Переходные процессы 1-ого порядка с емкостным элементом

Смирнова Юлия 2/36

Рассмотрим резистивную цепь произвольной конфигурации, к внешним зажимам которой подключен емкостный элемент (рис. 7.1, а).

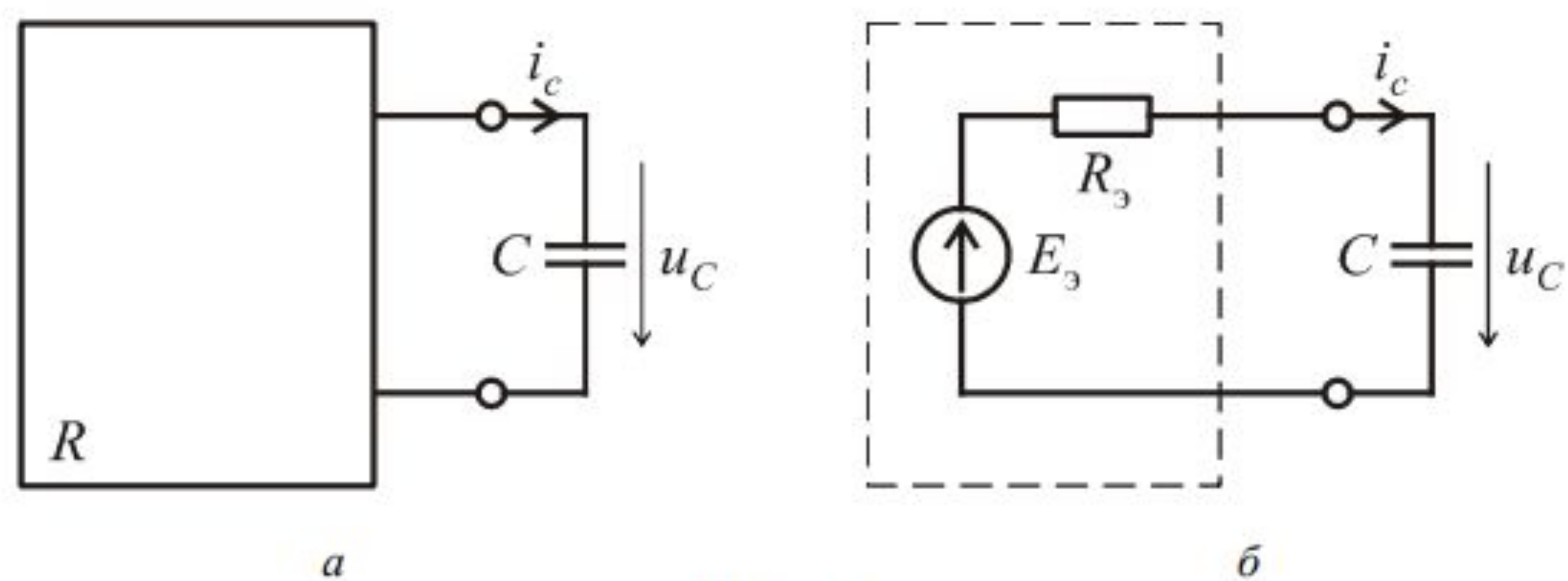

Рис. 7.1

Резистивная подсхема, изображенная на рис. 7.1, *а* в виде «черного ящика», может содержать резисторы, независимые и управляемые источники, идеальные ОУ. Необходимо определить закон изменения напряжения емкостного элемента $u_C(t)$. Зная $u_C(t)$, мы можем представить конденсатор в любой момент времени t источником напряжения $E = u_C(t)$ и рассчитать ток в любой ветви полученной резистивной цепи.

Заменим резистивный двухполюсник эквивалентной схемой Тевенина (рис. 7.1, *б*). ЭДС эквивалентной схемы $E_э$ равна напряжению холостого хода резистивного двухполюсника, а сопротивление $R_э$ – его входному сопротивлению. Для цепи на рис. 7.1, *б* справедливо уравнение:

$$R_э i_C + u_C = E_э.$$

Выполняя подстановку $i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$ и решая полученное уравнение относительно $\dfrac{du_C}{dt}$, получим

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R_э C}u_C + \frac{1}{R_э C}E_э. \qquad (7.1)$$

Уравнение, записанное в такой форме, когда в левой части находится только первая производная, называют уравнением состояния, а $u_C(t)$ – переменной состояния. Действительно, значение $u_C(t)$ определяет состояние цепи, т. е. токи в ветвях резистивной подсхемы в любой момент времени t.

Обозначим $\tau = R_э C$. Величину τ называют *постоянной времени*. Уравнение (7.1) примет вид

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{\tau}u_C + \frac{1}{\tau}E_э. \qquad (7.2)$$

Обозначим начальное напряжение емкостного элемента $u_C(0) = U_0$. Решение уравнения (7.2) имеет вид

$$u_C(t) = \left(U_0 - u_{уст}\right)e^{-t/\tau} + u_{уст}. \qquad (7.3)$$

Чтобы показать, что (7.3) является решением уравнения (7.2), достаточно выполнить прямую подстановку.

Напряжение $u_C(t)$ в формуле (7.3) представлено в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое называют *свободной составляющей*. Закон изменения свободной составляющей напряжения $u_{\text{св}}(t)$ определяется тремя величинами: начальным состоянием $U_0 = u_C(0)$, установившимся состоянием $u_{\text{уст}}$ и постоянной времени $\tau = R_э C$. Характер переходного процесса определяется знаком постоянной времени. Если $\tau > 0$, то свободная составляющая $u_{\text{св}}(t) = \left(U_0 - u_{\text{уст}}\right)e^{-t/\tau}$ затухает с течением времени. Если постоянная времени отрицательна, то свободная составляющая неограниченно растет и цепь неустойчива.

Величина постоянной времени определяет скорость изменения свободной составляющей. Предположим, что при $t = 0$ $u_{\text{св}}(0) = 1$. Тогда при $t = \tau$ $u_{\text{св}}(\tau) = u_{\text{св}}(0)e^{-1} = 0.38$, а при $t = 4\tau$ $u_{\text{св}}(4\tau) = 0.02$. Таким образом, постоянная времени равна промежутку времени, за который свободная составляющая переходного тока или напряжения изменяется в e = 2.718 раза.

Как следует из уравнения (7.3), теоретически стационарный режим в цепи устанавливается спустя бесконечно большое время после коммутации, поскольку свободная составляющая никогда не обращается в нуль. На практике длительность переходного процесса принимают равной (4–5)τ. Чем больше τ, тем медленнее затухает экспоненциальная функция в (7.3) и тем дольше длится переходный процесс.

Второе слагаемое в формуле (7.3) выражает установившийся, или принужденный, режим, задаваемый источником. Его называют принужденной составляющей. Принужденная составляющая имеет форму, сходную с формой входного сигнала. Так, если входной сигнал постоянен, то и принужденная составляющая будет постоянной, а уравнение (7.3) примет вид

$$u_C(t)=\left(U_0-E_э\right)e^{-t/\tau}+E_э.$$

Уравнение (7.4) будет содержать только первое слагаемое, если в цепи отсутствуют независимые источники. По этой причине первое слагаемое в (7.4) называют *реакцией при нулевом входном сигнале* (реакцией при нулевом входе). Если начальные условия нулевые (т. е. $u_C(0) = U_0 = 0$), то формула (7.4) содержит только второе слагаемое, которое называют *реакцией при нулевом начальном состоянии*.

Таким образом, реакция линейной *RC*-цепи является суммой реакций при нулевом входном сигнале и при нулевом начальном состоянии. Такое представление реакции справедливо для линейных цепей любого порядка. Это свойство является фундаментальным свойством линейных цепей и систем.

Рассмотрим теперь, как изменяются токи и напряжения в ветвях резистивной подсхемы. Для определенности будем считать, что требуется определить закон изменения тока *k*-й ветви $i_k(t)$. В соответствии с принципом наложения его можно представить в виде суммы двух составляющих. Первая составляющая определяется независимыми источниками, действующими в резистивной подсхеме. Вторая составляющая определяется напряжением емкостного элемента $u_C(t)$. Если в цепи действуют только источники постоянных напряжений и токов, то первая составляющая – постоянная величина, не зависящая от времени.

В соответствии с (7.3) вторая составляющая определяется напряжением емкостного элемента в моменты $t = 0$ и $t \to \infty$, а также постоянной времени τ. Поэтому для определения закона изменения тока $i_k(t)$ необходимо знать значения этого тока при $t = 0_+$, $t \to \infty$ и постоянную времени τ.

Рассмотрим порядок расчета переходных процессов в RC-цепях первого порядка. Считаем, что переходный процесс вызван замыканием или размыканием идеального ключа в момент $t = 0$ и нужно определить ток k-й ветви.

1. Анализируем цепь в момент, предшествующий коммутации (т. е. при $t = 0_-$), и определяем напряжение емкостного элемента $u_C(0)$.

2. Заменяем емкостный элемент источником напряжения $E = u_C(0)$ (рис. 7.2, *а*). Анализируя полученную резистивную схему замещения, находим начальные значения искомых токов и напряжений $i_k(0_+), u_k(0_+)$.

3. Рассчитываем установившиеся значения искомых токов и напряжений, анализируя цепь в момент времени $t \to \infty$. Если в цепи действуют источники постоянного напряжения и тока, зажимы, к которым подключен емкостный элемент, размыкаем (рис. 7.2, *б*), затем анализируем полученную резистивную схему замещения.

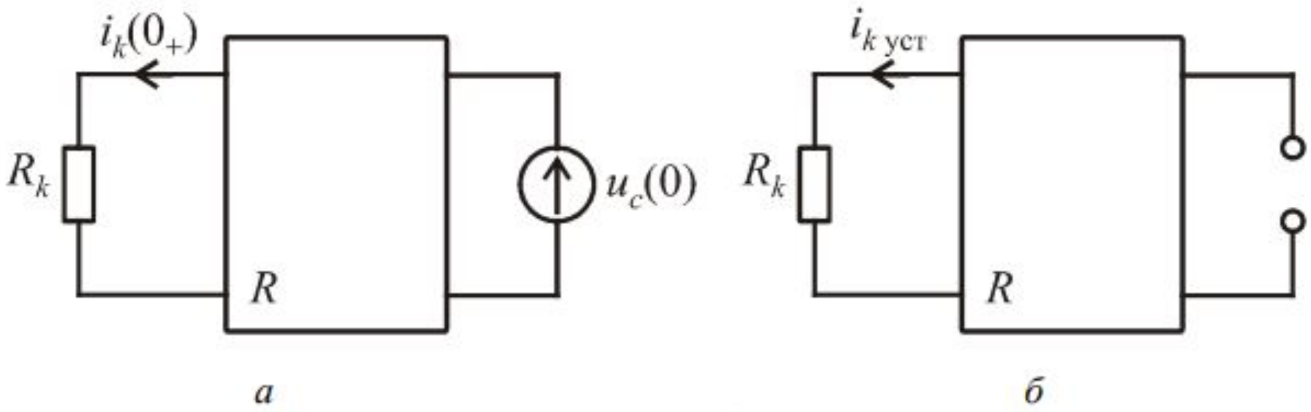

Рис. 7.2

4. Определяем входное сопротивление резистивной цепи со стороны зажимов, к которым подключен емкостный элемент. Рассчитываем постоянную времени цепи по формуле

$$\tau = R_{вх} C.$$

5. Решение записываем в виде

$$i_k(t) = \left[i_k(0_+) - i_{k\,уст}\right] e^{-t/\tau} + i_{уст}. \qquad (7.5)$$

Важно помнить, что все переходные токи и напряжения имеют одинаковую постоянную времени.