Следствие 1 (Об остаточном члене в форме Лагранжа). Пусть функция $f:[a;b]\to R$ имеет на сегменте $[a;b]$ непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно. Пусть $x_0, x=(x_0+\Delta x)\in[a;b]$.

Тогда существует $\xi\in(x_0,x)$, или $\xi\in(x,x_0)$, или $\xi=x=x_0$, такое что

$$r_n(x_0,\Delta x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $x\neq x_0$. По теореме 2 (об интегральной форме остаточного члена)

$$r_n(x_0,\Delta x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Применим первую теорему о среднем для сегмента (теорема 2 § 6) для функций

$$f(t) := f^{(n+1)}(t)\ ,\ g(t) := (x-t)^{n+1}.$$

Получим, что для некоторого $\xi \in (x_0, x)$, или $\xi \in (x, x_0)$ верно равенство

$$r_n(x_0, \Delta x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(Подробнее выведем на лекции). □

Следствие 2 (Об остаточном члене в форме Коши).

Пусть функция $f:[a;b]\to R$ имеет на сегменте $[a;b]$ непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно. Пусть $x_0, x=(x_0+\Delta x)\in[a;b]$.

Тогда существует $\xi\in\left(x_0,x\right)$, или $\xi\in\left(x,x_0\right)$, или $\xi=x=x_0$, такое что

$$r_n\left(x_0,\Delta x\right)=\frac{f^{n+1}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-\xi\right)^n\left(x-x_0\right).$$

Доказательство. Это равенство вытекает из равенства (2) /утверждения теоремы об интегральной форме/ и первой теоремы о среднем для сегмента (теорема 2 § 6) для функций

$$f\left(t\right):=f^{(n+1)}\left(t\right)\cdot\left(x-t\right)^n,\ g\left(t\right):=1.$$

Замечание. Из формулы (2) можно получить и другие выражения для остаточного члена в формуле Тейлора.

§9. Интегральный признак сходимости числового ряда.

Теорема 1 (интегральный признак сходимости ряда).

Пусть функция $f:[1;+\infty)\to R$ неотрицательна и убывает. Пусть $a_n = f(n), \forall n \in N$.

Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только том случае, когда функция f суммируема на $[1;+\infty)$, то есть когда

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt < +\infty .$$

Замечание. Интеграл $\int_1^{+\infty} f(t)dt := \lim_{b\to\infty}\int_1^b f(t)dt$ называют **несобственным** интегралом.

Доказательство. Монотонная функция f, очевидно, измерима.

Значит, $\int\limits_1^{+\infty} f(t)dt \in [1;+\infty]$ существует.

Рассмотрим функции $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \chi_{[n;n+1)}$

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \cdot \chi_{[n;n+1)} .$$

Очевидно, что $h \le f \le g$ *на* $[1;+\infty)$. Поэтому

$$\int_1^{+\infty} h\,dt \le \int_1^{+\infty} f\,dt \le \int_1^{+\infty} g\,dt .$$

Первый и третий интегралы легко подсчитать по теореме о счетной аддитивности интеграла

$$\int_1^{+\infty} h\,dt = \int_1^2 h\,dt + \int_2^3 h\,dt + \ldots = a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n ,$$

$$\int_1^{+\infty} g\,dt = \int_1^2 g\,dt + \int_2^3 g\,dt + \ldots = a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Таким образом

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \le \int_1^{+\infty} f\,dt \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Отсюда ясно, что условия

$\int_1^{+\infty} f(t)dt < +\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ равносильны. □

Пример применения интегрального признака сходимости ряда приведем на лекции.

Глава 5. Функциональные последовательности и ряды

§1. Введение. Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности, равномерной сходимости функционального ряда

Определение 1. Пусть задана последовательность функций $f_k : A \to R, k \in N$. Пусть еще для любого $x \in C \subset A$ существует $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$, т.е. $f : C \to R$.

Тогда говорят, что функциональная последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ сходится к функции *f* **поточечно на множестве *C***, пишут $f_k \xrightarrow{C} f, k \to \infty$.

Замечание. Расшифруем определение предела последовательности:

$$(f_k) \xrightarrow{C} f \overset{def}{\iff} \forall x \in C, \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathrm{N} : \ \forall k > N$$

$$\left| f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Определение 2. Пусть $\forall k \in \mathrm{N}\ f_k : A \to R$. Говорят, что $\{f_k\}_{k\in N}$ сходится к функции *f* **равномерно на множестве *C***, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathrm{N}:\ \forall k > N,\ \forall x \in C\ \left|f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon$. Пишут $(f_k) \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}} f$ на С.

Замечание. В определении 1 номер N зависит от ε и x. В определении 2 номер $N = N(\varepsilon)$ зависит только от ε, то есть находится для всех точек $x \in C$ сразу. Поэтому определение 2 можно переформулировать так:

Говорят, что $\{f_k\}_{k\in N}$ сходится к функции *f* **равномерно на множестве *C***, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathrm{N}:\ \forall k > N,\quad \sup_{x\in C}\left|f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности)

$$\left(f_k\right) \underset{\to}{\overset{\to}{}} f \text{ на C } \quad <=> \forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists N \in \mathrm{N}: \quad \forall m, n > N$$

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. (Необходимость) Пусть последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ сходится к функции f равномерно на множестве C, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathrm{N}: \ \ \forall k > N, \ \forall x \in C \ \left|f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon.(*)$

Докажем, что $<=> \forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists N \in \mathrm{N}: \quad \forall m, n > N$

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем номер N так как в (*). Для него имеем: