Основы функционального анализа

Задачи

5. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[0,2]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

$$1)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt\ ; \qquad 2)\ f(x) = x(1)\ ;$$

$$3)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - 2x(2)\ ; \qquad 4)\ f(x) = x(0) - 2\int_1^2 x(t)\,dt\ .$$

1) а) <u>Линейность.</u>

Аддитивность: $f(x_1+x_2)=\int\limits_0^1 (x_1+x_2)(t)\,dt=$

$=\int\limits_0^1 \big(x_1(t)+x_2(t)\big)\,dt=\int\limits_0^1 x_1(t)\,dt+\int\limits_0^1 x_2(t)\,dt=$

$=f(x_1)+f(x_2)\quad (\forall x_1, x_2 \in C[0,2]).$

Однородность: $f(\lambda x)=\int\limits_0^1 (\lambda x)(t)\,dt=$

$=\int\limits_0^1 \lambda\cdot x(t)\,dt=\lambda\cdot\int\limits_0^1 x(t)\,dt=\lambda\cdot f(x)$

$(\forall x\in C[0,2],\ \forall\lambda\in\mathbb{R}).$

б) <u>Ограниченность и норма.</u>

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |x(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|x\|\,dt = \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\|f\| \leq 1 \ (1)}$$

Итак, f – ограниченный линейный ф-л.

<u>Найдем $\|f\|$.</u> Пусть $\bar{x}(t) \equiv 1$.

$\|\bar{x}\| = 1$, $f(\bar{x}) = 1$; след-но, $\|f\| =$

$$= \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq f(\bar{x}) = 1, \text{ т.е. } \underline{\|f\| \geq 1 \ (2)}$$

$$(1), (2) \Longrightarrow \underline{\|f\| = 1.}$$

2) а) Линейность – самостоятельно.

б) Ограниченность и норма.

$$|f(x)| = |x(1)| \leq \max_{0\leq t\leq 2} |x(t)| = \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f\| \leq 1 \ (1)$$

f – огранич-й лин. ф-л.

Найдем $\|f\|$. $\quad \bar{x}(t) \equiv 1$; $\|\bar{x}\| = 1$ и

$$f(\bar{x}) = 1.$$

След-но, $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| \geq f(\bar{x}) = 1$, т.е.

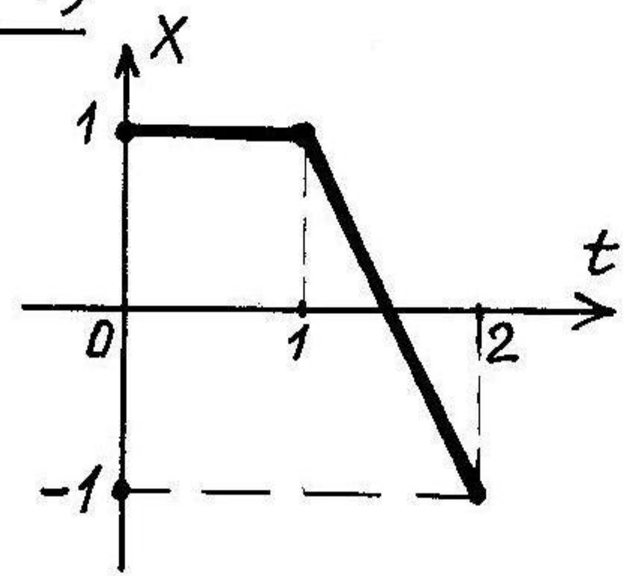
$\|f\| \geq 1 \ (2)$. $\qquad (1), (2) \Rightarrow \|f\| = 1.$

3) а) Линейность — самостоятельно.

б) Ограниченность и норма.

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |x(t)|dt + 2|x(2)| \leq \|x\| + 2\|x\| = 3\|x\|,$$

т.е. $\|f\| \leq 3$ (1)



Найдем такую функцию $\bar{x} \in C[0,2]$, что $\|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 3$.

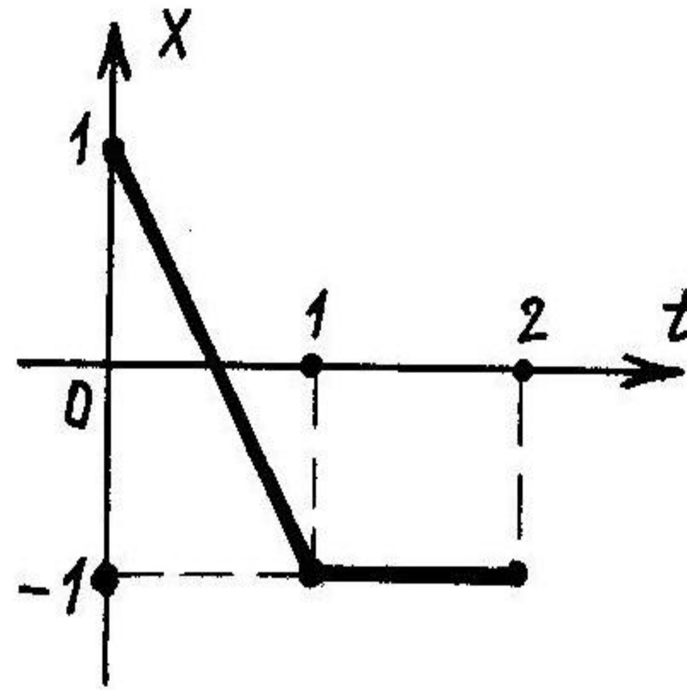
$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ -2t+3, & t \in (1,2]. \end{cases}$$

Тогда $\|f\| \geq |f(\bar{x})| = 3 \Rightarrow \|f\| \geq 3$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow \|f\| = 3$.

4) $\underline{\|f\| \le 3 \ (1)}$

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} -2t+1, & t \in [0,1], \\ -1, & t \in (1,2]. \end{cases}$$



$f(\bar{x}) = 3, \ \|\bar{x}\| = 1.$

$\underline{\|f\| \ge |f(\bar{x})| = 3 \ (2)}$; $(1),(2) \Rightarrow \underline{\|f\| = 3}$.

6. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[-1,1]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

1) $f(x) = -2x(-1) + x(0) - x(1)$; 2) $f(x) = x(-1) + 2x(0) - x(1)$;

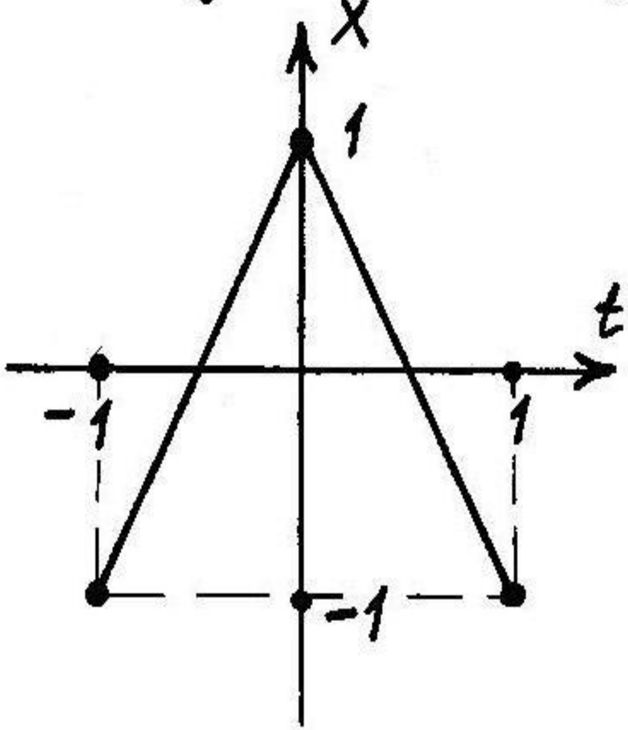
$$3)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - x(-1)\ .$$

1) $|f(x)| \le 2\cdot|x(-1)| + |x(0)| + |x(1)| \le$

$\le 2\cdot\|x\| + \|x\| + \|x\| = 4\|x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f – ограничен и $\underline{\|f\| \le 4 \ (1)}$

Найдем $\bar{x}(t)$, такую, что $\|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 4$.



Аналитически описать самост-но!

$\underline{\|f\| = 4.}$

2) и 3) - самостоятельно !

§ 10. Обратимый и обратный операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства и A – линейный (возможно, неограниченный) оператор из E в F, то есть $A : E \to F$.

Оператор A называется *обратимым*, если

$$(\forall\, y \in F)(\exists \text{ единственный } x \in E)[\, Ax = y\,]\,.$$

Таким образом, в случае обратимого оператора A определено отображение A^{-1} из F в E, которое всякому $y \in F$ ставит в соответствие элемент $A^{-1}y = x \in E$, такой, что $Ax = y$.

Теорема 10.1. *Пусть E, F — линейные нормированные пространства, $A : E \to F$ — обратимый линейный оператор. Определенное выше отображение $A^{-1} : F \to E$ является линейным оператором.*

Доказательство. Пусть выбраны элементы $y_1, y_2 \in F$ и числа α_1, α_2. Обозначим

$$x_1 = A^{-1}y_1 \in E, \qquad x_2 = A^{-1}y_2 \in E\,.$$

В силу линейности и обратимости оператора A получим:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\,.$$

Из определения отображения A^{-1} следует, что

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2\,. \quad \square$$

Линейный оператор A^{-1}, определенный по линейному обратимому оператору A, называется оператором, *обратным* к оператору A.

Из определения оператора A^{-1} следует, что

$$(\forall\, y \in F)[\, AA^{-1}y = y]\,, \qquad (\forall\, x \in E)[\, A^{-1}Ax = x]\,.$$

Для линейного оператора A определим множество

$$Ker A = \{x \in E \,|\, Ax = \Theta\}\,,$$

называемое *ядром* или *нуль-многообразием* оператора A.

Нетрудно увидеть, что $Ker A$ – линейное многообразие в пространстве E (доказать!).

Образом линейного оператора A называется множество

$$ImA = \{Ax \,|\, x \in E\}.$$

ImA – линейное многообразие в пространстве F (доказать!).

Теорема 10.2. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства и $A : E \to F$ линейный оператор. Оператор A обратим тогда и только тогда, когда $KerA = \{\Theta\}$ и $ImA = F$.*

Доказательство. Необходимость. Если оператор A обратим, то уравнение $Ax = \Theta \in E$ имеет единственное решение $x = A^{-1}\Theta = \Theta \in E$, то есть $KerA = \{\Theta\}$. Очевидно, что в случае обатимости A $ImA = F$.

Достаточность. Пусть теперь $KerA = \{\Theta\}$ и $ImA = F$. В силу того, что $ImA = F$, для всякого $y \in F$ существует $x \in E$, такой, что $Ax = y$. Покажем единственность такого $x \in E$.

Предположим, что для $y \in F$ существуют $x_1, x_2 \in E$, такие, что $Ax_1 = y$ и $Ax_2 = y$. Тогда $A(x_1 - x_2) = \Theta$, то есть $x_1 - x_2 \in KerA = \{\Theta\}$. Следовательно, $x_1 - x_2 = \Theta \Rightarrow x_1 = x_2$.

Итак, элемент $x \in E$, такой, что $Ax = y$, единственен. Значит, оператор A обратим. $\square$

Пусть E, F – линейные нормированные пространства и линейный оператор $A : E \to F$. Оператор A называется *непрерывно обратимым*, если оператор A обратим и обратный $A^{-1} \in L(F, E)$.

Теорема 10.3. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства и оператор $A \in L(E, F)$. И пусть существует оператор $B \in L(F, E)$, такой, что $BA = I_E$ и $AB = I_F$ (операторы I_E и I_F – тождественные на E и F соответственно). Тогда оператор A непрерывно обратим и $A^{-1} = B$.*

Доказательство. Пусть элемент $x \in Ker A$, то есть $Ax = \Theta$. Следовательно, $x = I_E x = BAx = B\Theta = \Theta$. Получили, что $Ker A = \{\Theta\}$.

При этом $(\forall\, y \in F)(\exists\, x = By \in E)[\, Ax = ABy = y\,]$, то есть $Im A = F$.

Итак, в силу предыдущей теоремы, оператор A обратим, причем $A^{-1} = B$. $\square$

§ 11. Теорема Банаха об обратном операторе

Теорема 11.1 (Банах). *Пусть* E, F – *банаховы пространства. Если оператор* $A \in L(E, F)$ *обратим, то он непрерывно обратим, то есть* $A^{-1} \in L(F, E)$.