ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА КРУПИНА

Москва,
2021

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, взятые в определенном порядке. Любой компланарный с базисными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \qquad (2.1)$$

Числа x и y в правой части равенства (2.1) называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятые в определенном порядке. Любой вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \qquad (2.2)$$

где x, y, z – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Равенство (2.1) называется *разложением вектора* $\vec{a}$ *по базису* на плоскости, а равенство (2.2) – *разложением вектора* $\vec{a}$ *по базису* в пространстве.

Координаты вектора обычно записывают в круглых скобках после буквенного обозначения вектора. Например, запись $\vec{a}\,(2;-1;3)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $2, -1$ и 3 в выбранном базисе.

Два вектора, заданные координатами в фиксированном базисе равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. При сложении двух векторов складываются их соответствующие координаты.

Пример 2.2. При каком значении y векторы $\vec{a}(3;-2;5)$ и $\vec{b}(-6;y;-10)$ коллинеарны?

Р е ш е н и е. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует такое число λ, что выполняется равенство $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Приравнивая соответствующие координаты векторов $\vec{a}$ и $\lambda\vec{b}(-6\lambda;\lambda y;-10\lambda)$, получим:

$$\begin{cases} 3=-6\lambda, \\ -2=\lambda y, \\ 5=-10\lambda, \end{cases}$$

откуда находим, что $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ и $y=4$.

Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице. Векторы ортонормированного базиса на плоскости обозначают $\vec{i}, \vec{j}$, а в пространстве – $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Если при указании координат вектора не дается ссылка на конкретный базис, то по умолчании считают базис ортонормированным.

Декартовой системой координат называется совокупность фиксированной точки O, называемой началом координат, и базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной* (рис.2.5).

Прямые, походящие через начало координат в направлении базисных векторов называются *координатными осями*. Прямая Ox называется *осью абсцисс*, прямая Oy – *осью ординат*, прямая Oz – *осью аппликат*.

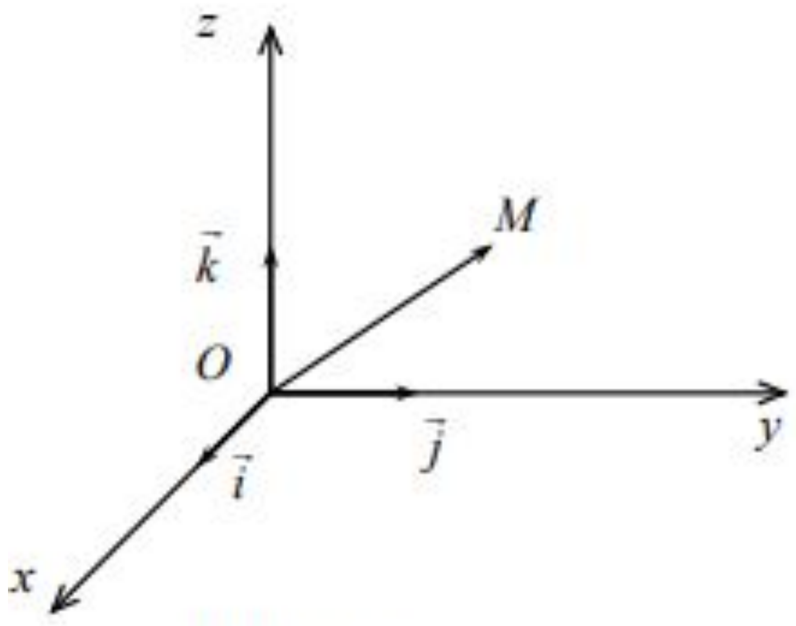

Рис. 2.5

Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами точки* M в рассматриваемой системе координат называются координаты ее радиус-вектора. Первая координата называется *абсциссой*, вторая – *ординатой*, третья – *аппликатой*.

Длина вектора $\vec{a}(x;y;z)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе, определяется равенством

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если в декартовой системе координат даны две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ в соответствующем базисе имеет координаты $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, а расстояние между точками M_1 и M_2 (длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$) находится по формуле:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2.3)$$

Разделить отрезок M_1M_2 *в отношении* λ означает найти точку $M(x;y;z)$, принадлежащую данному отрезку, удовлетворяющую условию $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \lambda\left|\overrightarrow{MM_2}\right|$. Координаты такой точки вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (2.4)$$

При $\lambda = 1$ точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, и формулы (2.4) определяют координаты середины отрезка:

$$x_{ср} = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y_{ср} = \frac{y_1 + y_2}{2};\quad z_{ср} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример 2.3. Даны вершины $A(1;-2), B(-2;4), C(5;-6)$ треугольника ABC. Точка K делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от вершины A. Найти длину отрезка KC.

Р е ш е н и е. Так как $AK:KB = 2:1$, то координаты точки K найдем по формулам (2.4) при $\lambda = 2$:

$$x_K = \frac{1 + 2\cdot(-2)}{1+2} = -1,\quad y_K = \frac{-2 + 2\cdot 4}{1+2} = 2,$$

т.е. $K(-1;2)$. Длину отрезка KC найдем по формуле (2.3):

$$\left|\overrightarrow{KC}\right| = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-6-2)^2} = 10.$$