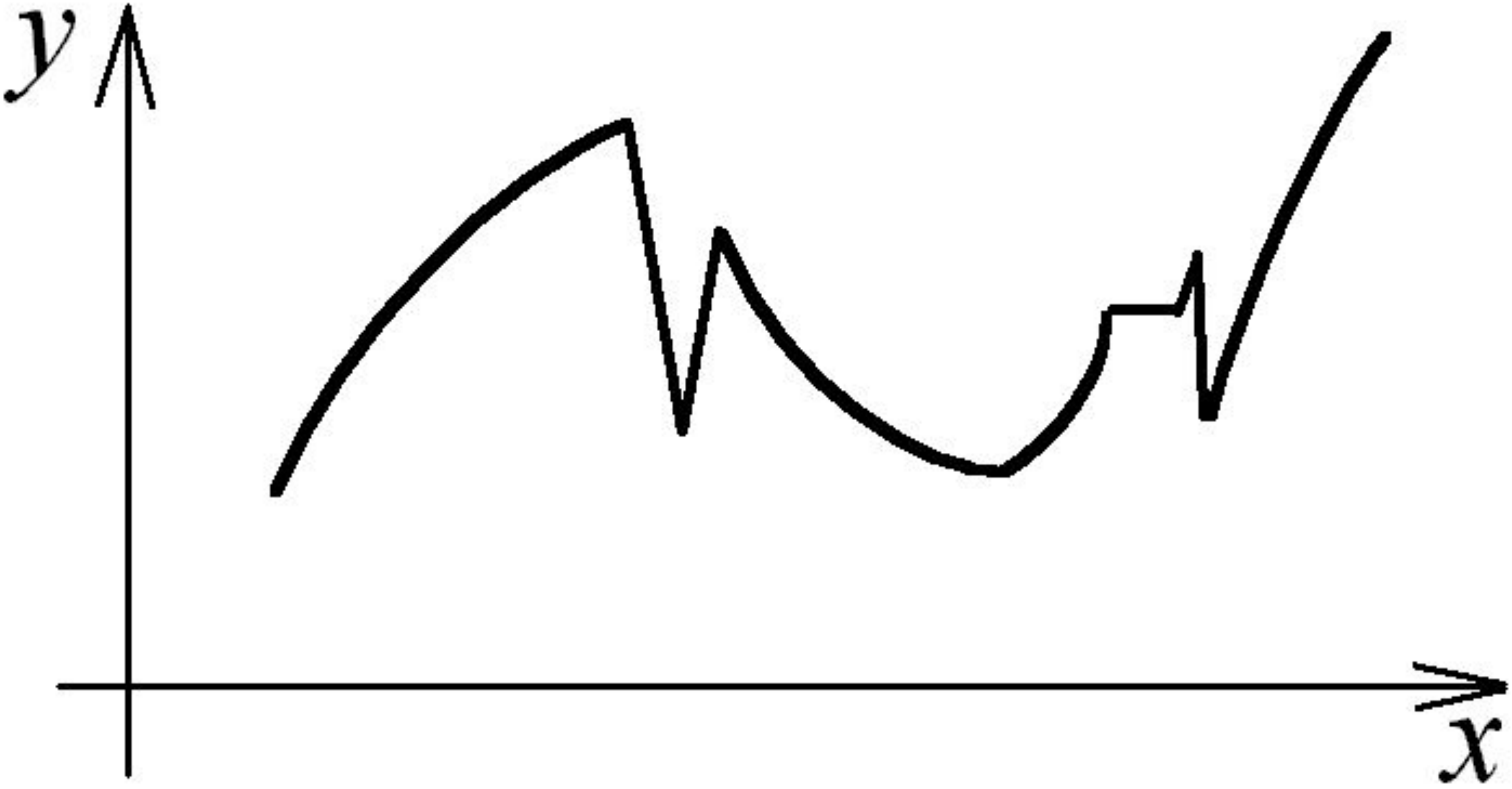
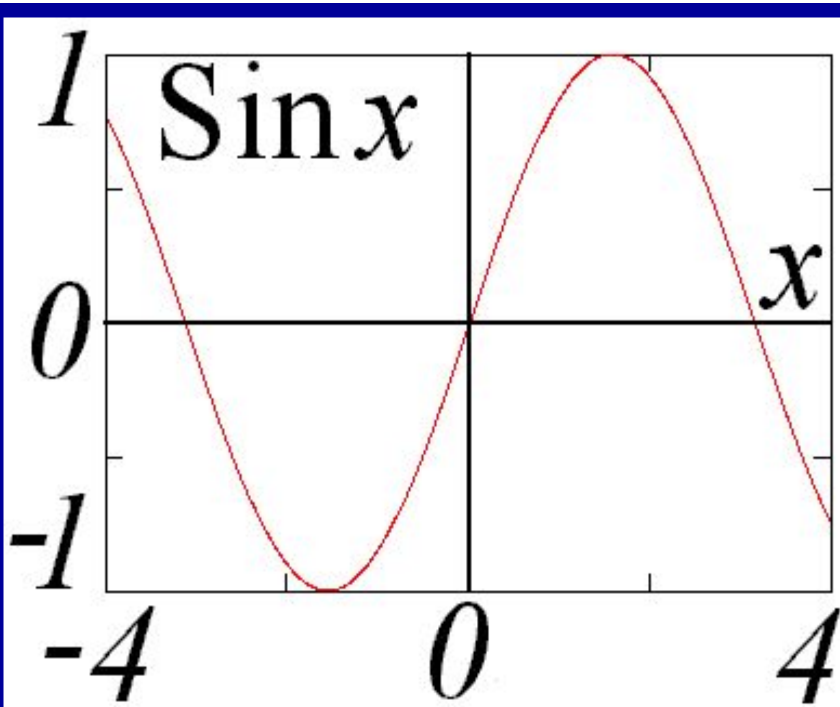
Тригонометрические ряды (ряды Фурье)

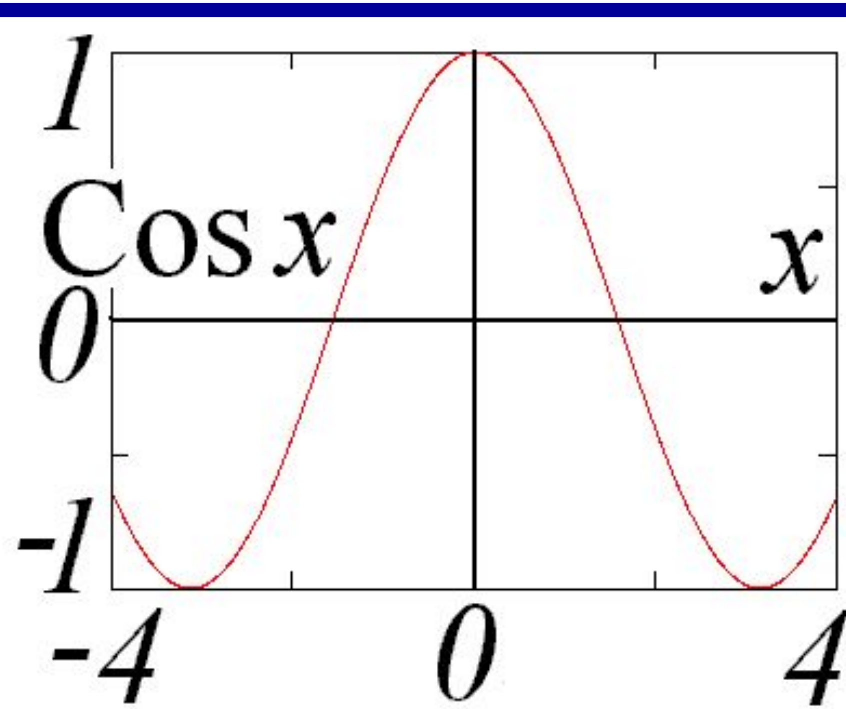


$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots\,;\quad u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots\,;\quad u_n(x)=x^{n-1}$$

$$\cos x\ ,\quad \sin x\ ;\quad \cos 2x\ ,\quad \sin 2x\ ;\ldots;\quad \cos nx\ ,\quad \sin nx\ ;\quad T=2\pi$$

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+$$
$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]\ \text{— ряд Фурье}$$





Теорема *Если сходится числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n| + |b_n|\right],$$

то сходится и ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right] = f(x),$$

причем $f(x)$ *— сумма ряда — является периодической функцией с* $T = 2\pi$.

Некоторые свойства гармоник

$\sin x$ — нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$;

$\cos x$ — четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0\ ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos nx\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\, dx = 0\ ;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0\ ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0\ ; \quad n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2nx \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\, dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi$$

Система из:

$\text{const}\ ;\quad \cos x\ ,\quad \sin x\ ;\quad \cos 2x\ ,\quad \sin 2x\ ;\ldots;\quad \cos nx\ ,\quad \sin nx\ ;\ldots$

ортогональная система функций: $f(x) * g(x) = 0$

например,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

Нахождение коэффициентов ряда Фурье заданной функции

Задана $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$, предположим, что:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right], \qquad (8.1)$$

где a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$ — неизвестны.

Проинтегрируем обе части равенства (8.1), причем , правую часть — почленно

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}[0+0] \Longrightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

Умножим обе части равенства на $\cos x$ и проинтегрируем обе части равенства (8.1), причем , правую часть — почленно

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin nx\,dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 0 + a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx + b_1\cdot 0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n\cdot 0 + b_n\cdot 0\right]$$

т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = a_1\cdot\pi \implies \boxed{a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx}$$

Аналогично, при умножении (8.1) на $\sin x$ и интегрировании получим

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx}$$

Чтобы найти a_n, надо умножить на $\cos nx$ и проинтегрировать.

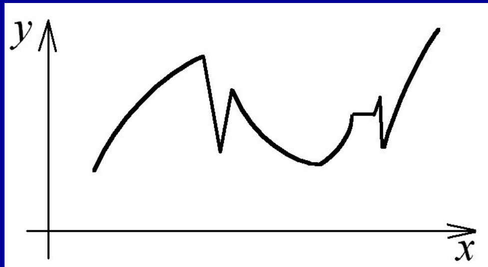
Чтобы найти b_n, надо умножить на $\sin nx$ и проинтегрировать.

$$\boxed{\begin{gathered} a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\ ; \quad b_n = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\ ; \ (8.2) \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

т.е. по заданной $f(x)$ коэффициенты находятся однозначно.

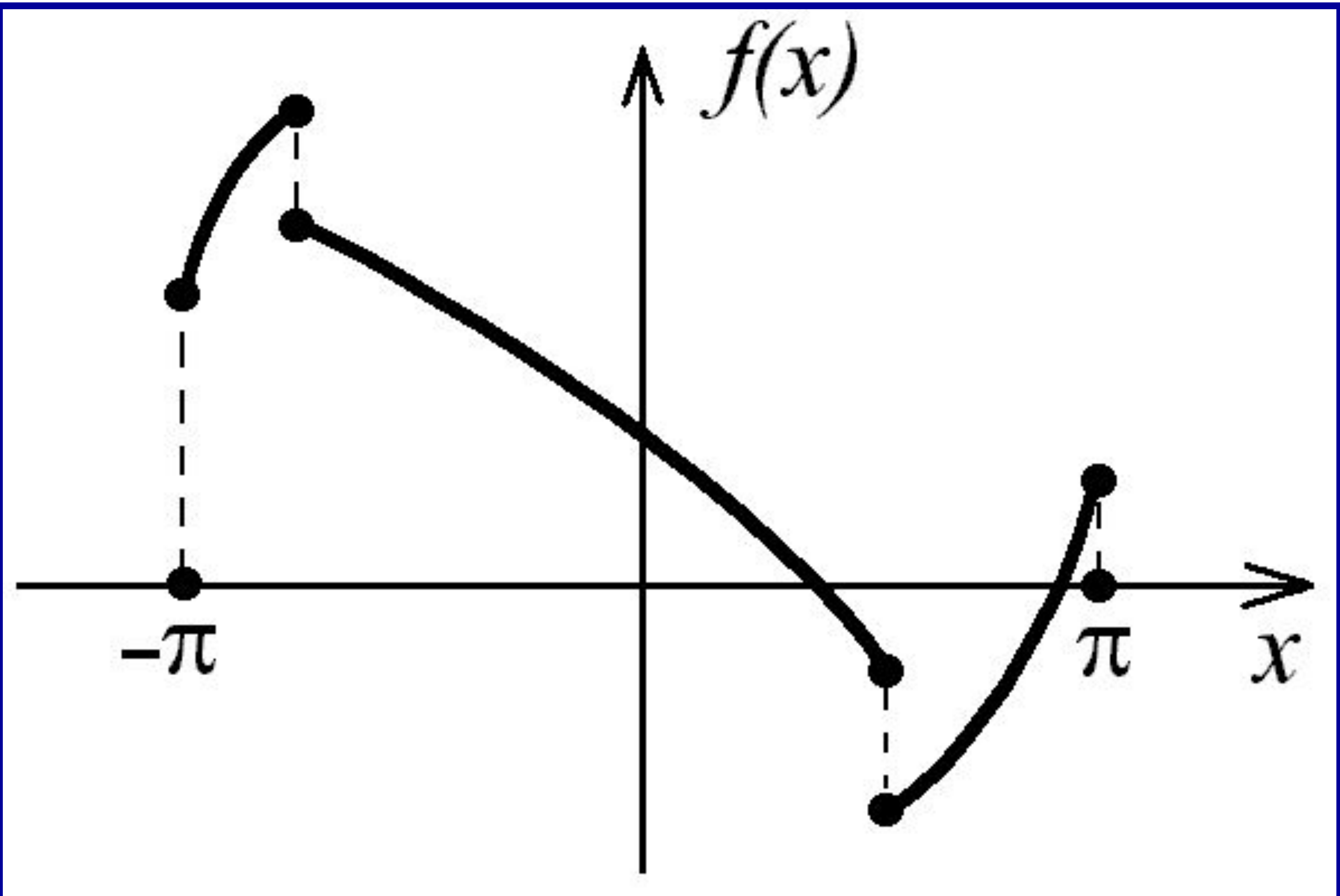
Только необходимо интегрировать, например:

$f(x)$ — **непрерывна или кусочно непрерывна**.



Теорема о сходимости ряда Фурье к исходной функции.

Пусть на отрезке $[-\pi, +\pi]$ *задана функция* $f(x)$ *либо непрерывная, либо разрывная, но тогда имеющая на этом отрезке конечное число разрывов и только 1-го рода.*



Пусть по формулам (8.2) найдены коэффициенты a_n, b_n *и составлен ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx \right] , \tag{8.3}$$

Тогда получившийся ряд (8.3) сходится при всех значениях x, *т.е. при всех* x *определяет некоторую функцию*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx \right] = f^*(x) ,$$

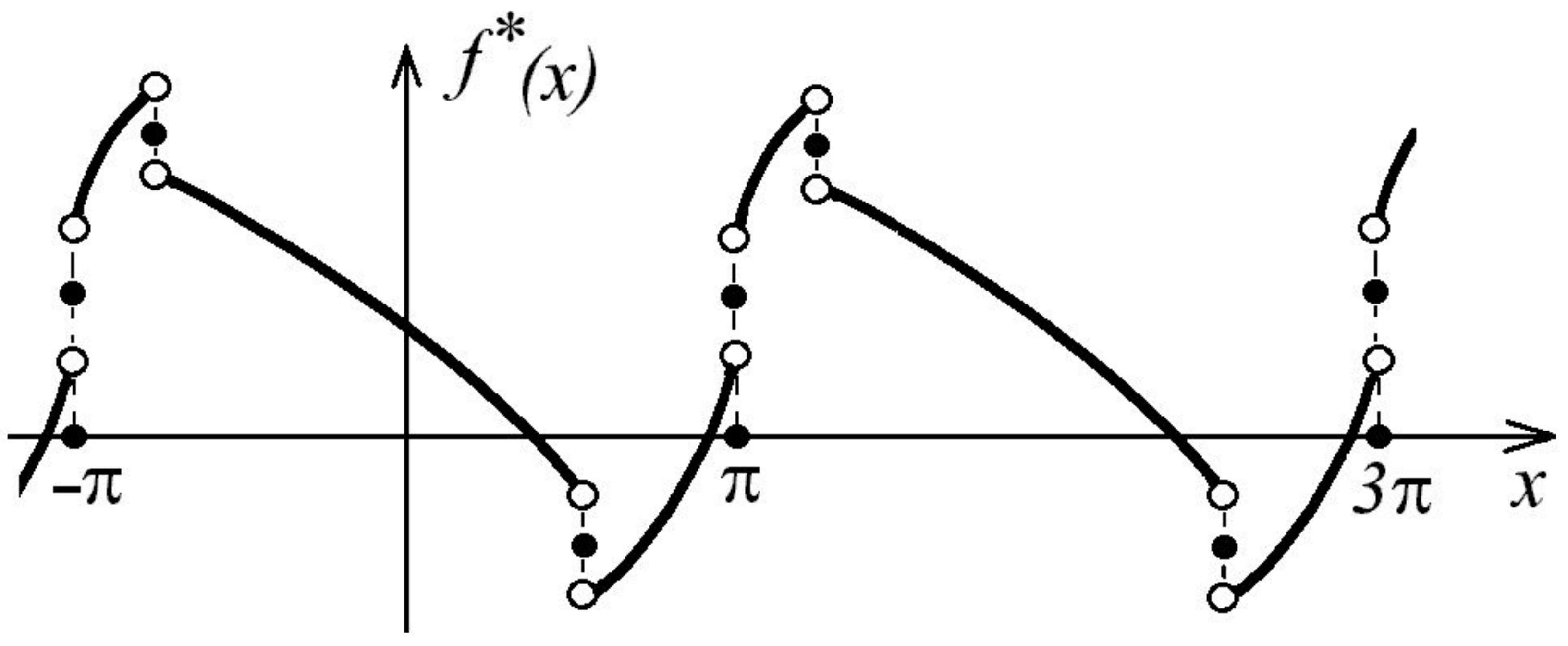
где функция $f^*(x)$ *обладает следующими свойствами:*

1. $f^*(x) = f^*(x + 2\pi)$, т.е. $f^*(x)$ – периодическая;

2. $f^*(x_o) = f(x_o)$, если в точке $x = x_o \in (-\pi, +\pi)$ $f(x)$ — непрерывна;

3. $f^*(x_o) = \frac{1}{2}[f(x_o - 0) + f(x_o + 0)]$, если в точке $x = x_o \in (-\pi, +\pi)$ $f(x)$ имеет разрыв первого рода;

4. $f^*(-\pi) = f^*(+\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi) + f(+\pi)]$.



Пример 8.1.

Функцию $f(x) = x$, $-\pi < x < +\pi$ разложить в ряд Фурье.

$f(-x) = -x = -f(x)$ нечетная функция, поэтому $a_n = 0$ т.к.

$x \cdot \cos nx$ нечетные функции, поэтому $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} x \cos nx \, dx = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} x \sin nx \, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} U = x \ , & dU = dx \\ dV = \sin nx \, dx \ , & V = \frac{1}{n} \int \sin nx \, d(nx) = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] =$$

$$= \left[\int\limits_a^b U \, dV = (UV)\big|_a^b - \int\limits_a^b V \, dU \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n} x\cos nx \Big|_{-\pi}^{+\pi} + \underbrace{\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\, dx}_{=0} \right) =$$

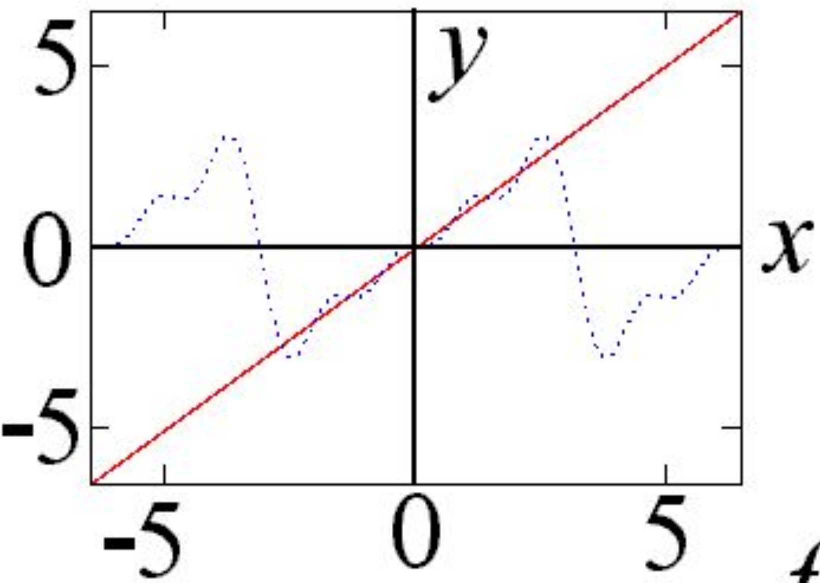
$$= -\frac{1}{\pi n}\left[\pi \cos n\pi - (-\pi)\cos(-n\pi)\right] =$$

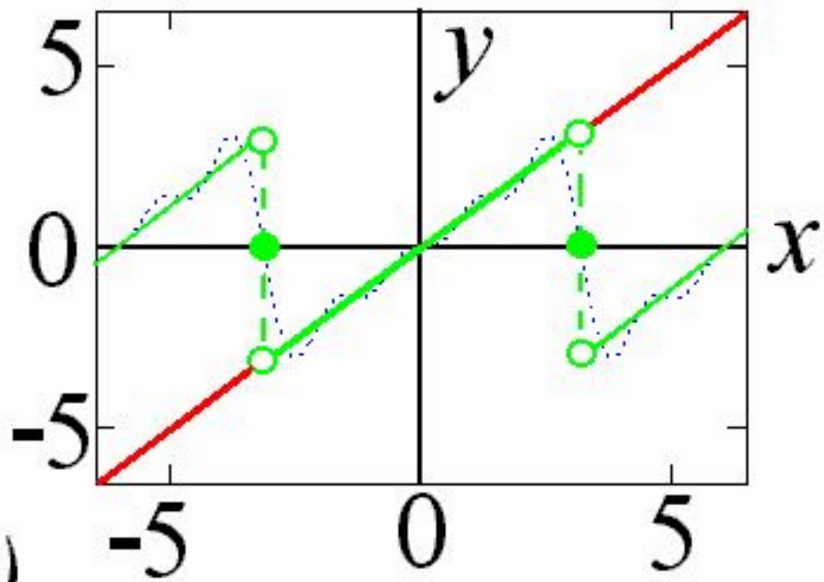
$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot 2\pi \cos n\pi = -\frac{2\cos n\pi}{n}\ ;$$

$$\cos n\pi = \begin{cases} +1\ , & n = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ -1\ , & n = 1, 3, 5, 7, \ldots \end{cases} \quad \Bigg\| \quad b_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{n}\ , & n \text{ — четное} \\ \dfrac{2}{n}\ , & n \text{ — нечетное} \end{cases}$$

$$f^*(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x + \ldots +$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx + \ldots = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\ ; \quad f^*(\pm\pi) = 0$$



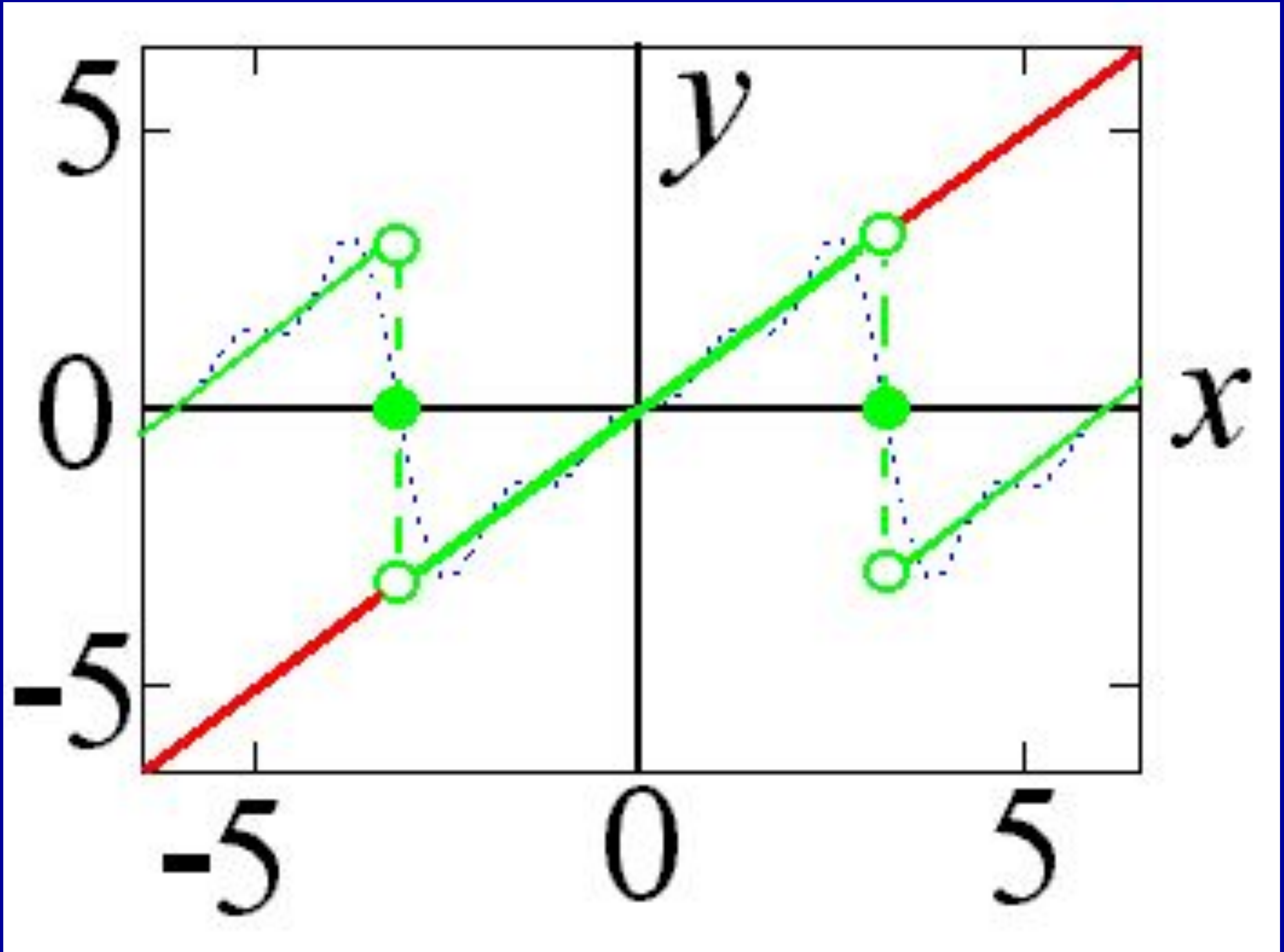


x

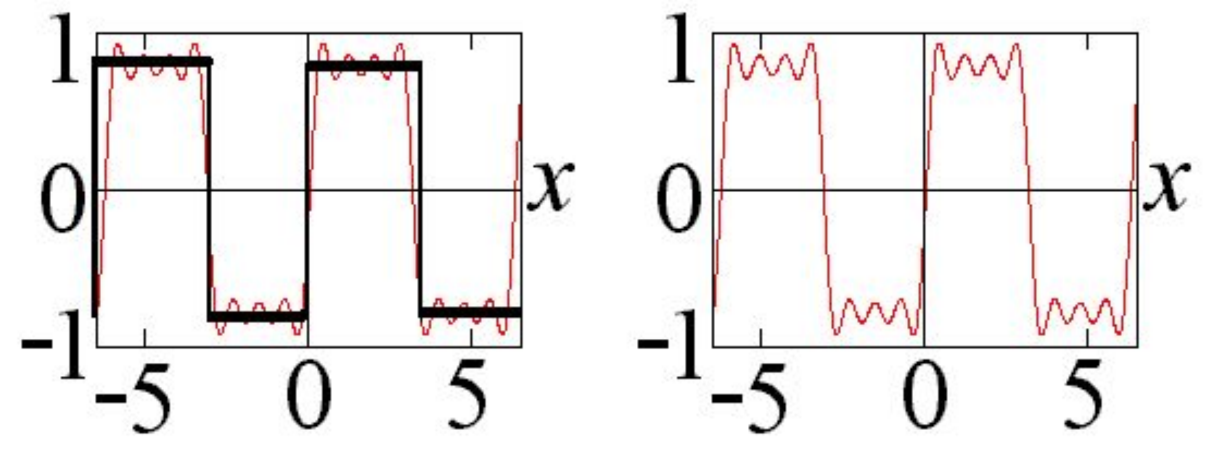
$f^*(x)$

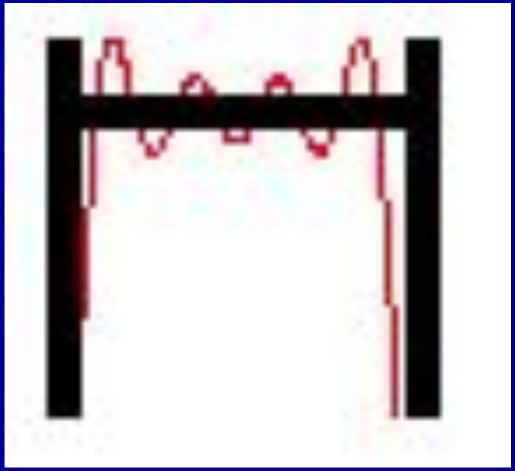
$$2\left(\mathrm{Sin}\, x - \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\, 2x + \frac{1}{3}\mathrm{Sin}\, 3x - \frac{1}{4}\mathrm{Sin}\, 4x\right)$$

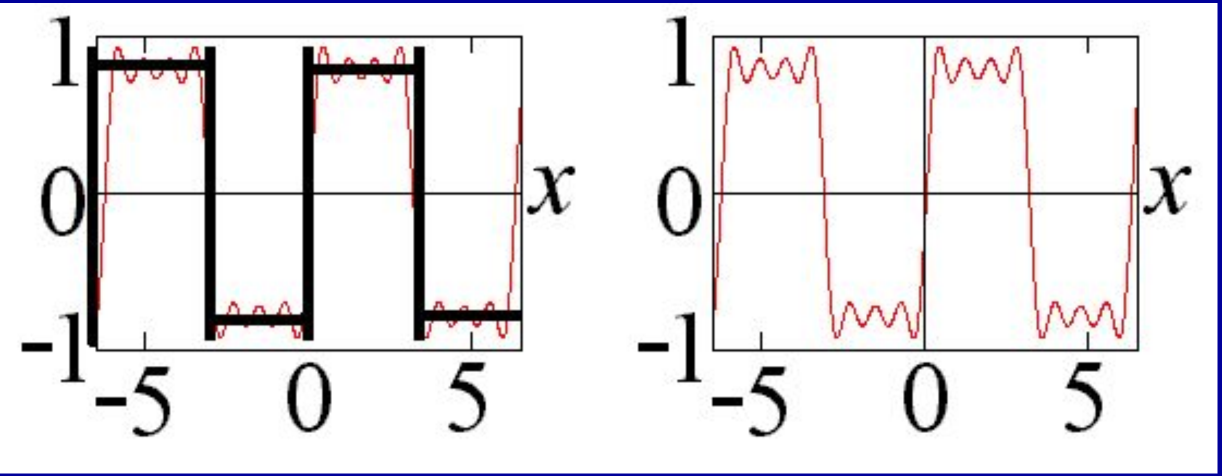
Сходимость в среднем ряда Фурье к своей функции



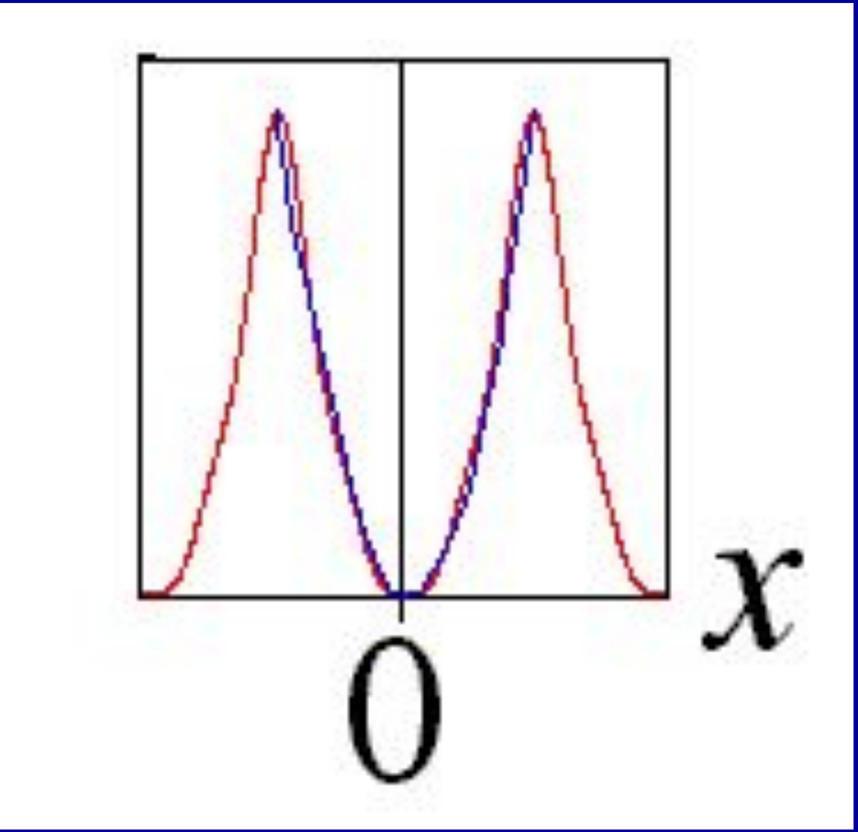
Явление Гиббса

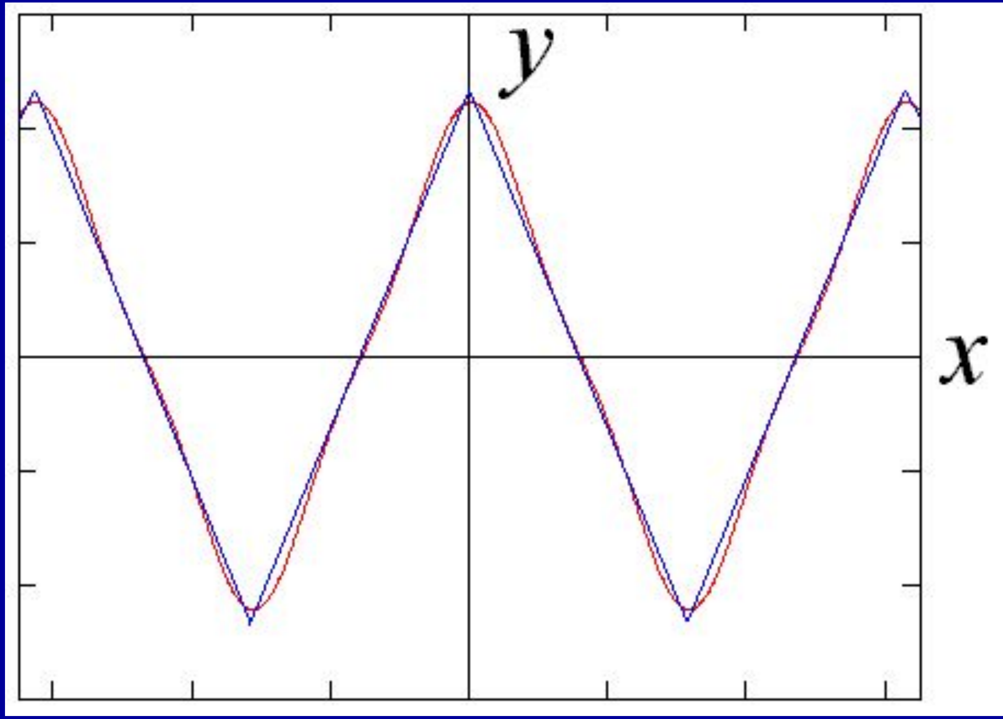






Гладкие и непрерывные функции отрезками ряда Фурье приближаются хорошо





Применение рядов Фурье для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big] \ \text{— ряд Фурье}$$

$$y'' - y = f(x)\ ; \quad y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}\ ; \tag{9.1}$$

$$k^2 - 1 = 0\ ; \quad k_{1,2} = \pm 1\ ; \quad y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

$y_{\text{ч.н.}}$ — по виду правой части, т.е. по виду $f(x)$:

$$f(x) = x\ ; \ -\pi < x < +\pi\ ; \ T = 2\pi\ ; \ f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos nx + B_n \sin nx \right] \qquad (9.2)$$

где A_0, A_n, B_n — неизвестные. Подставляем (9.2) в (9.1); дифференцируя почленно (это действие пока не обосновано)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(-1)n^2 \cos nx + B_n(-1)n^2 \sin nx \right] -$$

$$-\frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos nx + B_n \sin nx \right] = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

Приравниваем коэффициенты при свободных членах и при одинаковых косинусах, синусах:

$$\text{const} \,\| \; -\frac{A_0}{2} = 0 \implies A_0 = 0$$

$$\cos nx \,\| \, A_n(-1)n^2 - A_n = 0 \implies -(n^2+1)\,A_n = 0 \implies A_n = 0,\, n = 1,2,\ldots$$

$$\sin nx \,\|\, B_n(-1)n^2 - B_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$(-1)(n^2+1)B_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$B_n = (-1)^n \frac{2}{n(n^2+1)}\,, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

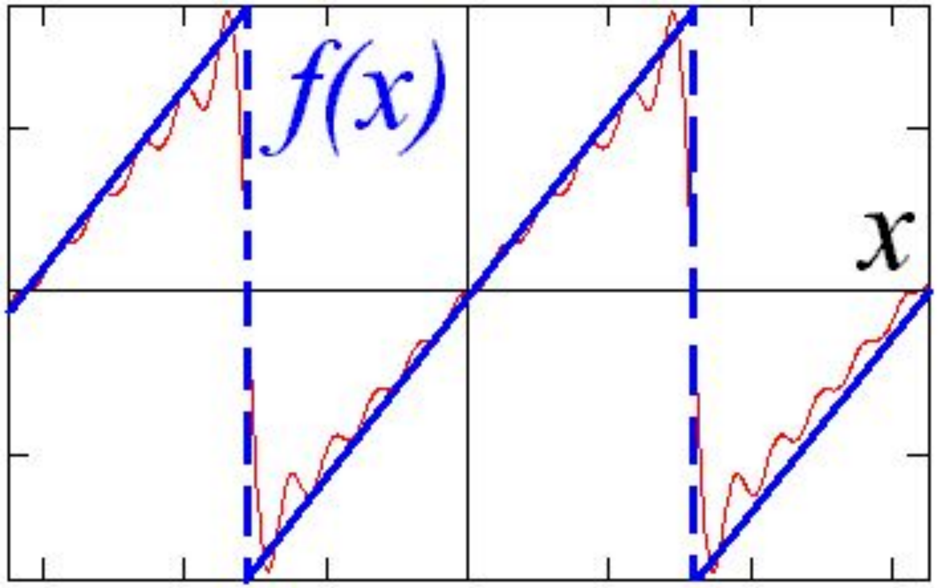
Следовательно,

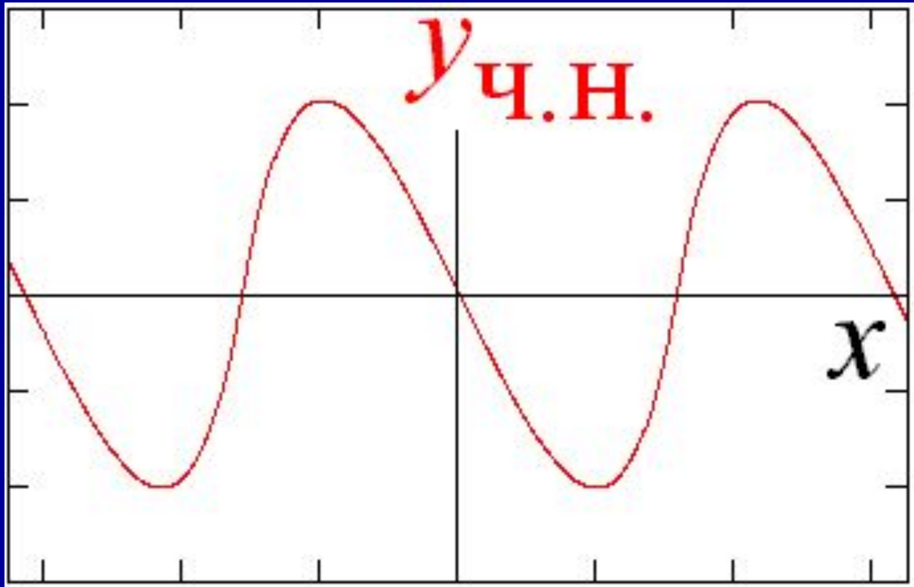
$$\boxed{y_{\text{ч.н.}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n(n^2+1)}}$$

Этот ряд сходится абсолютно, а также сходятся ряды, полученные после однократного и двукратного дифференцирования.

Дифференцировать сходящийся ряд Фурье можно не всегда, а интегрировать сходящиеся ряды Фурье можно.

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n(n^2+1)}$$





$$2\sum_{n=1}^{10}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

$$2\sum_{n=1}^{10}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n(n^2+1)}$$

ОБОБЩЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

1. Функции с произвольным периодом: $T = 2\ell$.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot nx\right) \right] \; ; \quad -\ell \le x \le +\ell$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot n(x + 2\ell)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot nx + \frac{\pi}{\ell} \cdot n2\ell\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot nx + 2\pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot nx\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot nx\right) \, dx \; , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

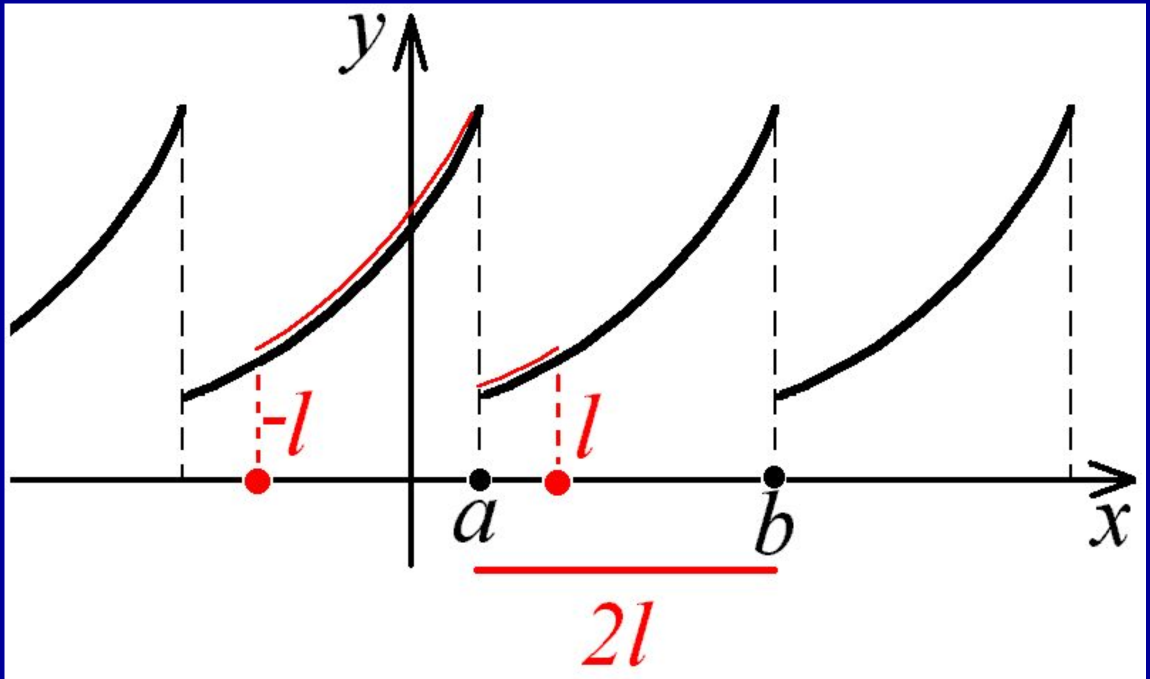
$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot nx\right) \, dx \; , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Функция, заданная на произвольном отрезке: $x \in [a, b]$ — продолжается на всю ось с периодом

$$T = b - a = 2\ell \ , \quad \text{т.е.} \ \ \ell = \frac{b-a}{2}$$

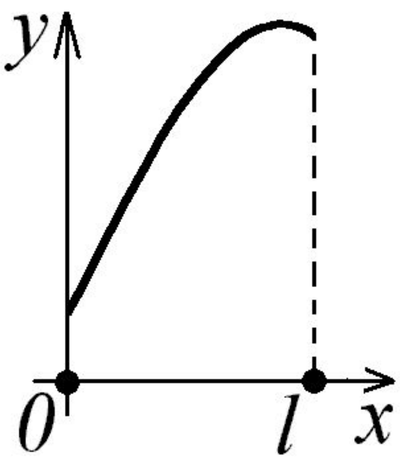
Тогда

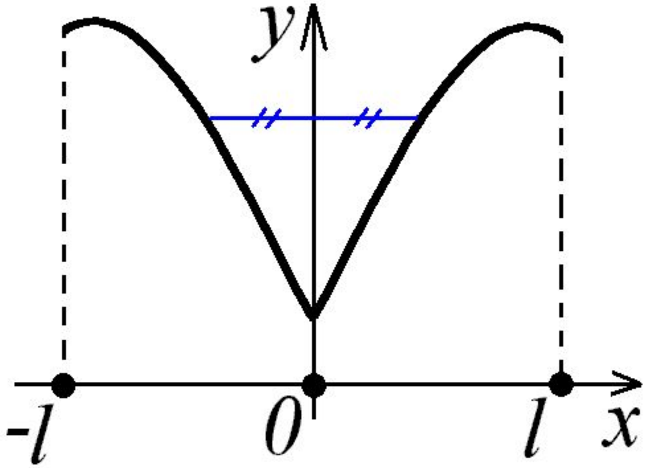
$$\int_{-\ell}^{+\ell} g(x)\, dx = \int_{a}^{a+2\ell} g(x)\, dx = \int_{a}^{b} g(x)\, dx$$

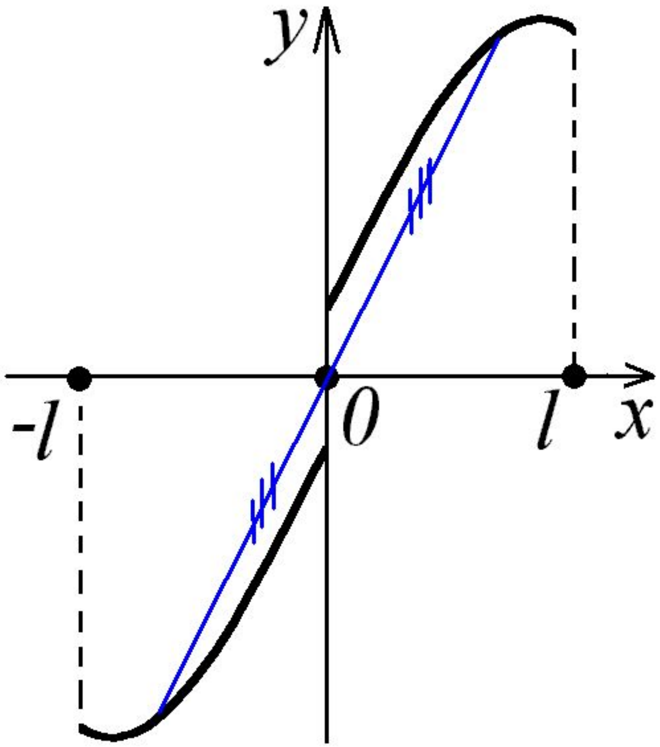


3. Разложение в ряд только по косинусам или только по синусам

$a = 0,\ b = \ell$, т.е $f(x)$ задана при $[0, +\ell]$.
На отрезок $[-\ell, 0]$ функция $f(x)$ продолжается либо **четным**, либо **нечетным** образом:







$$\boxed{b_n = 0; \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx} \qquad \boxed{a_n = 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx}$$