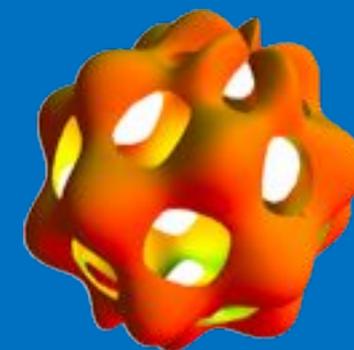




МЧС России
Санкт-Петербургский университет
Государственной противопожарной службы



Кафедра высшей математики и системного моделирования сложных процессов

Раздел 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Тема № 3. Элементы аналитической геометрии

Практическое занятие № 3.1.

На тему:

«Задачи о прямой и плоскости»

Учебные цели:

1. Рассмотреть общее уравнение прямой на плоскости и вывести из него другие виды уравнений прямой.
2. Рассмотреть общее уравнение плоскости, его частные случаи и другие виды уравнений плоскости.
3. Исследовать прямую в трехмерном пространстве, получить основные виды ее уравнений.

Учебные вопросы:

- 1. Уравнения прямой на плоскости.**
- 2. Различные виды уравнений плоскости.**
- 3. Уравнения прямой в пространстве.**

Рекомендованная литература:

Основная:

1. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник и практикум для бакалавров / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 447 с. – Серия: Бакалавр. Базовый курс.

Дополнительная:

1. Калинина Е.С., Селеменова Т.А., Хитов С.Б. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие / под общ. ред. Э.Н. Чижикова. – СПб.: Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России, 2015. Часть I. – 108 с.

2. Каменецкая Н.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Часть I: «Элементы линейной алгебры»: учебное пособие. – СПб.: Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России, 2015. 120 с.

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода координат. Кроме того, аналитическая геометрия эффективно использует положения векторной алгебры (элементы которой рассмотрены в теме № 2).

Сегодня мы начнем знакомство с основными понятиями аналитической геометрии – понятиями прямой и плоскости. Изучим основные виды уравнений прямой на плоскости, рассмотрим варианты взаимного расположения прямых на плоскости, познакомимся с различными видами уравнений плоскости и с различными видами уравнений прямой в пространстве.

Вопрос 1. Уравнения прямой на плоскости

Прямая линия – одно из основных понятий геометрии. Определяется прямая аксиоматически, или, если за основу построения геометрии взять понятие расстояния между точками пространства, то прямую можно определить как линию, вдоль которой расстояние между двумя точками является кратчайшим.

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением линии первого порядка на плоскости.

Переменные x и y называются текущими координатами точек линии. Прямая – это простейшая линия на плоскости.

1. Уравнение $Ax + By + C = 0$ (1)

с произвольными коэффициентами A , B и C такими, что A и B не равны нулю одновременно (т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$), называется **общим уравнением прямой на плоскости**.

Причем вектор $\bar{n} = \{A; B\}$ является *нормалью* к прямой $Ax + By + C = 0$, то есть вектором, перпендикулярным к этой прямой.

Формула (1) содержит уравнение любой прямой при соответствующем выборе коэффициентов A , B и C .

Если хотя бы один из коэффициентов A , B , C равен нулю, то уравнение называется *неполным*.

Например:

1. $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ — прямая $Ax + By = 0$ проходит через начало координат;
2. $A = 0, C \neq 0, B \neq 0$ — прямая $By + C = 0$ или $y = -\frac{C}{B}$ параллельна оси Ox ;
3. $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ — прямая $Ax + C = 0$ параллельна оси Oy ;
4. $B = C = 0, A \neq 0$ — прямая $Ax = 0$ или $x = 0$ является осью Oy ;
5. $A = C = 0, B \neq 0$ — прямая $By = 0$ или $y = 0$ является осью Ox .

Получим из общего уравнения (1) другие наиболее важные виды уравнений.

2. Пусть в уравнении (1) $C \neq 0$. Разделим все его члены на $(-C)$:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} + \frac{C}{-C} = 0$$

Обозначим: $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (2)$$

Уравнение (2) называется **уравнением прямой в отрезках**; величины a и b определяют отрезки на осях Ox и Oy , отсекаемые данной прямой от начала координат. Уравнение вида (2) позволяет легко выполнить построение прямой, заданной любым уравнением.

Пример 1. Построить прямые:

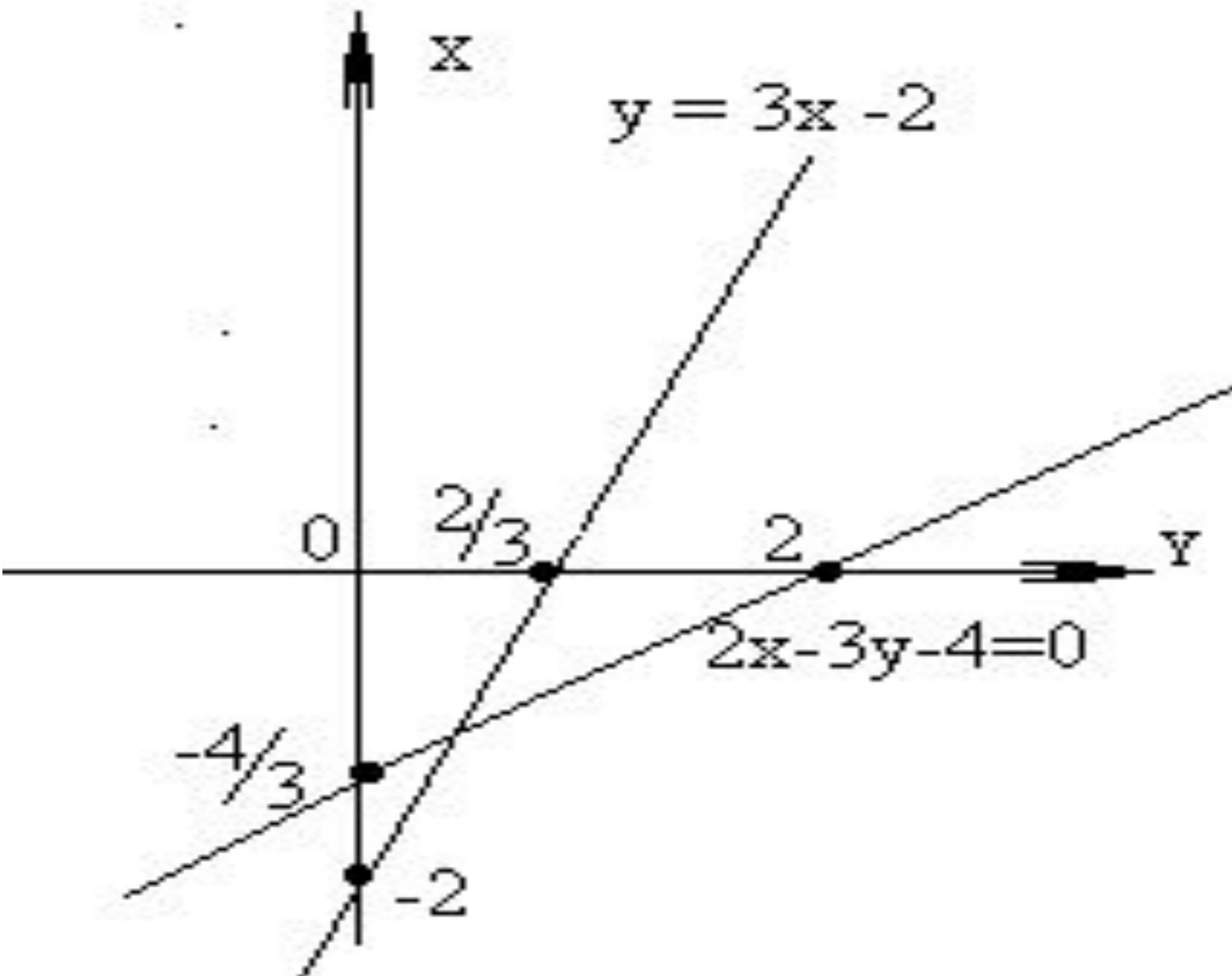
1) $2x - 3y - 4 = 0$; 2) $y = 3x - 2$.

Решение. В обоих случаях следует привести заданное уравнение к виду уравнения «в отрезках» (2); далее числа, стоящие в знаменателях, отложить соответственно на осях Ox и Oy , через полученные точки провести прямую. Получаем:

$$1. \quad 2x - 3y - 4 = 0 \quad \frac{2x}{4} - \frac{3y}{4} = \frac{4}{4} \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{-4/3} = 1$$

$$2. \quad y = 3x - 2 \quad \frac{3x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{2}{2} \quad \frac{x}{2/3} + \frac{y}{-2} = 1$$

Полученные прямые изображены на рисунке 1.



3. Пусть в общем уравнении прямой (1) $B \neq 0$.

Разрешив уравнение относительно y , получим:

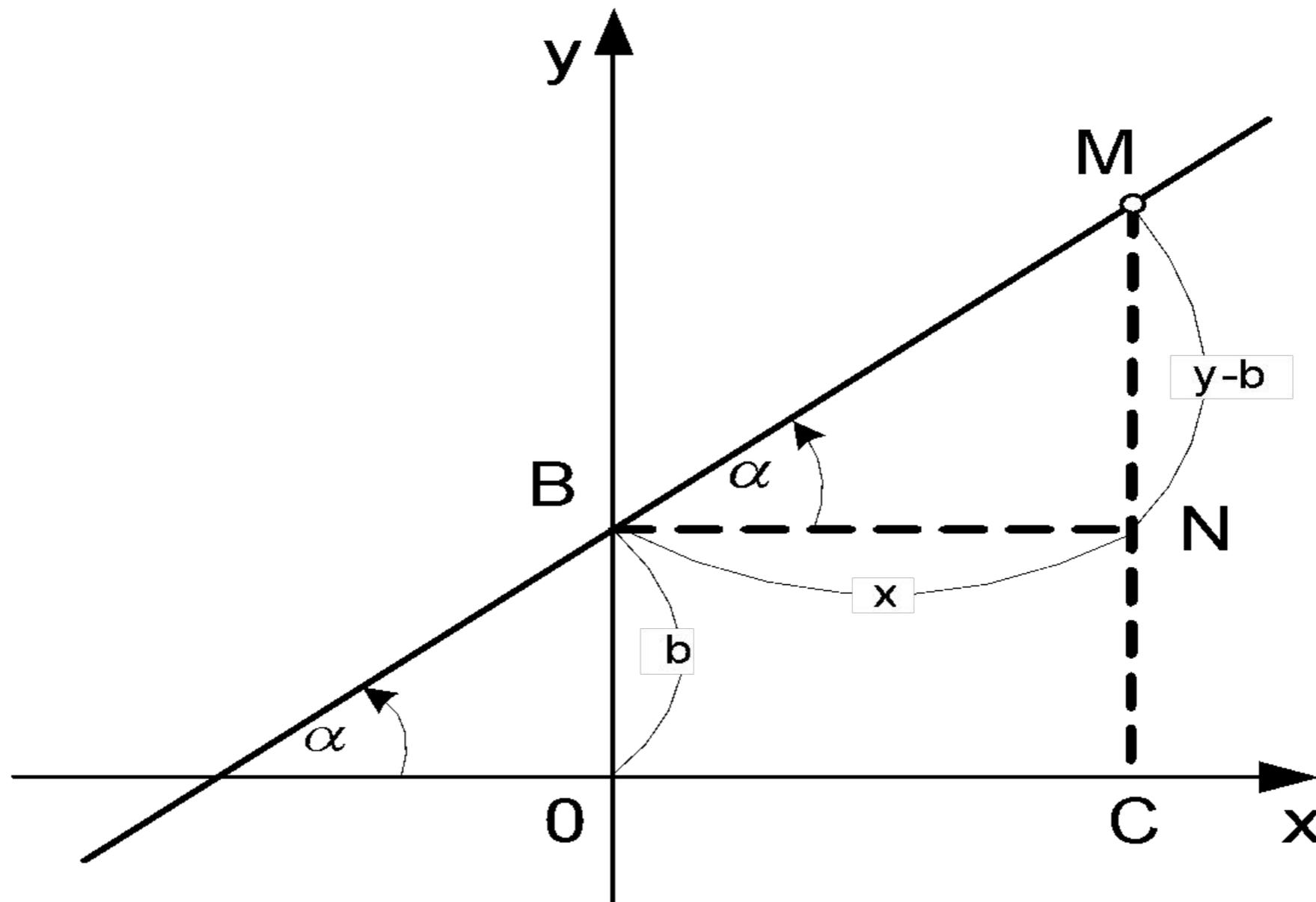
$$By = -C - Ax \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Обозначим: $k = -\frac{A}{B}$; $b = -\frac{C}{B}$

получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом:*

$$y = kx + b \quad (3)$$

Угловым коэффициентом k равен тангенсу угла, образованного прямой с положительным направлением оси Ox . Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy .



4. Рассмотрим уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$.

Предположим, известна точка $M_0(x_0; y_0)$, лежащая на этой прямой. Тогда координаты этой точки должны удовлетворять ее уравнению, то есть:

$$y_0 = kx_0 + b$$

Вычтем это равенство из уравнения (3), получим:

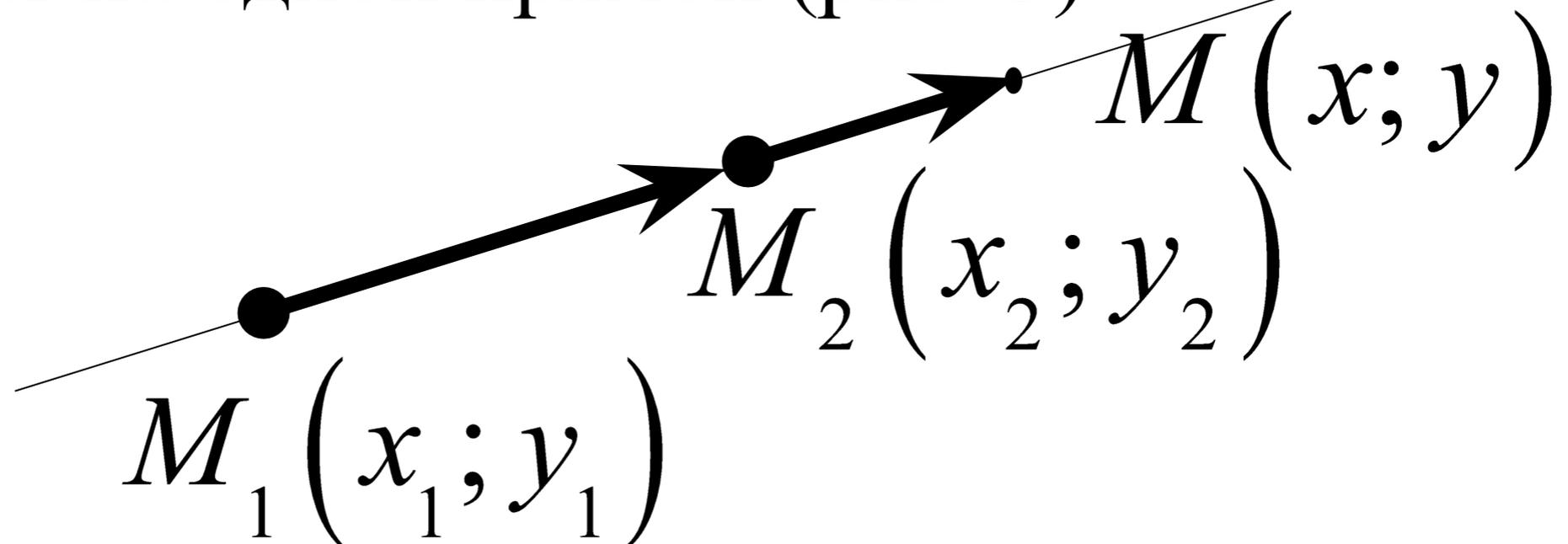
$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (4)$$

Уравнение (4) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом, проходящей через данную точку*.

5. Пусть известно, что прямая проходит через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Получим ее уравнение. Возьмем на прямой произвольную точку $M(x; y)$ и построим векторы

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\} \quad \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

Полученные векторы коллинеарны: $\overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2}$, так как лежат на одной прямой (рис. 3).



По условию коллинеарности векторов,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (5)$$

Уравнение (5) называется *уравнением прямой, проходящей через две точки.*

Аналогично можно получить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{p} = \{m; n\}$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (6)$$

Уравнение (6) называется *каноническим уравнением прямой на плоскости.*

Любой вектор $\vec{p} = \{m; n\}$, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Вопрос 2. Различные виды уравнений плоскости

Рассмотрим трехмерное пространство. Каждая точка в таком пространстве имеет три координаты x, y, z .
Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением поверхности. Простейшей поверхностью в трехмерном пространстве является плоскость.

1. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ (7)

называется ***общим уравнение плоскости***.

Причем вектор $\vec{n} = \{A; B, C\}$ является *нормалью* к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то есть вектором, перпендикулярным к этой плоскости.

Если хотя бы одно из чисел A, B, C, D равно нулю, то уравнение (7) называется *неполным*. Например:

$D = 0, A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ плоскость

$Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат, точку $O(0;0;0)$;

$C = 0, A \neq 0, B \neq 0, D \neq 0$ плоскость

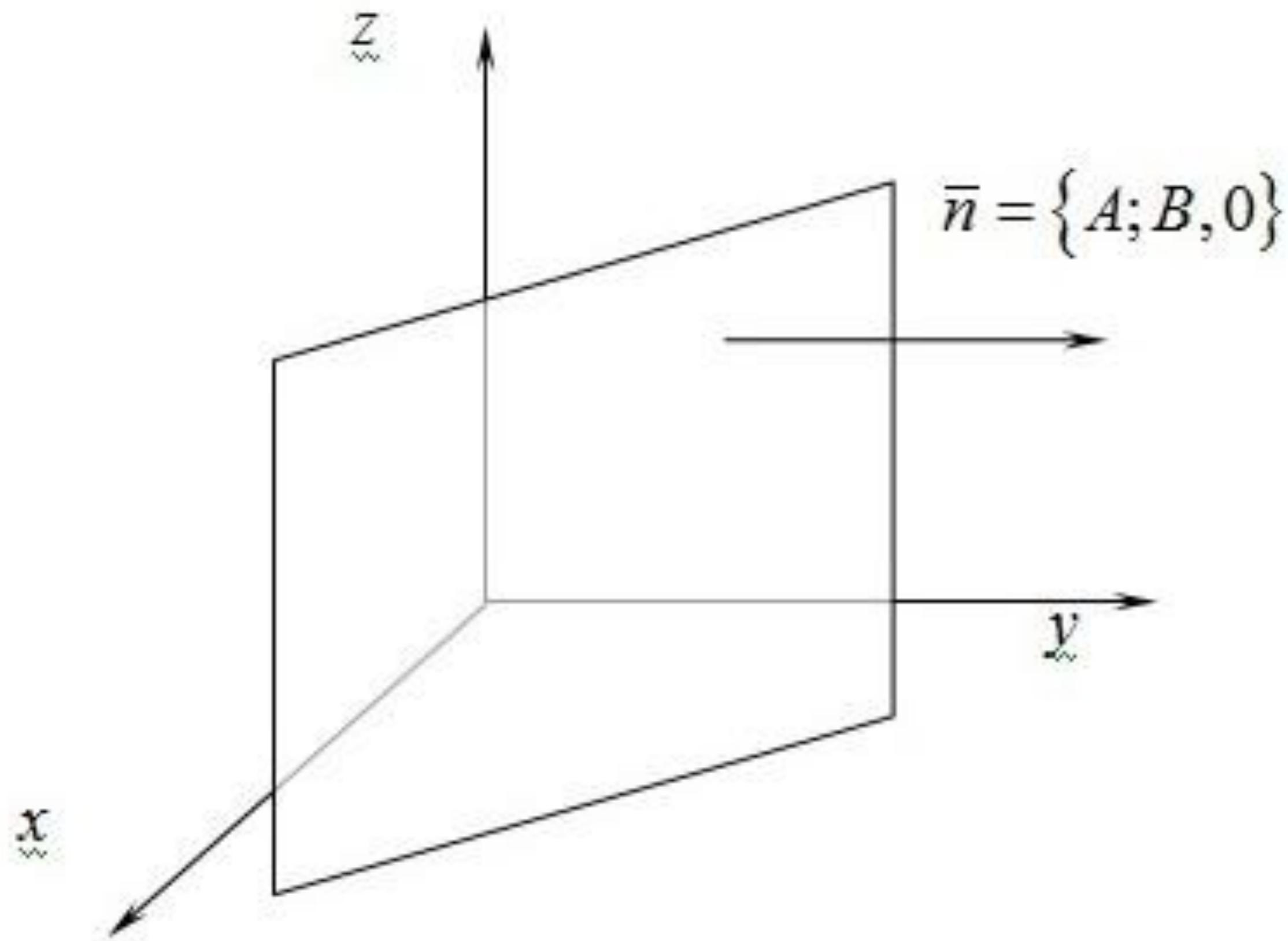
$Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz (так как вектор-нормаль этой плоскости $\bar{n} = \{A; B, 0\}$

перпендикулярен оси Oz);

если только $B=0$, то плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy

если только $A=0$, то плоскость $By + Cz + D = 0$

параллельна оси Ox ;



3. $C = D = 0$ — плоскость $Ax + By = 0$ проходит через точку $O(0;0;0)$; параллельно оси Oz , то есть плоскость проходит через ось Oz ;

аналогично:

плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox ;

плоскость $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy ;

4. $A = B = 0$ плоскость $Cz + D = 0$ или

$$z = -\frac{D}{C} \text{ параллельна плоскости } Oxy;$$

плоскость $Ax + D = 0$ параллельна плоскости Oyz ;

плоскость $By + D = 0$ параллельна плоскости Oxz ;

$A = B = D = 0$, плоскость $z=0$ – координатная плоскость Oxy ;

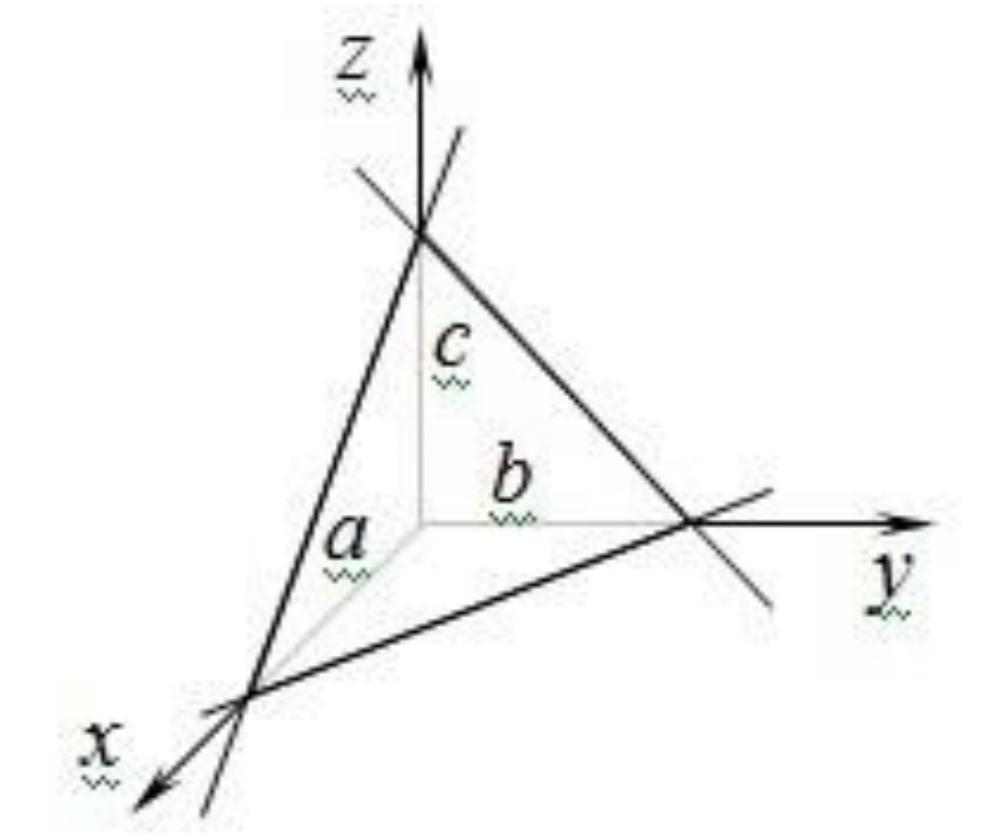
плоскость $x=0$ – координатная плоскость Oyz ;

плоскость $y=0$ – координатная плоскость Oxz .

2. Уравнение плоскости в отрезках может быть получено из общего уравнения плоскости:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (8)$$

Здесь a, b, c – отрезки, которые отсекает плоскость на осях Ox, Oy, Oz



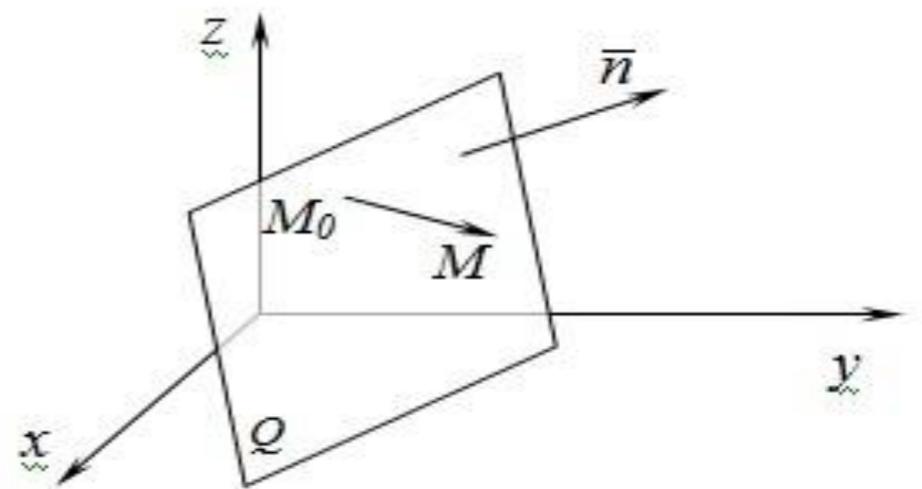
3. Получим уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

Вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ принадлежит плоскости Q .
 $\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$

Так как $\vec{n} \perp \vec{M_0M}$, следовательно, скалярное произведение $\vec{n} \cdot \vec{M_0M} = 0$

Поэтому искомого уравнение имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (9)$$



4. Получим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Пусть плоскость проходит через точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$; точка $M(x; y; z)$ – произвольная точка плоскости.

Векторы \overline{AM} , \overline{AB} , \overline{AC} компланарны, так как принадлежат одной плоскости Q . Следовательно, их смешанное произведение равно нулю.

Таким образом, искомое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Вопрос 3. Уравнения прямой в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей и определять заданием двух уравнений. В частности, каждую прямую линию можно рассматривать как пересечение двух плоскостей и соответственно этому определять заданием двух уравнений первой степени.

1. Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Oxyz

в прямоугольной системе координат некоторую прямую Q_1 . Каждое уравнение системы (11) определяет плоскости и

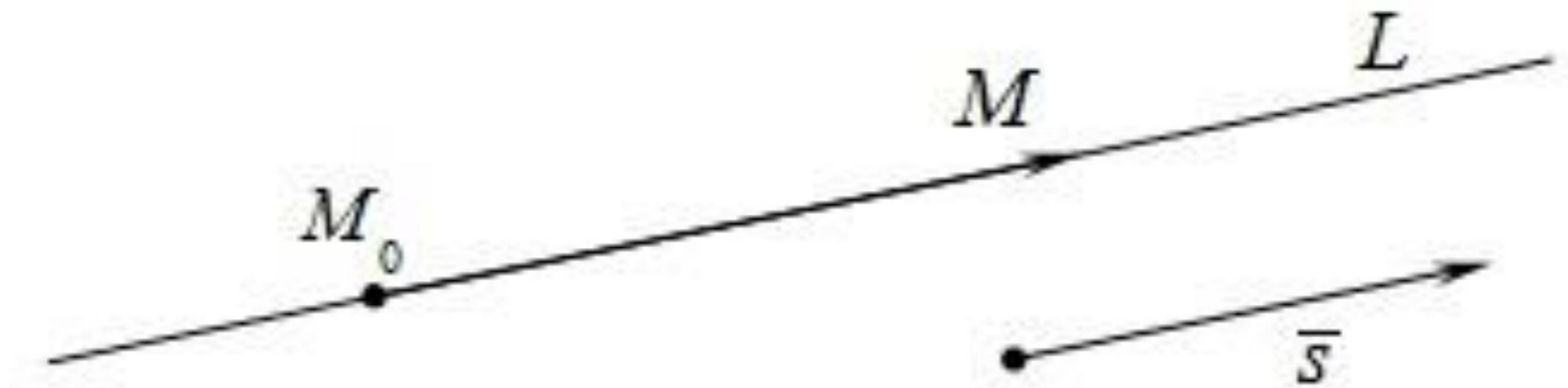
Два уравнения вида (1) совместно определяют прямую L только в случае, если плоскости Q_1 и Q_2 не параллельны и не совпадают друг с другом, т.е. нормальные векторы этих плоскостей $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ не коллинеарны (это значит, что коэффициенты не пропорциональны A_1, B_1, C_1 коэффициентам A_2, B_2, C_2 : $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$).

Уравнения (11) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Для решения задач уравнения (11) не всегда удобны, поэтому используют специальный вид уравнений прямой.

2. Пусть дана какая-либо прямая L и ненулевой вектор \vec{s} , лежащий на данной прямой или на параллельной ей (рис. 7). Вектор \vec{s} называется *направляющим вектором* данной прямой. Выведем уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей данный направляющий вектор

$$\vec{s} = \{m; n; p\}$$



Пусть $M(x; y; z)$ произвольная точка. Она лежит на прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеар $\{x, y, z\}$ направляющему вектору $\overline{s} = \{m, n, p\}$, т.е. когда координаты вектора \overline{s} пропорциональны координатам вектора $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (12)$$

Уравнения (12) и являются искомыми. Они называются **каноническими уравнениями прямой**.

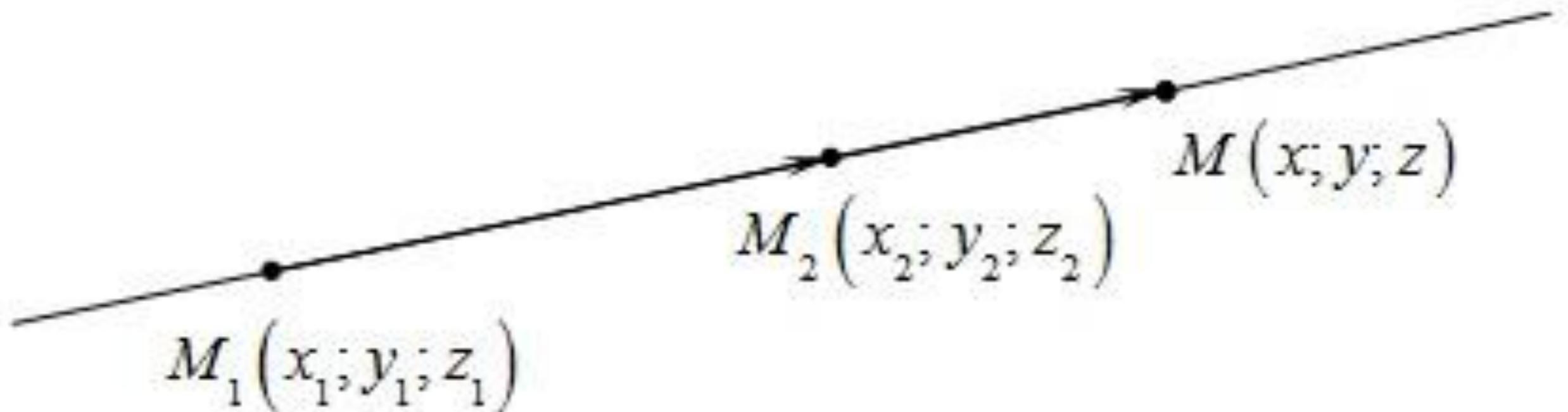
Пример. Уравнение $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{3}$

задает прямую, проходящую через точку $M_0(3; -1; 2)$ параллельно вектору $\bar{s} = \{2; 0; 3\}$ и перпендикулярно оси Oy (так как проекция вектора $\bar{s} = \{2; 0; 3\}$ на ось Oy равна нулю).

3. Получим уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (13)$$

Доказательство этой формулы можно провести аналогично случаю прямой на плоскости, учитывая, что точки M , M_1 и M_2 имеют в пространстве по 3 координаты. Уравнение (13) следует из коллинеарности векторов $\overline{M_1M}$ и $\overline{M_1M_2}$.



4. Иногда прямую полезно задавать не в виде канонических уравнений (12), а иначе. Пусть прямая L задана уравнениями (12). Обозначим через t каждое из равных отношений. Тогда

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

Откуда

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (14)$$

Равенства (14) называются *параметрическими уравнениями прямой L* , проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющий направляющий вектор $\vec{s} = \{m; n; p\}$

В уравнениях (14) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр $(-\infty < t < +\infty)$ x, y, z - как функции от t . При изменении t величины x, y, z изменяются, так что точка $M(x; y; z)$ движется по данной прямой.

Практические занятия по рассмотренной теме будут посвящены решению задач с использованием различных уравнений прямой и плоскости.

Задание на самоподготовку:

1. Изучить рекомендуемую литературу.
2. Доработать (дополнить) конспект лекции.
3. Подготовиться к практическому занятию.