# Задача линейного программирования. Постановка задачи

Задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача вида

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \geq (\leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \geq (\leq) b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n \geq (\leq) b_m \end{array} \qquad (1.1)$$

$$\begin{array}{c} x_j \geq 0, \ (j = \overline{1, k_1}), \\ x_i \geq 0, \ (i = \overline{1, k_2}), \\ 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n. \end{array} \qquad (1.2)$$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \to \max_{(\min)} \qquad (1.3)$$

Система неравенств (1.1) называется системой ограничений задачи.

(1.2) – условие, накладываемое на переменные. Функция (1.3) – функция цели (целевая функция).

Вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, удовлетворяющий неравенствам (1.1) и (1.2), называется *планом* задачи линейного программирования, или допустимым вектором, или допустимым решением.

Множество всех допустимых векторов $x$ будем обозначать буквой $G$ и называть допустимым множеством или множеством планов.

Вектор $x^* \in G$ называется оптимальным решением или оптимальным планом, если для всех $x \in G$: $f(x^*) \geq f(x)$ ($f(x^*) \leq f(x)$).

Если оптимальное решение может быть найдено, то задача называется разрешимой, если же оптимального решения не существует, то задача называется неразрешимой.

Причины, по которым не может быть найдено оптимальное решение, следующие.

1. Функция $f(x)$ на допустимом множестве $G$ неограничена. Эта задача называется неразрешимой из-за неограниченности целевой функции.

2. Допустимое множество $G$ пусто ($G = \varnothing$), т. е. не существует допустимых решений.

Такая задача называется несовместной.

# Графический способ решения ЗЛП

Если задача линейного программирования имеет две переменные: $x_1$ и $x_2$, то ее можно решить графически.

Решение задачи происходит в два этапа.

На первом этапе необходимо на плоскости изобразить допустимое множество, а на втором найти оптимальную точку, если она существует, в противном случае убедиться в неразрешимости задачи.

*Этап 1. Построение допустимого множества*

Каждое неравенство в рассматриваемой задаче представляет собой полуплоскость, а допустимое множество – пересечение этих полуплоскостей. Если неравенства в задаче заменить уравнениями, то получим уравнения прямой. Каждую прямую можно построить по двум точкам. Для того чтобы выделить необходимую полуплоскость, надо взять точку, не лежащую на прямой, и подставить ее координаты в левую часть неравенства. Если неравенство выполнено, то выбираем полуплоскость, содержащую данную точку, в противном случае другую полуплоскость.

Если в задаче присутствуют условия неотрицательности переменных, то рассматриваем только первый координатный угол.

Если правая часть не равна нулю, то в качестве пробной точки удобнее всего выбрать начало координат (0,0).

*Алгоритм выполнения первого этапа*

Шаг 1: Выделение первого координатного угла (необязательный).
Шаг 2: $i = 1$.
Шаг 3: *i*-е неравенство записывается как уравнение.
Шаг 4: Полагаем $x_1^1 = 0$, $x_2^1$ находим из уравнения.
Шаг 5: Полагаем $x_2^2 = 0$, $x_1^2$ находим из уравнения.
Шаг 6: Через точку $x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}$ и $x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$ проводится прямая.

Шаг 7: В левую часть неравенства подставляется точка с координатами $(0,0)$. Если неравенство выполнено, то выбирается полуплоскость, содержащая начало координат, в противном случае противоположная полуплоскость.

Шаг 8: Если $i < m$, то $i = i + 1$, переходим к шагу 3, иначе шаг 9.

Шаг 9: Допустимое множество получено. Если оно пустое ($G = \varnothing$), то выписывается ответ: «Задача несовместна, иначе переход к этапу 2».

*Этап 2. Поиск оптимальной точки*

Рассмотрим градиент функции $f(x)$. Так как функция $f(x)$ линейна, то ее градиент есть постоянный вектор с координатами $Grad(f)=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Известно, что движение в направлении градиента увеличивает значение функции.

Прямая, перпендикулярная вектору-градиенту, называется линией уровня, т.к. значения функции $f(x)$ в любой точке этой прямой одинаковы.

*Алгоритм выполнения второго этапа*

Шаг 1: Строится вектор-градиент $Grad(f) = (c_1, c_2)^T$.

Шаг 2: Кладется линейка перпендикулярно вектору-градиенту.

Шаг 3: Линейка сдвигается параллельно самой себе по направлению вектора-градиента, пока хотя бы одна точка соответствующей прямой принадлежит допустимому множеству.

Шаг 4: Если при любом положении линейки перпендикулярно вектору-градиенту имеются точки допустимого множества, то выписывается ответ: «Задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции, переход к шагу 10». Иначе шаг 5.

Шаг 5: Находится последняя точка допустимого множества, лежащая на соответствующей линии уровня.

Шаг 6: Если эта точка неединственная, то выбирается точка, которая является пересечением двух прямых, ограничивающих допустимое множество.

Шаг 7: Выписывается система двух уравнений с двумя неизвестными.

Шаг 8: Из системы уравнений находится оптимальная точка $x^* = (x_1^*, x_2^*)$.

Шаг 9: Находится оптимальное значение целевой функции $f(x^*) = c_1x_1^* + c_2x_2^*$.

Шаг 10. Конец.

***Замечание.*** Алгоритм второго этапа рассмотрен в предположении, что рассматривается максимум целевой функции. Если требуется найти минимум целевой функции, то в шаге 3 требуется сдвигать линейку в направлении, *противоположном* вектору-градиенту.

**Пример 1.1.** Решить задачу линейного программирования графически.

$$2x_1 + 3x_2 \le 18, \qquad (1.7)$$

$$-x_1 + 3x_2 \le 9, \qquad (1.8)$$

$$2x_1 - x_2 \le 10, \qquad (1.9)$$

$$x_1 \ge 0,$$

$$x_2 \ge 0,$$

$$f(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \max.$$

*Решение.* Строим допустимое множество в соответствии с первым этапом алгоритма. В результате получаем ограниченную многогранную область (рис. 1.1).

В качестве пробной кочки выбираем начало координат (0, 0).

Для (1.7) $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \le 18$. (Верно: выбирается полуплоскость, содержащая начало координат.)

Для (1.8) $0 + 3 \cdot 0 \le 9$. (Верно: выбирается полуплоскость, содержащая начало координат.)

Для (1.9) $2 \cdot 0 - 0 \le 10$. (Верно: выбирается полуплоскость, содержащая, начало координат.)

На втором этапе находим $Grad(f) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Сдвигаясь по линии уровня в направлении вектора-градиента, получаем оптимальную точку $A$, находим ее координаты. Так как она является точкой пересечения прямых (1.7) и (1.9), то решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 18, \\ 2x_1 - x_2 = 10, \end{cases}$$

$$x_1 = 6,$$

$$x_2 = 2.$$

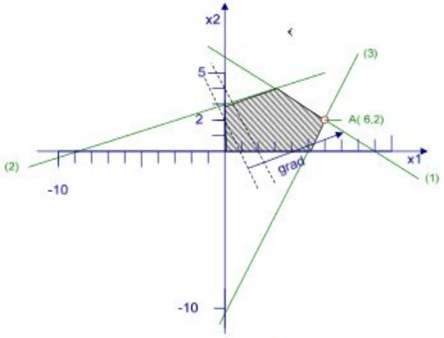


*Рис. 1.1*

В табл. 1.1 заданы точки, по которым строятся прямые (1.7)–(1.9).

В табл. 1.1 заданы точки, по которым строятся прямые (1.7)–(1.9).

Таблица 1.1

| | (1.7) | | (1.8) | | (1.9) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 9 | 0 | –9 | 0 | 5 |
| $x_2$ | 6 | 0 | 3 | 0 | –10 | 0 |

Таким образом, оптимальной точкой $x^*$ является точка $x^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Находим оптимальное значение целевой функции, подставляя значение $x^*$ в функцию:

$$f(x^*) = 24 + 4 = 28.$$

**Пример 1.2.** Решить графически следующую задачу:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 11,$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 2,$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 0,$$
$$x_1 \geq 0,\;\; x_2 \geq 0,$$
$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

*Решение.* Построение допустимого множества выполняется так же, как и в предыдущей задаче (рис. 1.2). В результате получаем неограниченную многогранную область.

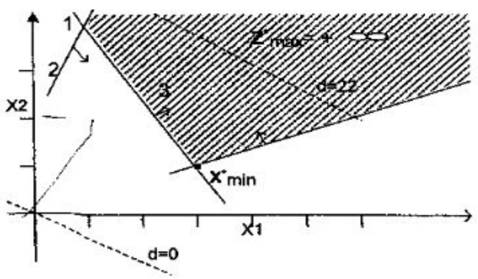


*Рис. 1.2*

На втором этапе решения параллельным перемещением по линиям уровня в направлении вектора-градиента устанавливаем, что такое перемещение можно производить неограниченно. Следовательно, целевая функция неограниченна сверху, т.е. $f(x)_{\max} = \infty$, а сама задача линейного программирования неразрешима из-за неограниченности целевой функции. Заметим, что если при тех же исходных данных требовалось бы целевую функцию минимизировать, то получили бы оптимальное решение в точке $x^*_{\min} = (3, 1)$ с $f(x)^*_{\min} = 10$.

**Пример 1.3.** Решить задачу

$$-x_1 + x_2 \le 3, \qquad (1.10)$$

$$x_1 - 2x_2 \le 3, \qquad (1.11)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

$$f(x) = -x_1 + x_2 \to \max.$$

*Решение.* Допустимое множество в данной задаче имеет вид (рис. 1.3).

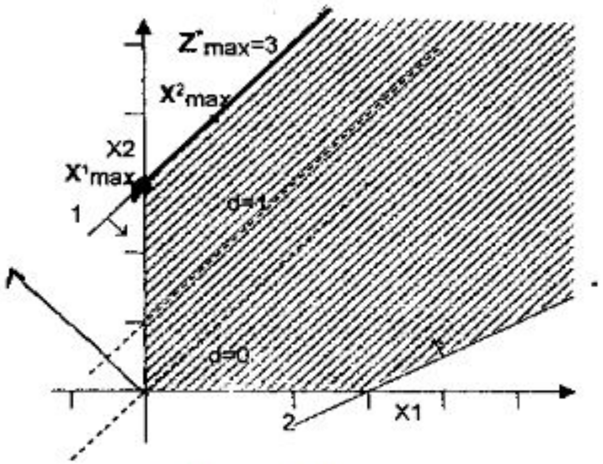


*Рис. 1.3*

Из рисунка видно, что допустимое множество неограниченно, однако оптимальное решение существует, им является луч, выходящий из точки $x^1_{\max}$. Линии уровня целевой функции параллельны прямой $-x_1 + x_2 = 3$, соответствующей первому ограничению. При перемещении линии уровня в направлении вектора-градиента получаем, что линия уровня с максимально возможным значением целевой функции совпадает с прямой: $-x_1 + x_2 = 3$. Таким образом, целевая функция достигает своего максимального значения $f(x)^*_{\max} = 3$ во всех точках луча, выходящего из точки $x^1_{\max} = (0, 3)$. Задача имеет бесчисленное множество решений.

Для того чтобы выписать решение в общем виде, возьмем на луче еще одну точку $x^2_{\max} = (1, 4)$. Уравнение луча записывается следующим образом:

$$x^*_{\max} = (1-\lambda)x^1_{\max} + \lambda x^2_{\max}, \quad \lambda \in [0, \infty).$$

Таким образом, любое решение данной задачи записывается в виде $x^*_{\max} = (\lambda, 3+\lambda), \ \lambda \in [0, \infty)$.

# Задания для самостоятельной работы

Решить задачу линейного программирования графически.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3,$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,$$
$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max.$$

В табл. 1.2 представлены варианты возможных ограничений и целевых функций.

Таблица 1.2

| № п/п | Ограничения | № п/п | Целевая функция |
|---|---|---|---|
| 1 | $2x_1 + 3x_2 \le 18$ | 1 | $f(x) = 4x_1 + 2x_2$ |
| 2 | $-x_1 + 3x_2 \le 9$ | 2 | $f(x) = 3x_1 + x_2$ |
| 3 | $2x_1 - x_2 \le 10$ | 3 | $f(x) = -2x_1 + 7x_2$ |
| 4 | $x_1 + x_2 \ge 2$ | 4 | $f(x) = 5x_1 - x_2$ |
| 5 | $4x_1 - 3x_2 \le 12$ | | |
| 6 | $4x_1 - 3x_2 \ge 12$ | | |
| 7 | $x_1 + 2x_2 \le 6$ | | |
| 8 | $2x_1 - x_2 \le 8$ | | |
| 9 | $2x_1 - x_2 \ge 4$ | | |
| 10 | $x_1 + 2x_2 \ge 6$ | | |
| Общее ограничение | | $x_{1,2} \ge 0$ | |

В табл.1.3 приведены варианты заданий.

Таблица 1.3

| Номер варианта | Ограничения | Целевая функция | Номер варианта | Ограничения | Целевая функция |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1, 2, 5 | 1 | 15 | 2, 3, 4 | 3 |
| 2 | 1, 2, 8 | 2 | 16 | 3, 4, 6 | 4 |
| 3 | 1, 4, 5 | 3 | 17 | 1, 6, 10 | 1 |
| 4 | 1, 2, 4 | 4 | 18 | 6, 7, 8 | 2 |
| 5 | 1, 5, 10 | 1 | 19 | 4, 5, 7 | 3 |
| 6 | 2, 3, 4 | 2 | 20 | 1, 4, 6 | 4 |
| 7 | 2, 3, 6 | 3 | 21 | 1, 2, 5 | 3 |
| 8 | 1, 4, 8 | 4 | 22 | 1, 2, 8 | 4 |
| 9 | 1, 3, 6 | 1 | 23 | 1, 2, 4 | 3 |
| 10 | 2, 4, 8 | 2 | 24 | 1, 3, 6 | 3 |
| 11 | 2, 5, 8 | 3 | 25 | 2, 4, 8 | 1 |
| 12 | 2, 4, 5 | 4 | 26 | 2, 3, 6 | 1 |
| 13 | 1, 4, 5 | 1 | 27 | 1, 4, 6 | 3 |
| 14 | 1, 4, 6 | 2 | 28 | 2, 3, 4 | 1 |

## Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в списке группы

| | |
|---|---|
| | 3 курс 6 группа (ПМИ) |
| | Прикладная математика и информатика |
| | |
| 1 | Баскаков Михаил Юрьевич |
| 2 | Бухтояров Данила Вадимович |
| 3 | Винницкая Наталья Андреевна |
| 4 | Володин Андрей Викторович |
| 5 | Воронова Юлия Дмитриевна |
| 6 | Донник Иван Александрович |
| 7 | Елизаров Павел Васильевич |
| 8 | Калишкин Евгений Олегович |
| 9 | Клишин Никита Александрович |
| 10 | Мозговая Алина Александровна |
| 11 | Петров Евгений Андреевич |
| 12 | Плотников Илья Сергеевич |
| 13 | Титов Андрей Викторович |
| 14 | Толмачев Денис Вадимович |
| 15 | Толочков Артем Павлович |
| 16 | Труфанов Сергей Андреевич |
| 17 | Шевченко Дарья Владимировна |