Решение логарифмических неравенств

тип заданий С3

Решить неравенства

$$\log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}$$

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \frac{x}{3} > 0$$

$$7^{18} \cdot (\frac{1}{7})^{2x} \cdot (\frac{1}{7})^{5\sqrt{x}} > 1$$

$$\log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 27 \geq 2$$

$$\frac{2^{2|x-3|} + 4}{5} < 2^{|x-3|}$$

$$\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \leq 0$$

$$\log_2(x^2 + 4x) + \log_{0,5} \frac{x}{4} + 2 \geq \log_2(x^2 + 3x - 4)$$

$$\log_5^2(x-8) - 6\log_5 \sqrt{(x-8)} \geq 4 - 25(x-8)(\log_5(x-8) - 4)$$

Решить неравенство

$$\log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 27 \geq 2$$

$$\log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 27 \geq 2$$

$$\log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 3^3 \geq$$

$$\log_{3x-3} 3 + 3\log_{(x-1)}$$

Область допустимых значений неравенства

3x-3 > 0 , 3x-3≠0 , $(x-1)^2$ *≠0*

$$\frac{1}{\log_3 3x-} + \frac{3}{\log_3 (x-1)^2} \geq 2$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{1}{\log_3 3(x-1)} \quad 2$$

$$\log_b a + \log_b c = \log_b (ac)$$

$$\frac{1}{\log_3 3 +} \quad 3$$

$$\frac{1}{1+\log_3(x-1)} + \frac{3}{2\log_3(x-1)} \geq 2$$

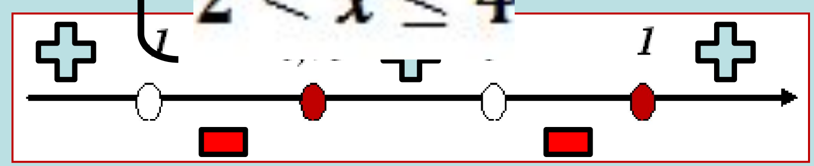
$$\log_3(x-1) = t$$

$$-1 < \log_3(x-1) \leq -\frac{3}{4}$$

$$1) \leq 1 \geq 0$$

$$\frac{4}{3} < x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}$$

$$2 < x \leq 4$$



$$-1 < t \leq -\frac{3}{4}$$

$$0 < t \leq 1$$

$$\left(\frac{4}{3};\ 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right] \cup (2;\ 4]$$

Решить неравенство

$$\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \le 0$$

ОДЗ: x > 0, x ≠ 1

$$\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \le 0$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 3x} - \frac{6}{\log_3 9x} \le 0$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 3 + \log_3 x} - \frac{6}{\log_3 9 + \log_3 x} \le 0$$

$$\log_b a + \log_b c = \log_b (ac)$$

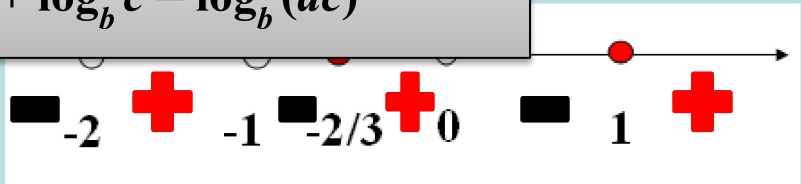
$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{1 + \log_3 x} - \frac{6}{2 + \log_3 x} \le 0$$

$$\log_3 x = y$$

$$\frac{1}{y} + \frac{2}{1+y} - \frac{6}{2+y} \le 0$$

$$\frac{(1+y)(2+y) + 2y(2+y) - 6y(1+y)}{y(1+y)(2+y)} \le 0$$

$$\frac{3(y-1)\left(y+\frac{2}{3}\right)}{y(y+1)(y+2)} \ge 0$$



$$\begin{cases} -2 < y < -1 \\ -\frac{2}{3} \le y < 0 \\ y \ge 1 \end{cases} \xrightarrow{\log_3 x = y} \begin{cases} \frac{1}{9} < x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \le x < 1 \\ x \ge 3 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[3^{-\frac{2}{3}}; 1\right) \cup [3; +\infty)$$

Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\frac{x}{3}>0$$

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\frac{x}{3}>0$$

Найдём область допустимых значений неравенства:

$$\begin{cases} 2x^2-7x+6>0 \\ 2x^2-7x+6\neq 1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-2)>0 \\ (2x-5)(x-1)\neq 0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$x\in(0;1)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$$

Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\frac{x}{3} > 0$$

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\frac{x}{3} > \log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}1$$

При переходе от логарифмов к подлогарифмическим выражениям НЕОБХОДИМО учитывать значение величины основания

$$x \in \left(1;\frac{3}{2}\right) \cup \left(2;\frac{5}{2}\right)$$

$$2x^2 - 7x + 6 < 1$$

$$\begin{cases} x \in \left(1;\frac{3}{2}\right) \cup \left(2;\frac{5}{2}\right) \\ 00 < \end{cases}$$

$$x \in (0;1) \cup \left(\frac{5}{2};+\infty\right)$$

$$2x^2 - 7x + 6 > 1$$

$$\begin{cases} x \in (0;1) \cup \left(\frac{5}{2};+\infty\right) \\ x > 3 \end{cases}$$

$$x \in \left(1;\frac{3}{2}\right) \cup \left(2;\frac{5}{2}\right) \cup (3;+\infty)$$

Решить неравенство

$$\log_9{}^2 x \ge \log_3{}^2\sqrt{1-\frac{x}{4}}$$

$$\log_9{}^2 x \ge \log_3{}^2\sqrt{1-\frac{x}{4}}$$

ОДЗ

$$1-\frac{x}{4} > 0, x > 0$$

$$0 < x < 4$$

$$\log_{3^2}{}^2 x \ge \log_3{}^2\sqrt{1-\frac{x}{4}} \Rightarrow (\log_{3^2} x)^2 \ge ((\log_3(1-\frac{x}{4})^{\frac{1}{2}})^2 \Rightarrow$$

$$\log_{a^x} b = \frac{1}{x}\log_a b$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}\log_3 x)^2 \ge (\frac{1}{2}\log_3(1-\frac{x}{4}))^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\log_3{}^2 x \ge \frac{1}{4}\log_3{}^2(1-\frac{x}{4}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3{}^2 x - \log_3{}^2(1-\frac{x}{4}) \ge 0 \Rightarrow (\log_3 x - \log_3\frac{4-x}{4})\cdot(\log_3 x + \log_3\frac{4-x}{4}) \ge 0$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\log_3\frac{4x}{4-x}\cdot\log_3\frac{x(4-x)}{4} \ge 0$$

Решить неравенство

$$\log_9{}^2 x \ge \log_3{}^2\sqrt{1-\frac{x}{4}}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3\dfrac{x(4-x)}{4}\ge 0\\[2mm] \log_3\dfrac{4x}{4-x}\ge 0\\[2mm] 0<x<4\end{cases}\\[12mm] \begin{cases}\log_3\dfrac{4x}{4-x}\le 0\\[2mm] \log_3\dfrac{x(4-x)}{4}\le 0\\[2mm] 0<x<4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x(4-x)}{4}\ge 1\\[2mm] \dfrac{4x}{4-x}\ge 1\\[2mm] 0<x<4\end{cases}\\[12mm] \begin{cases}\dfrac{4x}{4-x}\le 1\\[2mm] \dfrac{x(4-x)}{4}\le 1\\[2mm] 0<x<4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0{,}8\le x\le 4\\ (x-2)^2\le 0\\ 0<x<4\end{cases}\\[12mm] \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 0{,}8\\ x\ge 4\end{array}\right.\\ (x-2)^2\ge 0\\ 0<x<4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$0{,}8\le x\le 4$$

$$x=2$$

Решить неравенство

$$\log_5{}^2(x-8)-6\log_5\sqrt{(x-8)}\ \geq 4-25(x-8)(\log_5(x-8)-4)$$

$$\log_5{}^2(x-8)-6\log_5\sqrt{(x-8)}\ \geq 4-25(x-8)(\log_5(x-8)-4)$$

ОДЗ

$x > 8$

$$6\log_5\sqrt{(x-8)}\ = 6\log_5(x-8)^{\frac{1}{2}} = 6\cdot\frac{1}{2}\log_5(x-8)$$

$$6\log_5\sqrt{(x-8)}\ = 3\log_5(x-8)$$

$$\log_5{}^2(x-8)-3\log_5(x-8)-4+25(x-8)(\log_5(x-8)-4)\geq 0$$

$$x-8=5^t$$

$$(\log_5 5^t)^2-3\log_5 5^t+25\cdot 5^t(\log_5 5^t-4)-4\geq 0$$

$$t^2-3t+25\cdot 5^t(t-4)-4\geq 0$$

Решить неравенство

$$\log_5^2(x-8)-6\log_5\sqrt{(x-8)}\ \ge 4-25(x-8)(\log_5(x-8)-4)$$

$$(t-4)(t+1)+25\cdot 5^t(t-4)\ge 0$$

Разложим на множители

$$(t-4)(t+1+25\cdot 5^t)\ge 0$$

$x = 633$

$x-8=5^4$

$t=4$

$x-8=5^{-2}$

Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули левой части

$$x\in\left(8;8\frac{1}{25}\right]\cup[633;+\infty)$$

Решить неравенство

$$\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\frac{x}{4}+2\ge\log_2(x^2+3x-4)$$

$$\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\frac{x}{4}+2\ge\log_2(x^2+3x-4)$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+4x>0 \\ x>1 \\ x \ldots > 0 \end{cases}$

$$\log_2 x+\log_2(x+4)+\log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} 4+2\ge\log_2(x-1)+\log_2(x+4)$$

$$\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} 4+2\ge\log_2(x-1)$$

$$\log_{a^k} x^n=\frac{n}{k}\cdot\log_a x$$

$$\log_2 x-\log_2 x+\log_2 4+2\ge\log_2 \ldots 17]$$

$$\log_2(x x\le 17 16 \; 16$$

Решить неравенство

$$7^{18}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{5\sqrt{x}}>1$$

$$7^{18}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{5\sqrt{x}}>1$$

$$7^{18}\cdot7^{-2x}\cdot7^{-5\sqrt{x}}>7^{0}$$

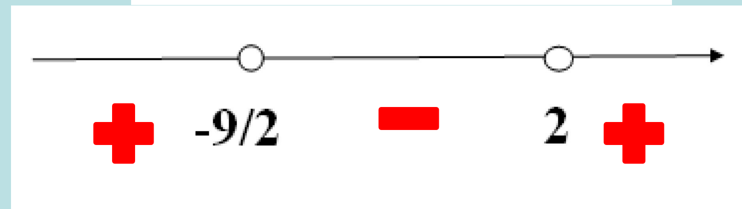
$$7^{18-2x-5\sqrt{x}}>7^{0}$$

$$18-2x-5\sqrt{x}>0$$

$$\sqrt{x}=t, t\geq0$$

$$-2t^{2}-5t+8>0$$

$$2t^{2}+5t-8<0$$



$$\begin{cases}-\frac{9}{2}<t<2\\ t\geq0\end{cases}\Rightarrow 0\leq t<2$$

$$0\leq\sqrt{x}<2$$

$$0\leq x<4$$

$$x\in[0;4)$$

Решить неравенство

$$\frac{2^{2|x-3|}+4}{5} < 2^{|x-3|}$$

$$\frac{2^{2|x-3|}+4}{5} < 2^{|x-3|}$$

$\boxed{2^{|x-3|} = a}$ $\quad \frac{a^2+4}{5} < a$

$$(a \quad 1 < a < 4 < 0$$

$$2^0 < 2^{|x-3|} < 2^2$$

$$\{ \; x \in (1;3) \cup (3;5)$$