< 275
5				

В конце пятого месяца А.С.
рассчитывается за кредит.

Ответ: 5 месяцев

ЗАДАЧА 61. Планируют выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1, 2 и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн р.

Пусть S сумма кредита (ценовое число)
 $k = 1, 2 \quad k = (1 + \frac{r}{100})$
 $r = 20\%$

1, 2, 3 год - только проценты.

4, 5 год - одинаковые суммы.

год	годн	годн + %	взноса	остаток
1	S	$1,2 \cdot S$	$0,2 S$	S
2	S	$1,2 \cdot S$	$0,2 S$	S
3	S	$1,2 \cdot S$	$0,2 S$	S
4	S	$1,2 \cdot S$	x	$1,2 S - x$
5	$1,2 S - x$	$1,2 (1,2 S - x)$	x	0

$$1,2 (1,2 S - x) = x$$

$$x = \frac{36 S}{55}$$

Общая сумма взносов должна быть больше 10 млн. р.

$$0,2 S + 0,2 S + 0,2 S + x + x > 10$$

$$0,3 S + x > 5$$

$$0,3 S + \frac{36 S}{55} > 5$$

$$21S > 110$$

$S = 5$ пер-то неверно.

$$S = 6$$

Следовательно, наименьший
размер кредита, при котором
общая сумма взносов превышает
10 млн. руб., составляет 6 млн. руб.

Ответ: 6 млн. руб.

Домашнее задание

ЗАДАЧА 44. 15 июля 2012 г. взяли кредит в банке. Условия его возврата таковы:

— 1 января каждого года долг возрастает на 14% по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит с февраля по июнь каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен двумя равными платежами по 4 548 600 р. (т. е. за два года).
Какую сумму банк выдал в кредит?

ЗАДАЧА 53. Оля хочет взять в кредит 100 000 р. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента составляет 10% годовых. На какое минимальное число лет Оля может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 р.?

ЗАДАЧА 57. 15 января 2012 г. банк выдал кредит на сумму 1 млн р. Условия его возврата таковы:

— 1 января каждого года долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит в январе каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен за два года, и при этом в первый год была переведена сумма 600 тыс. р., а во второй год — 550 тыс. р. Найдите r .

ЗАДАЧА 59. 31 декабря 2014 г. Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита такова: 31 декабря каждого следующего месяца банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на $r\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если каждый год он будет платить по 328 050 р., то выплатит долг за 4 года. Если он будет платить по 587 250 р., то выплатит за 2 года. Найдите r .

ЗАДАЧА 62. Вадим планирует взять льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг Вадима возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов Вадим выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3, 4 и 5-го годов Вадим выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат Вадима не превысит 6 млн р.