Лекция. Ряды

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

Ряды. Лекция 6-го ноября 2020 года

§ Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема (о предельном переходе в равномерно сходящихся функциональных последовательностях). Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$ (т.е. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$), причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существует конечный предел

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = A_n \qquad (*)$$

где a – предельная точка множества X. Тогда существует конечный предел числовой последовательности $\{A_n\}_1^\infty$ (то есть $\exists \lim_{n\to\infty} A_n$), а также предел предельной функции $f(x)$ при $x \to a$, причём

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Док-во) Замечание. Точка a может равняться $\infty, -\infty, +\infty, a+0, a-0$.

Пусть „a" — конечная точка и x стремится к „a" двусторонним образом.
Согласно условию $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда по критерию Коши равномерной сходимости следует, что для

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_0, \forall m > N_0 \text{ и } \forall x \in X \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to a$, получим согласно условию (*), что

$$|A_n - A_m| \le \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \quad (2)$$

то есть последовательность $\{A_n\}^{\infty}$, удовлетворяет критерию Коши.
Поэтому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ обозначим его A,

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Переходя в (1) для каждого фиксированного $x \in X$ к пределу при $m \to \infty$, получим, что для $\forall n > N_0(\varepsilon)$ и $\forall x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

Если же перейти к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (2), то получим, что для $\forall n > N_0 \Longrightarrow$

$$|A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Возьмём произвольное $n > N_0$. Так как $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = A_n$, то для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow$

$|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для всех этих $x : 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow$

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Таким образом, в случае предельного перехода $x \to a$ (a - конечное число) теорема доказана.

Если предельный переход $x \to a$ заменяется на один из других возможных предельных переходов: $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ то при доказательстве теоремы неравенство $0 < |x - a| < \delta$ заменяется на. неравенства из таблицы

предельный переход	неравенство
$x \to a$	$0 < \lvert x-a \rvert < \delta$
$x \to a+0$	$0 < x-a < \delta$
$x \to a-0$	$0 < a-x < \delta$
$x \to \infty$	$\lvert x \rvert > \delta$
$x \to +\infty$	$x > \delta$
$x \to -\infty$	$x < -\delta$

#

Применяя доказанную теорему к функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_1^\infty$ частичных сумм функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$, получим теорему

Теорема (о почленном переходе к пределу в равномерно сходящихся функциональных рядах) Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ равномерно сходится на множестве X к сумме $S(x)$, (то есть $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$), причем для $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \lim_{x\to a} U_n(x) = a_n$ (a_n – конечное число), a – предельная точка множества X.

Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, причем предел суммы ряда

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{или}$$

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to a} U_n(x)\right)$$

То есть можно менять местами переход к пределу при $x \to a$ и бесконечное суммирование по „n".

Док-во: Так как эта теорема является только перефразировкой предыдущей теоремы, то в специальном доказательстве не нуждается #

Применяя вышеуказанные теоремы к функциональным последовательностям и функциональному ряду, который состоит из непрерывных функций можно убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Теорема (о непрерывности в точке предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности)

Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ к предельной функции $f(x)$ (то есть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$), причем для $\forall n \in N$ $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$.
Тогда предельная функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$ #

Теорема (О непрерывности в точке суммы равномерно сходящегося функционального ряда) Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ к сумме $S(x)$ (то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$), причём для $\forall n \in N$ $u_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$.
Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$ #

Из этих двух теорем вытекают ещё две теоремы

Теорема (О непрерывности на отрезке предельной функции равномерно сходя-

<u>щейся последовательности непрерывных функций)</u> Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ к функции $f(x)$ (то есть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$), причём для $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Тогда предельная функция $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. #

<u>Теорема (О непрерывности на отрезке суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций)</u> Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ к сумме $S(x)$ (то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$), причём для $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Тогда сумма ряда $S(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. #

<u>Следствие</u> Если $f_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ ($u_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$ для $\forall n \in \mathbb{N}$) и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $\left(S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)$, $x \in [a,b]$ причём $f(x) \notin \mathbb{C}[a,b]$, $(S(x) \notin \mathbb{C}[a,b])$

Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows} f(x)$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows} S(x)\right)$

Док-во Будем доказывать это методом „от противного". Пусть $f_n(x) \in C[a,b]$, для $\forall n \in N$ ($U_n(x) \in C[a,b]$ для $\forall n \in N$) и $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ ($\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$). Тогда согласно предыдущей теореме $f(x) \in C[a,b]$ ($S(x) \in C[a,b]$), что противоречит условию $f(x) \notin C[a,b]$ ($S(x) \notin C[a,b]$). Полученное противоречие и доказывает следствие #.

Замечание Требование равномерной сходимости в последних двух теоремах является достаточным условием непрерывности предельной функции (суммы ряда). Однако оно не является необходимым условием, то есть последовательность $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ непрерывных функций может поточечно сходиться к непрерывной функции $f(x)$, но не равномерно.

Пример $f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}$, $x \in [0,1]$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$$

Докажем, что $f_n(x) \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} f(x) \equiv 0$

$\exists\, \varepsilon = \frac{1}{e} > 0 : \forall N_0 \in \mathbb{N}\ \exists n_1 = N_0 + 1 > N_0$ и $\exists x' = \frac{1}{n} \in [0,1] : |f_n(x') - f(x')| = f_n(x') = n^2 x' \cdot e^{-n^2 x'^2} = \frac{n}{e} > \frac{1}{e}$ Следовательно,

$$f_n(x) \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} f(x) \equiv 0 \qquad \#$$

<u>Теорема</u> (<u>Дини для функциональной последовательности</u>) Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ такова, что: 1) для $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \in C[a,b]$ 2) для $\forall x \in [a,b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ монотонна, 3) предельная функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in C[a,b]$.

Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$

<u>Док-во</u>) Без ограничения общности можно считать, что $f_n(x) \nearrow$ (то есть монотонно возрастает). Обозначим $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Ясно, что $\varphi_n(x) \in C[a,b]$ и для $\forall x \in [a,b]$ числовая последовательность $\varphi_n(x)$ такова, что $\varphi_n(x) \geq 0$ и $\varphi_n(x) \searrow 0$ (то есть монотонно убывает и стремится к нулю)

Таким образом имеем

$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \dots \geq \varphi_n(x) \geq \dots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) \equiv 0$ ($*$)

для $\forall x \in [a, b]$.

Для доказательства того, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{[a,b]} f$ достаточно для $\forall \varepsilon > 0$ найти хотя бы один номер n_1: $\forall x \in [a, b]$ имеет место неравенство:

$$0 \leq \varphi_{n_1}(x) < \varepsilon \qquad (**)$$

(Согласно ($*$) для $\forall n > n_1$ неравенство ($**$) также будет выполняться)

Докажем это методом „от противного".

Пусть $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in N \; \exists x_n \in [a, b]$:

$$\varphi_n(x_n) \geq \varepsilon \qquad (***)$$

Числовая последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ ограничена. Поэтому по теореме Больцано–Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$

Но для $\forall m \; \exists k : n_k \geq m$. Поэтому из ($*$) и ($***$) следует, что

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon.$$

Это означает, что $\varphi_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon$ функции $\varphi_m(x)$ непрерывны в каждой точке $x \in [a,b]$. Следовательно,

$$\varphi_m(x_0) = \lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon,$$ то есть

$\varphi_m(x_0) \geq \varepsilon$, $m = 1, 2, \ldots$. А это противоречит тому, что $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) = 0$ (согласно (*)). Полученное противоречие и доказывает справедливость (**), из которого и следует что

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x) \qquad \#$$

Теорема (Дини для функциональных рядов). Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ такой, что: 1) для $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n(x) \in C[a,b]$, 2) для $\forall x \in [a,b]$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n(x) \geq 0$ (или $u_n(x) \leq 0$), 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$, $S(x) \in C[a,b]$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$$

Док-во #