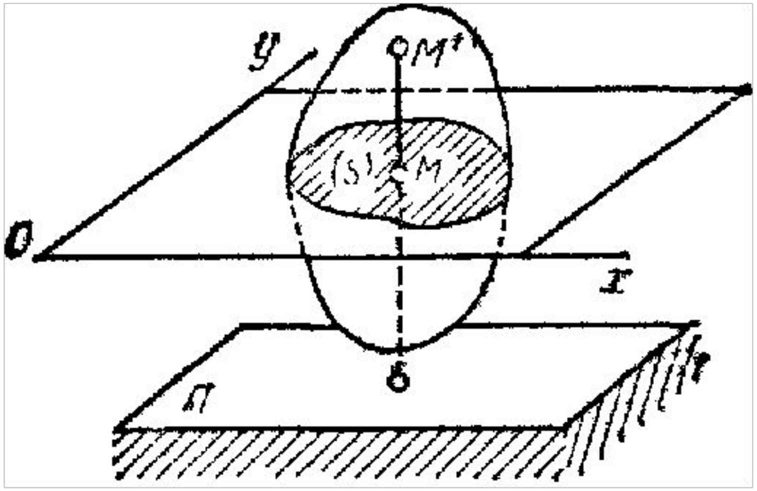
ТЕМА 6. Плоскопараллельное движение твердого тела.

Вопрос №1. Уравнения плоскопараллельного движения

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела – такое его движение, при котором все его точки перемещаются параллель но некоторой фиксированной плоскости.

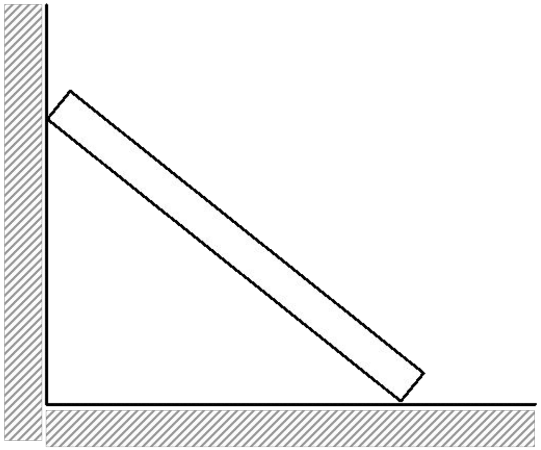


Из определения следует, что перпендикуляр MA остается параллелен своему начальному положению. По теореме о поступательном движении траектории, скорости и ускорения точек M и A совпадают.

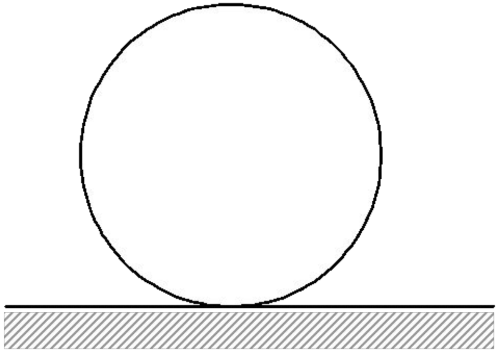
Для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Oxy сечение S этого тела или некоторая плоская фигура S.

Примеры плоскопараллельного движения:

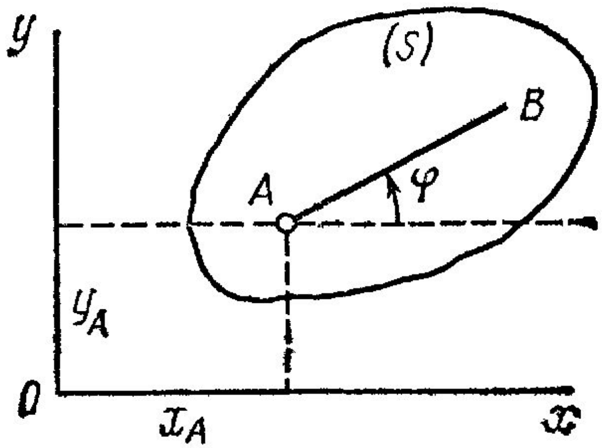
скольжение стержня



качение цилиндра



Для задания движения плоской фигуры введем подвижную систему координат, совершающую поступательное движение с точкой А.



Точку *A*, выбранную для определения положения фигуры *S*, будем в дальнейшем называть **полюсом**

Положение плоской фигуры можно задать двумя координатами полюса и одним углом между отрезком, жестко связанным с телом, и направлением одной из неподвижных осей:

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t)$$

уравнения движения плоской фигуры

Первые два уравнения представляют собой уравнения поступательного движения полюса. Третье уравнение описывает вращательное движение тела вокруг полюса.

Основные кинематические характеристики плоскопараллельного движения:

1) Скорость и ускорение поступательного полюса.

$$v_A = \sqrt{\left(x'_A(t)\right)^2 + \left(y'_A(t)\right)^2} \quad a_A = \sqrt{\left(x''_A(t)\right)^2 + \left(y''_A(t)\right)^2}$$

2) Угловая скорость и угловое ускорение вращательного движения вокруг полюса.

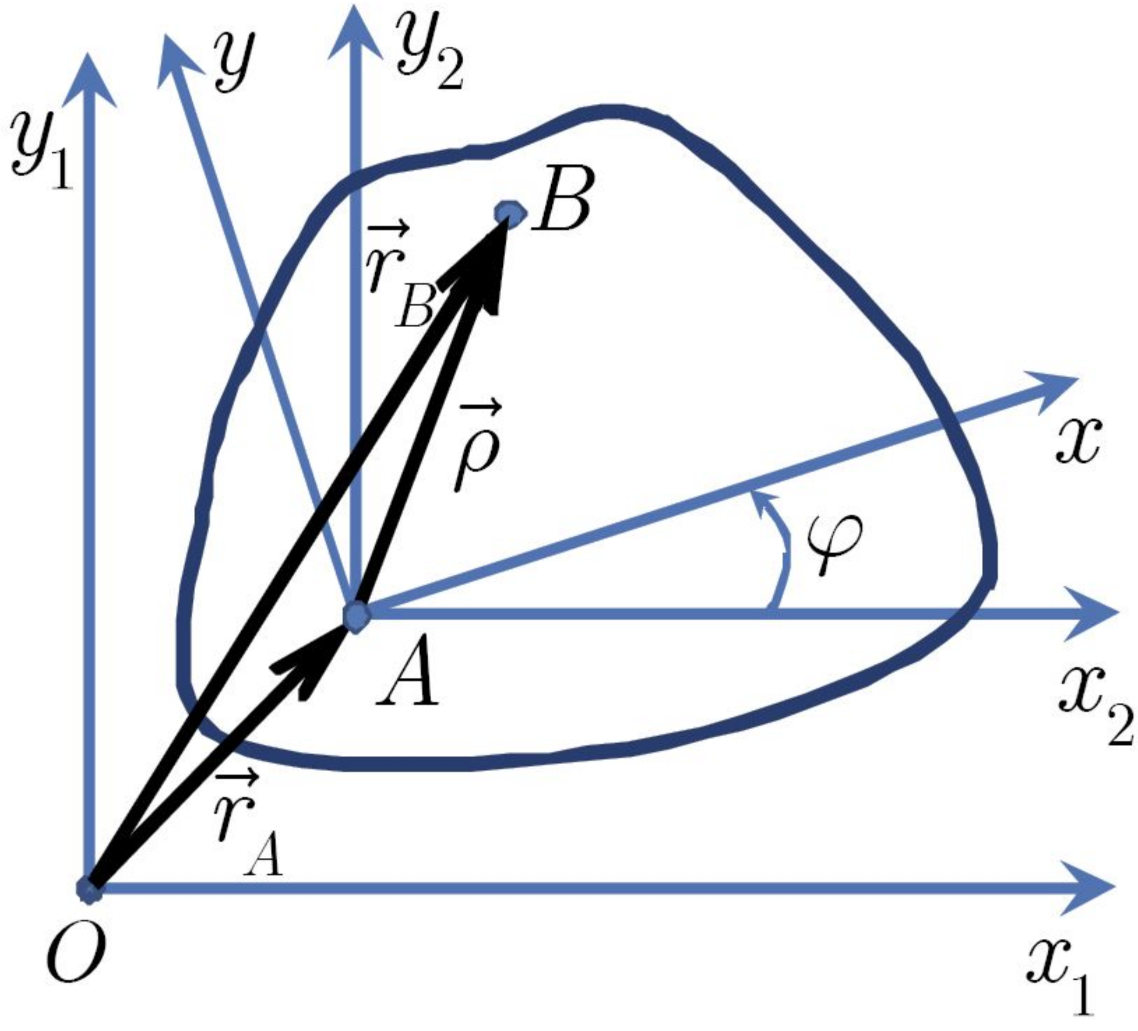
$$\omega = \dot{\varphi}(t)\,, \varepsilon = \dot{\omega}(t).$$

Вопрос №2. Определение скоростей точек плоской фигуры

Теорема: Скорость любой точки тела при плоском движении находится как сумма скорости полюса и скорости данной точки во вращательном движении вокруг полюса.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

где $v_{BA} = \omega \cdot AB, \quad \vec{v}_{BA} \perp AB$


y_1
y
y_2
B
$\vec{r}_B$
$\vec{\rho}$
x
φ
A
x_2
$\vec{r}_A$
O
x_1

Пусть система координат Ox_1y_1 является неподвижной системой, а система координат Ax_2y_2, имеющая начало в произвольно выбранной точке A плоской фигуры, движется поступательно.

Систему координат Axy жестко свяжем с плоской фигурой.

Радиус-вектор $\vec{r}_B$ определяющий положение точки B относительно неподвижной системы координат Ox_1y_1 (рис. :) можно задать при помощи двух векторов: $\vec{r}_A$, определяющего положение точки A в системе отсчета Ox_1y_1, и $\vec{\rho}$, определяющего положение точки B в системе отсчета Ax_2y_2

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \qquad (1)$$

Для определения скорости плоской фигуры продифференцируем равенство (1) по времени,

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Заметим, что

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B, \qquad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A.$$

Что же касается $d\vec{\rho}/dt$, то это есть скорость точки B относительно подвижной системы координат Ax_2y_2. Введем для нее обозначение $\vec{v}_{BA}$

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_{BA}.$$

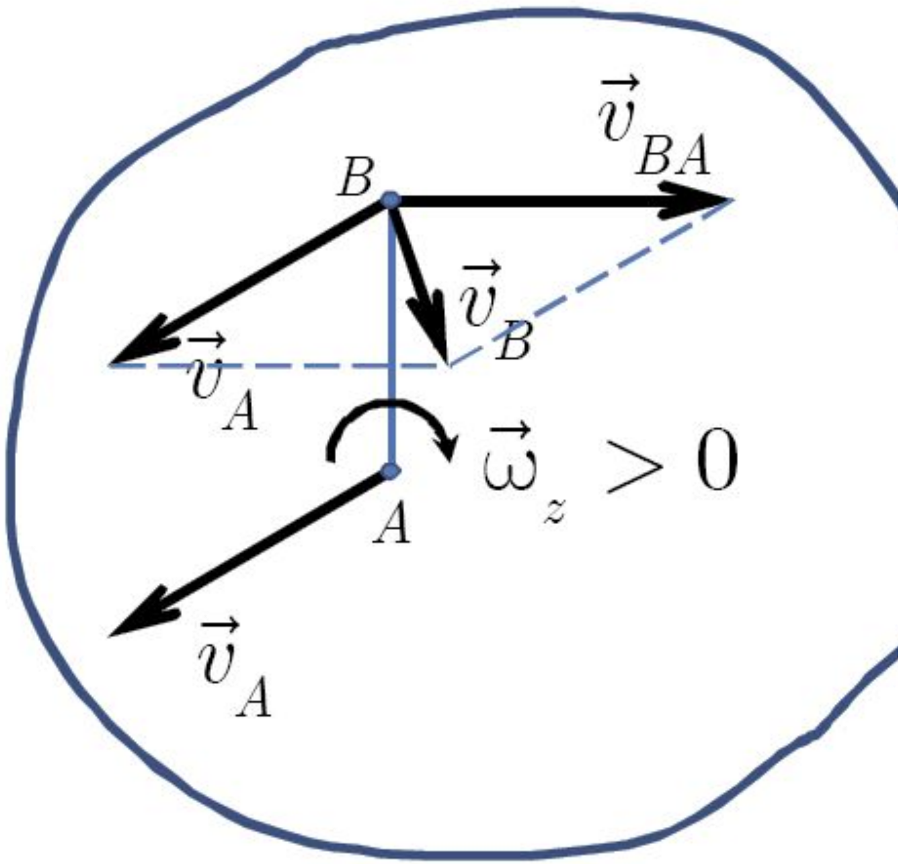
Движение тела относительно системы координат Ax_2y_2 представляет собой вращение тела вокруг оси Az_2, направленной перпендикулярно плоскости чертежа Таким образом, скорость $\vec{v}_{BA}$ есть скорость точки B при вращении тела вокруг оси Az_2. Для определения этой скорости мы уже получили формулу

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho},$$

где $\vec{\omega}_A$ – угловая скорость вращения фигуры вокруг точки A (вокруг оси Az_2), которую в дальнейшем будем называть *полюсом.* Формула (11.3) принимает теперь вид

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

т.е. *скорость произвольной точки B плоской фигуры равна геометрической сумме скоростей полюса A и точки B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A.*

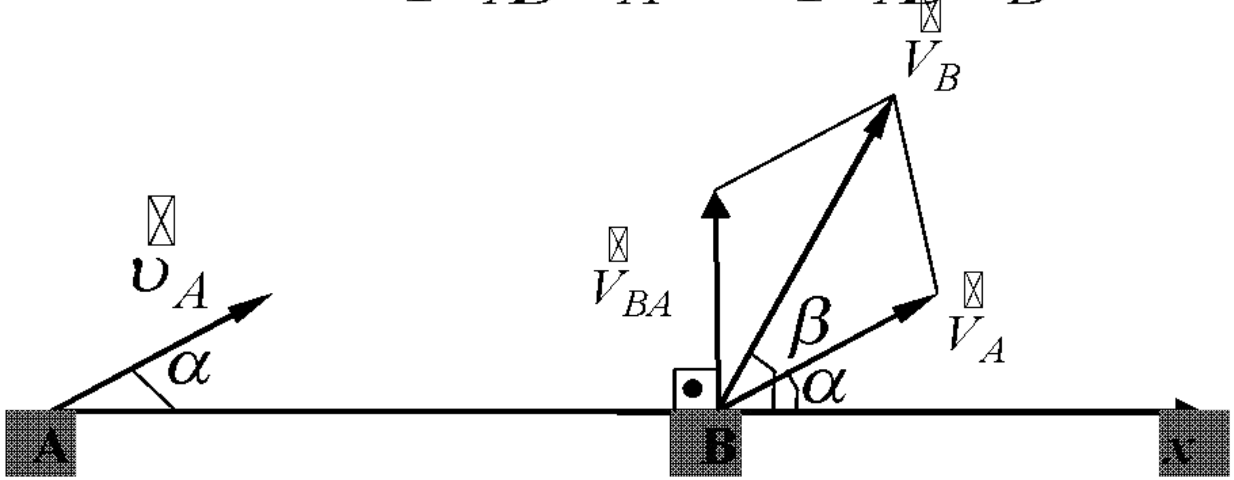


$\vec{v}_{BA}$
B
$\vec{v}_B$
$\vec{v}_A$
$\vec{\omega}_z > 0$
A
$\vec{v}_A$

Вопрос №3. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.

$$\text{пр}_{AB}\vec{v}_A = \text{пр}_{AB}\vec{v}_B$$



Доказательство:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad \text{пр}_{AB}\vec{v}_B = \text{пр}_{AB}\vec{v}_A + \underbrace{\text{пр}_{AB}\vec{v}_{BA}}_{=0},$$

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$$

Вопрос № 4. Определение скорости точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей

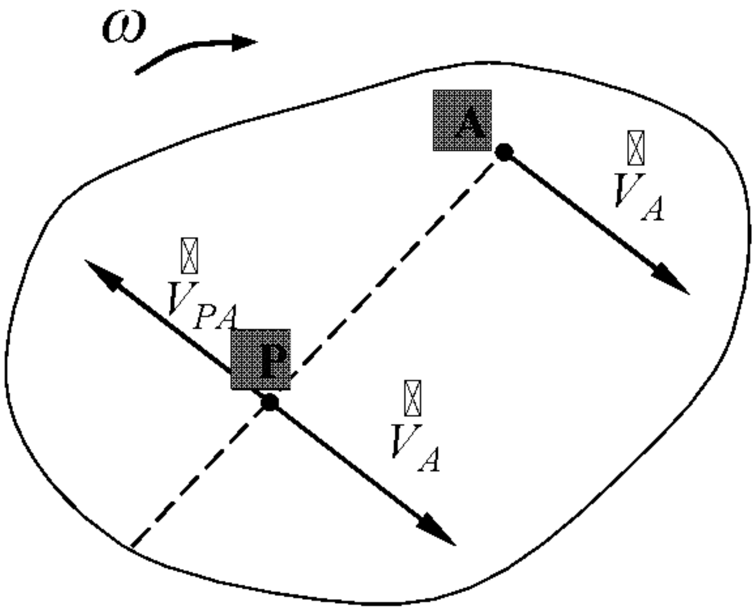
Мгновенный центр скоростей – точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Теорема:

При непоступательном движении плоской фигуры существует жестко связанная с ней точка, скорость которой в данный момент движения равна нулю.

<u>**Доказательство**</u>:

Отложим перпендикуляр к скорости в точке А и выберем на нем точку на расстоянии:



$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

По теореме о скоростях:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA},$$

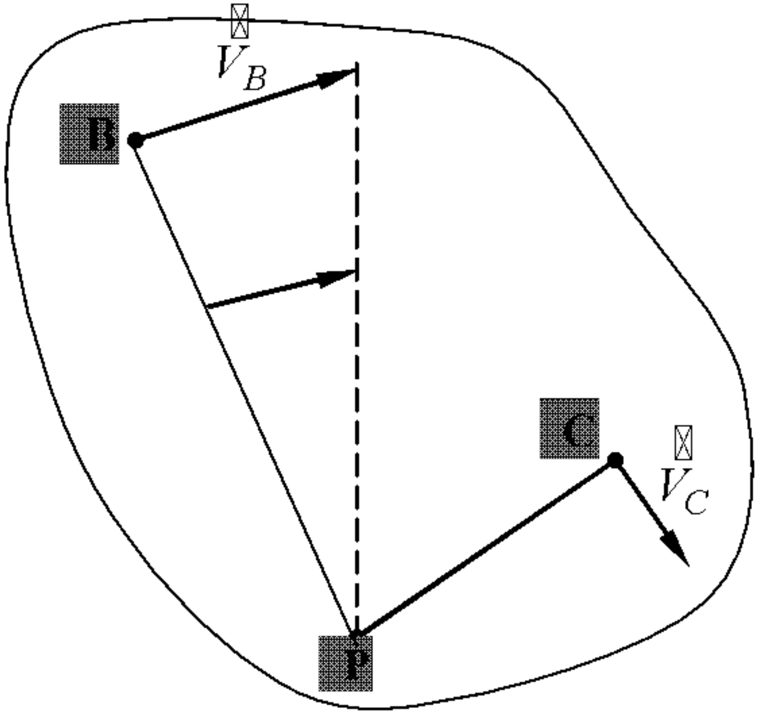
где $v_{PA} = \omega \cdot AP = v_A.$

следовательно: $v_p = v_A - v_{PA} = 0.$

Теорема доказана.

Мгновенный центр скоростей плоской фигуры, способы его нахождения.

Выбирая мгновенный центр скоростей за полюс, нетрудно убедиться, что скорость любой точки плоской фигуры находится как скорость во вращательном движении вокруг МЦС.



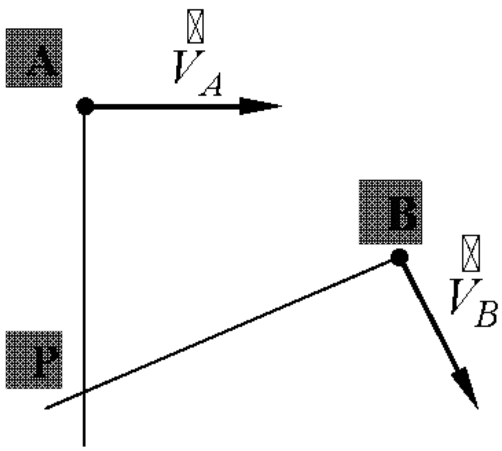
$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP},$$

$$v_P = 0,$$

$$v_B = \omega \cdot BP$$

Способы нахождения МЦС

1. Известны направления скоростей двух точек тела и они не параллельны.

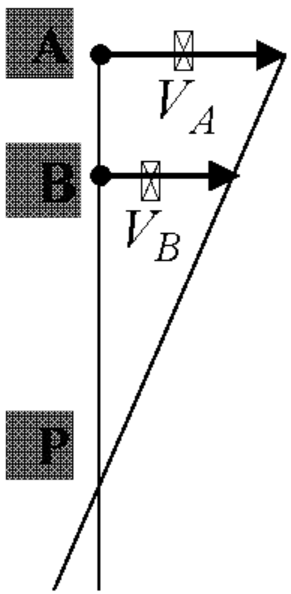


МЦС лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям.

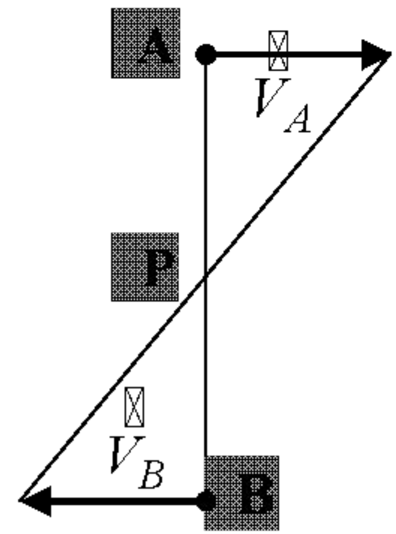
Способы нахождения МЦС

2. Известны направления скоростей двух точек тела и они параллельны.

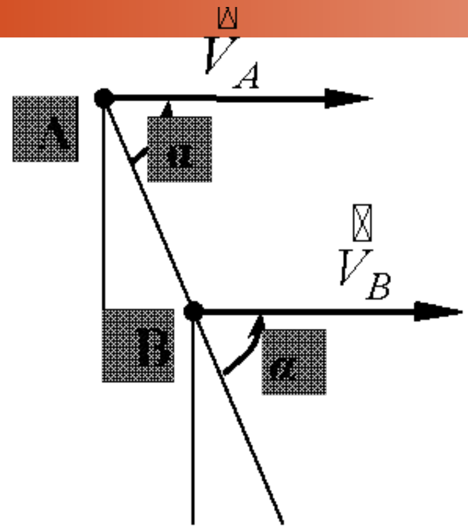
а)



б)



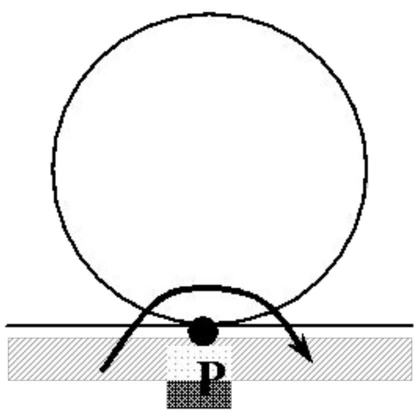
в)



$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\alpha,$$

$$т.е. \ \vec v_A = \vec v_B \quad и \ \ \omega = 0.$$

МЦС не существует (находится в бесконечности), то тело совершает **мгновенно-поступательное движение**. Угловая скорость равна нулю, скорости всех точек тела одинаковы.



3. Качение без скольжения неподвижной поверхности (нет проскальзывания). МЦС находится в точке касания тела с неподвижной поверхностью.

Вопрос № 5. Определение ускорения точек плоской фигуры

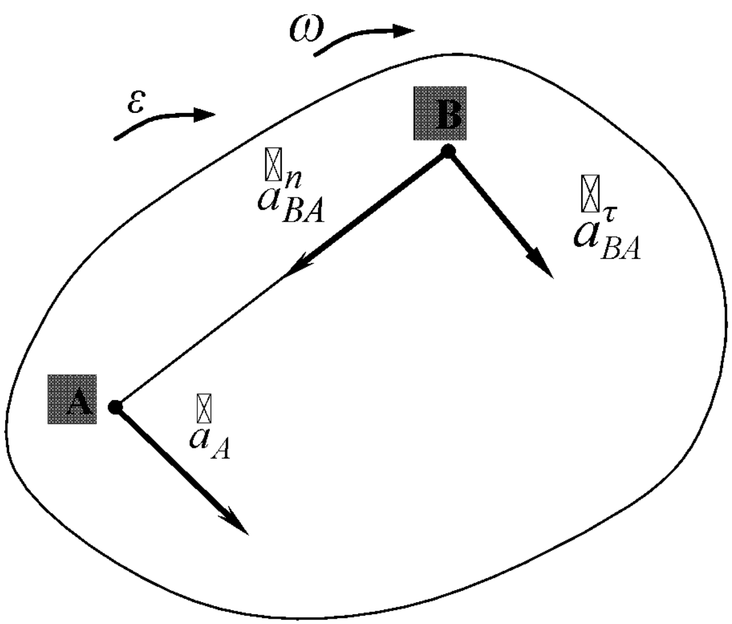
Теорема:

Ускорение точки плоской фигуры равно сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении вокруг полюса.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,\tau}_{BA} + \vec{a}^{\,n}_{BA}.$$

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$$

$$a_{BA}^{n} = \omega_{AB}^{2} \cdot AB$$



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}.$$

$$\vec{a}_B^{\tau} + \vec{a}_B^{n} = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}.$$