Тема: Аналитическая геометрия в пространстве

ЛЕКЦИЯ 3. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

Основной учебник_1:
https://urait.ru/book/lineynaya-algebra-i-analiticheskaya-geometriya-451035

П. 5.2. Векторное произведение

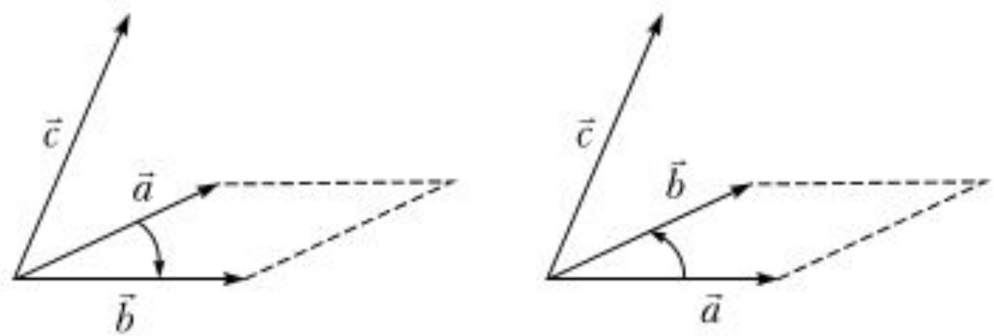
П. 5.3. Смешанное произведение и его свойства

Правые и левые тройки векторов

Определение 5.5. Упорядоченная тройка *некомпланарных* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, имеющих общее начало, называется ***правой тройкой*** (или имеющей *правую ориентацию*), если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся *против* часовой стрелки.

Определение 5.6. *Упорядоченная* тройка *некомпланарных* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, имеющих общее начало, называется ***левой тройкой*** (или имеющей *левую ориентацию*), если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся по часовой стрелке.

Левая и правая ориентация представлены на рис. 5.9.



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка $\quad$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка

Рис. 5.9. **Ориентация векторов в пространстве**

Векторное произведение

Определение 5.7. ***Векторным произведением*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов;

3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$.

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Замечание 5.2. Первое условие определения означает, что векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в случае их неколлинеарности). Второе условие определяет направление на этом перпендикуляре; а третье условие задает модуль этого вектора. Тем самым эти три условия однозначно определяют вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ (рис. 5.10).

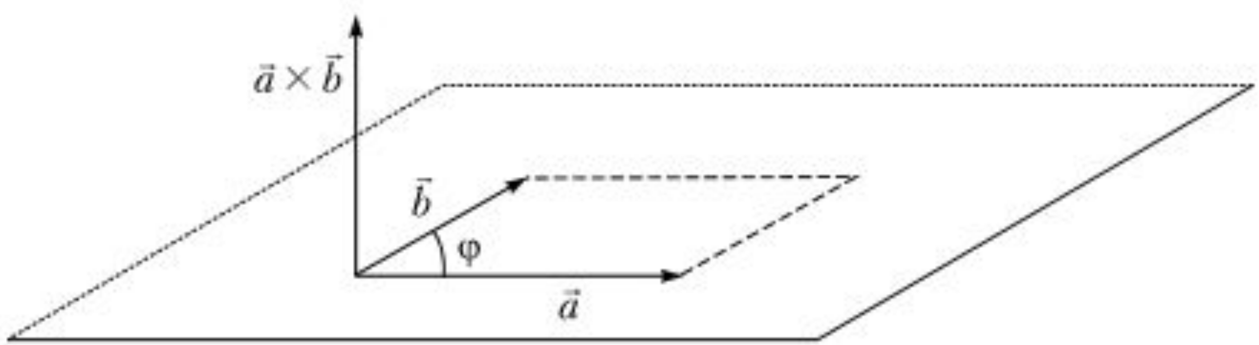


Рис. 5.10. **Векторное произведение векторов**

Свойства векторного произведения

Замечание 5.3. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны или один из векторов — нулевой вектор (или оба нулевые), то из третьего условия определения получаем:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 0 \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}.$$

Геометрический смысл векторного произведения

Модуль векторного произведения векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах: $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\vec{a},\vec{b}}$.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность).
2. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ (ассоциативность относительно умножения на исло).
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивность).
4. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ (векторный квадрат).
5. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (условие коллинеарности векторов).

Упр. 1. Доказать любые 3 свойства.

Векторное произведение для ОНБ

Рассмотрим векторное произведение векторов из ОНБ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ в пространстве:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j};$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}.$$

Результаты занесем в таблицу (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Таблица векторного умножения

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Пример 5.3. Найдем площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Имеем

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\vec{p} - 3\vec{q})\times(2\vec{p} + \vec{q}) = 2\vec{p}\times\vec{p} - 6\vec{q}\times\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q} - 3\vec{q}\times\vec{q} = 7\vec{p}\times\vec{q}.$$

Тогда

$$S_{\vec{a},\vec{b}} = |\vec{a}\times\vec{b}| = 7|\vec{p}\times\vec{q}| = 7\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 21.$$

Ответ. $S_{\vec{a},\vec{b}} = 21$.

Пример 5.4. Выясним, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут коллинеарны, если известно, что $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{q} - \vec{p}$, $\vec{p}\{2; \alpha; 1\}$, $\vec{q}\{\beta; 3; -1\}$.

Решение. Имеем

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{p} + 2\vec{q})\times(\vec{q} - \vec{p}) = \vec{0};$$

$$(\vec{p} + 2\vec{q})\times(\vec{q} - \vec{p}) = \vec{p}\times\vec{q} - \vec{p}\times\vec{p} + 2\vec{q}\times\vec{q} - 2\vec{q}\times\vec{p} = \vec{p}\times\vec{q} - \vec{0} + \vec{0} + 2\vec{p}\times\vec{q} = 3\vec{p}\times\vec{q};$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}\times\vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}\,\{2; \alpha; 1\}\parallel\vec{q}\{\beta; 3; -1\} \Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ \beta & 3 & -1 \end{pmatrix} < 2 \text{ (см. подпараграф 4.2.4)};$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ \beta & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \beta & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3, \\ \beta = -2. \end{cases}$$

Ответ. $\alpha = -3$, $\beta = -2$.

Смешанное произведение

Определение 5.8. ***Смешанным произведением*** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

По определению имеем: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения

Модуль смешанного произведения векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах: $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$.

► ***Доказательство.*** Введем обозначение $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Тогда имеем:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot \text{Пр}_{\vec{d}}\vec{c}.$$

Если H — высота параллелепипеда (рис. 5.13), то

$$H = \left|\text{Пр}_{\vec{d}}\vec{c}\right| \text{ и } |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = |\vec{d}| \cdot |\text{Пр}_{\vec{d}}\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot H = S_{\vec{a}, \vec{b}} H = V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}.$$

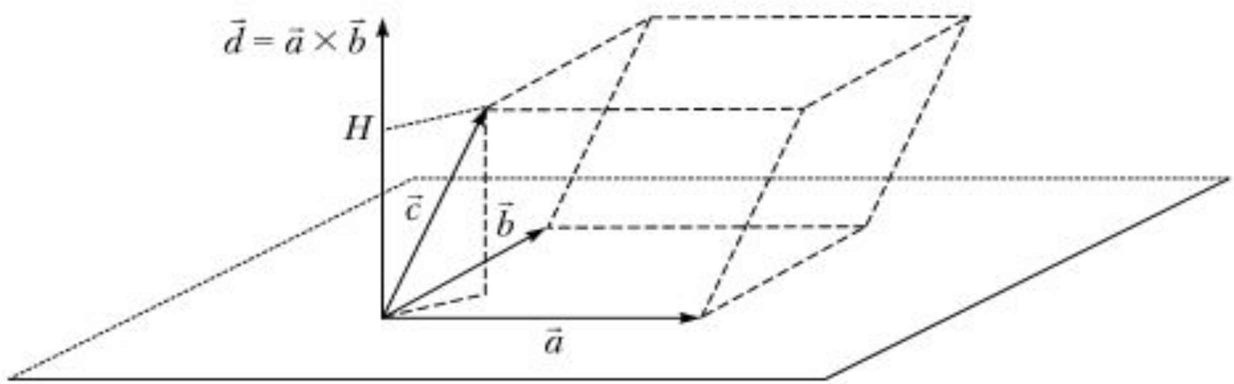


Рис. 5.13. **К геометрическому смыслу смешанного произведения**

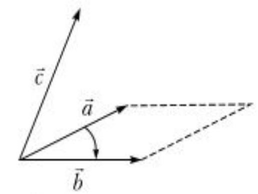
Свойства ориентации векторов и смешанного произведения

Отметим достаточно очевидные свойства ориентации векторов.

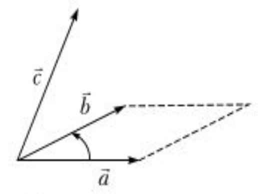
1. Если в тройке векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ поменять местами два вектора, то ориентация тройки также поменяется.

2. Если в тройке векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ изменить направление одного из векторов, то ориентация тройки меняется.

3. При *циклической* перестановке векторов ориентация тройки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ сохраняется.



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не меняется при циклической перестановке множителей: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$.

2. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ меняет знак при перестановке двух сомножителей: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$, $\vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$.

3. Необходимым и достаточным условием *компланарности* векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — компланарны $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

4. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая тройка.

Следствие. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Действительно, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Это позволяет в записи смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ставить знаки скалярного и векторного умножения в любом порядке: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ или $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Упр. 2. Доказать любые три свойства смешанного произведения.

Выражение векторного и смешанного произведения в координатах

Теорема 6.3. *Для векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c}\{x_3; y_3; z_3\}$, заданных в ОНБ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, имеют место следующие формулы вычисления векторного и смешанного произведений:*

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство

$$\vec{a}\times\vec{b} = (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}) = x_1\vec{i}\times x_2\vec{i} + x_1\vec{i}\times y_2\vec{j} + x_1\vec{i}\times z_2\vec{k} +$$
$$+ y_1\vec{j}\times x_2\vec{i} + y_1\vec{j}\times y_2\vec{j} + y_1\vec{j}\times z_2\vec{k} + z_1\vec{k}\times x_2\vec{i} + z_1\vec{k}\times y_2\vec{j} + z_1\vec{k}\times z_2\vec{k} =$$
$$= \vec{0} + x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + \vec{0} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} + \vec{0} =$$
$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} =$$
$$= \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix};$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \left(\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)\cdot(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}) =$$
$$= x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Условия коллинеарности и компланарности векторов

Следствие 2 (условия ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов). Для векторов $\vec{a}\{x_1;\,y_1;\,z_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\,y_2;\,z_2\}$, $\vec{c}\{x_3;\,y_3;\,z_3\}$, заданных в ОНБ $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, выполнены следующие условия:

- ортогональности: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$;
- коллинеарности: $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\vec{0}$;
- компланарности: $\vec{a};\,\vec{b};\,\vec{c}$ — компланарны $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0$.

► ***Доказательство.*** $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$; $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — компланарны $\Leftrightarrow\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$. Далее используются формулы из теоремы 6.3. Следствие доказано. ◄

Пример 6.1. Проведем вычисления по приведенным формулам для $\vec{a}\{1;\,0;\,-2\}$, $\vec{b}\{-3;\,1;\,2\}$, $\vec{c}\{2;\,-1;\,2\}$.

Решение.

$$\vec{a}\vec{b}=1\cdot(-3)+0\cdot1+(-2)\cdot2=-7;$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-2\\-3&1&2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0&-2\\1&2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\-3&2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&0\\-3&1\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k};$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-3&1&2\\2&-1&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2\\-1&2\end{vmatrix}-0-2\begin{vmatrix}-3&1\\2&-1\end{vmatrix}=4-0-2=2.$$

Двойное векторное произведение

Определение 2.8.1. *Двойным векторным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$.

Для решения ряда задач оказывается полезной

Теорема 2.8.1. **Имеет место равенство**

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}),\quad \forall\, \vec{a},\vec{b},\vec{c}.$$

Упр. 3. Ответить на контрольные вопросы и задачи.

Контрольные вопросы и задачи

1. Какие наибольшее и наименьшее возможные значения может принимать скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при заданных значениях их модулей: $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| - b$?

2. Найдите скалярное произведение векторов, совпадающих с диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$.

3. Угол между единичными векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен φ. Найдите длины диагоналей d_1 и d_2 параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

4. Какие наибольшее и наименьшее возможные значения может принимать модуль векторного произведения $|\vec{a}\times\vec{b}|$ при заданных значениях их модулей: $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$?

5. На векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построен параллелограмм. Найдите отношение площади этого параллелограмма к площади параллелограмма, построенного на его диагоналях.