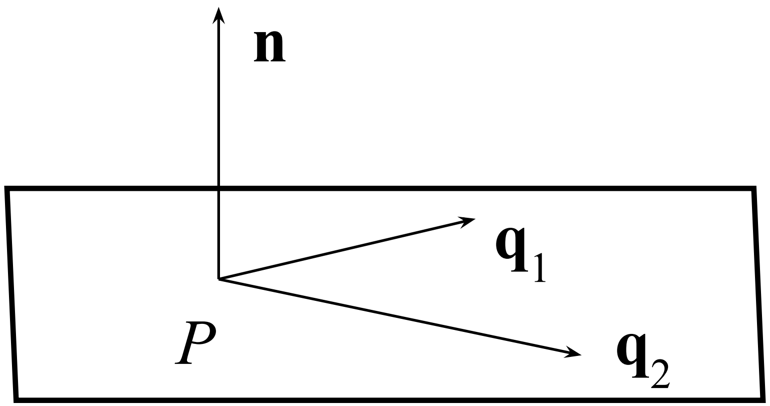
8.2. Плоскость в пространстве

8.2.1. Некоторые понятия



Плоскость P

Нормальный вектор - любой ненулевой вектор, ортогональный этой плоскости: $\mathbf{n} \perp P$, $|\mathbf{n}| \neq 0$.

Направляющий вектор - любой ненулевой вектор, параллельный этой плоскости: $\mathbf{q} \parallel P$, $|\mathbf{q}| \neq 0$.

Плоскость можно задать одним $\mathbf{n}$ или двумя неколлинеарными $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$. Причем:

$$\mathbf{n} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$$

Пусть $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $\mathbf{q}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{q}_2 = (l_2, m_2, n_2)$. Тогда:

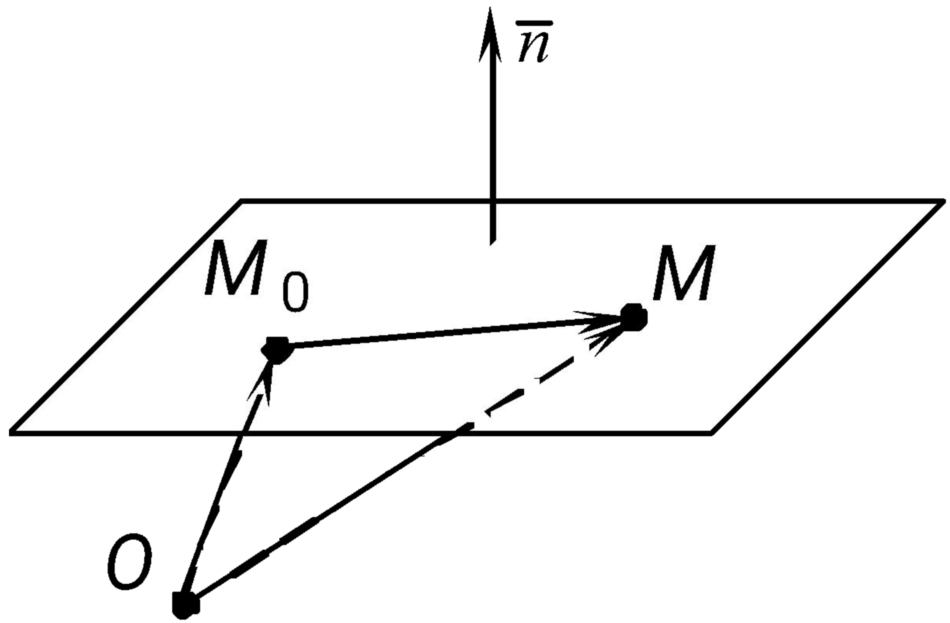
$$\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} = (A, B, C) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

8.2.2. Общее уравнение плоскости

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, перпендикулярно вектору нормали $\overline{n} = (A, B, C)$

<u>Дано</u>:

- плоскость P
- нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$
- фиксированная точка плоскости $M_0(\mathbf{r}_0) = M_0(x_0, y_0, z_0)$.
- $M(\mathbf{r}) = M(x, y, z)$ лежит на P



$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{nr} - \mathbf{nr}_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{nr} + D = 0}$$

- векторное уравнение плоскости

То же самое для координат:

$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0 \quad \Leftrightarrow (A,B,C)\cdot(x-x_0,y-y_0.z-z_0)=0$$

$$\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad \boxed{\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0}$$

Полное уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ <=> *A, B, C, D — ненулевые*.

<u>Частные случаи:</u>

(1) A = 0 => By + Cz + D = 0 или n = (0, B, C) - плоскость параллельна оси *Ox*.

(2) D = 0 => Ax + By + Cz = 0 - плоскость проходит через начало координат.

(3) A = 0, B = 0 => Cz + D = 0 или n = (0, 0, C) - плоскость параллельна *Oxy*.

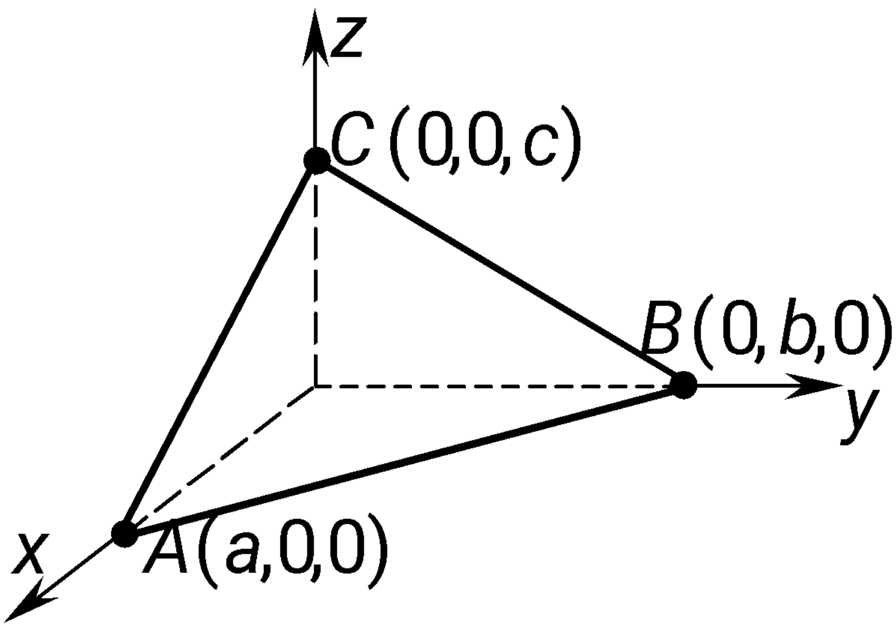
(4) A = 0, B = 0, D = 0 => z = 0 - прямая совпадает с плоскостью *Oxy*.

<u>Выводы</u>:

1. Общее уравнение плоскости - линейное уравнение, коэффициенты которого - координаты нормального вектора.
2. Если коэффициент отсутствует какая-либо координата, то плоскость параллельна этой оси.
3. Если отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат.

8.2.3. Уравнение плоскости в отрезках

$$Ax+By+Cz+D=0$$ *полное* => $$\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$$



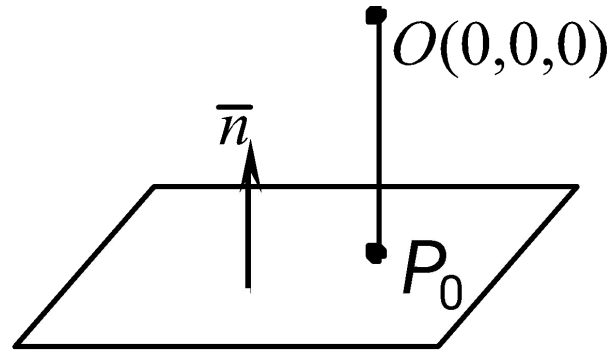
$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

a, *b* и с – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно.

Замечание: для частных случаев общего уравнения плоскости уравнение плоскости в отрезках не существует.

8.2.4. Нормальное уравнение плоскости

$\overline{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta, \cos\gamma)$



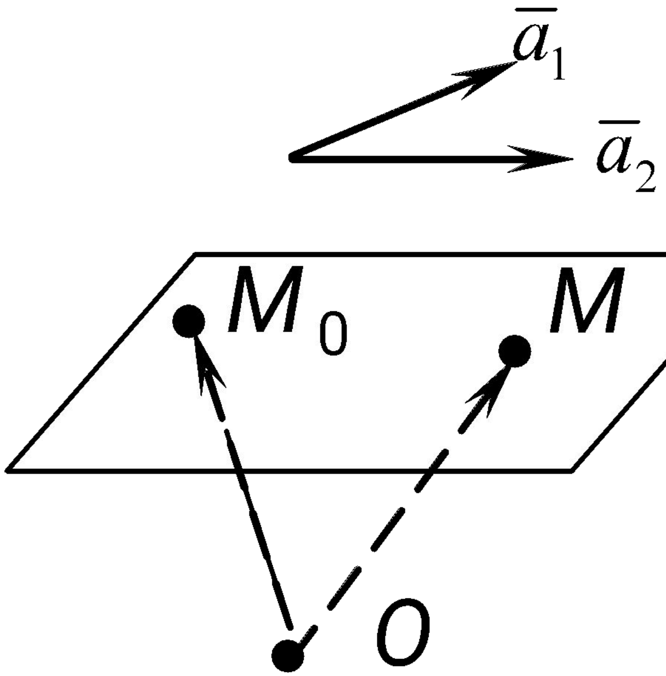
где α, β, γ - углы, образуемые нормалью с осями координат.

$p = \left|\overline{OP_0}\right|$ – расстояние от начала координат до плоскости

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z + D = 0, \quad (D = -p)$$

8.2.5. Уравнение плоскости , проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

<u>Дано</u>: $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $\quad \overline{a}_1 = (m_1; k_1; l_1)$, $\quad \overline{a}_2 = (m_2; k_2; l_2)$



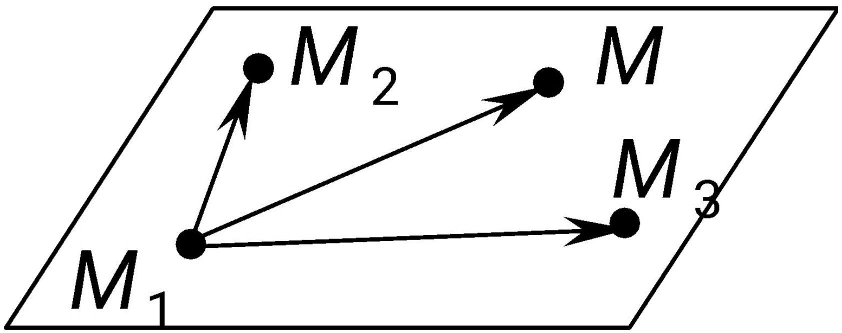
$$\left(\overline{M_0M} \times \overline{a}_1\right) \cdot \overline{a}_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & k_1 & l_1 \\ m_2 & k_2 & l_2 \end{vmatrix} = 0}$$

8.2.6. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(x_1; y_1; z_1),\ M_2(x_2; y_2; z_2),\ M_3(x_3; y_3; z_3),$$



$$\left(\overline{M_0 M} \times \overline{M_2 M_1}\right) \cdot \overline{M_3 M_1} = 0$$

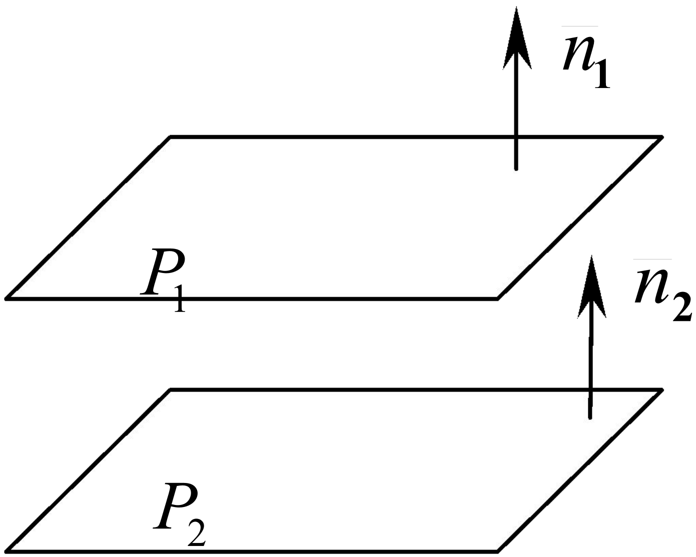
$$\Downarrow$$

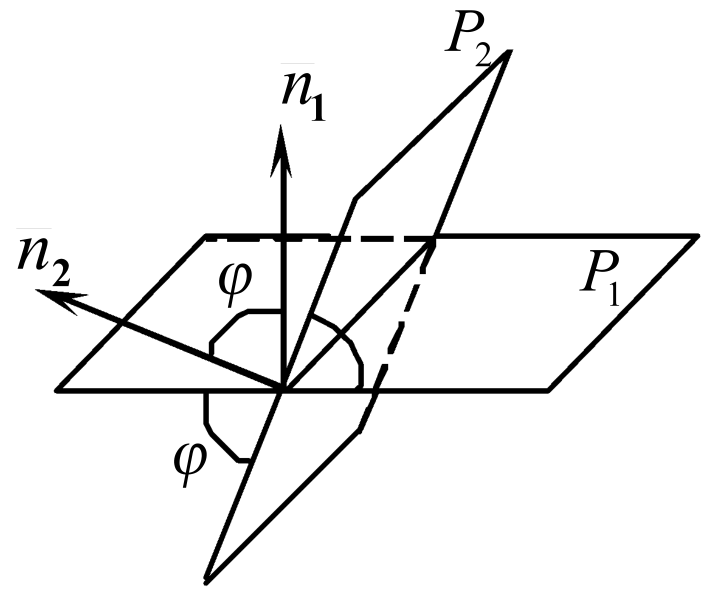
$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

8.2.7. Взаимное расположение плоскостей

$\mathrm{P}_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \mathrm{P}_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\overline{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$ – нормаль к P_1, $\overline{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$ – нормаль к P_2



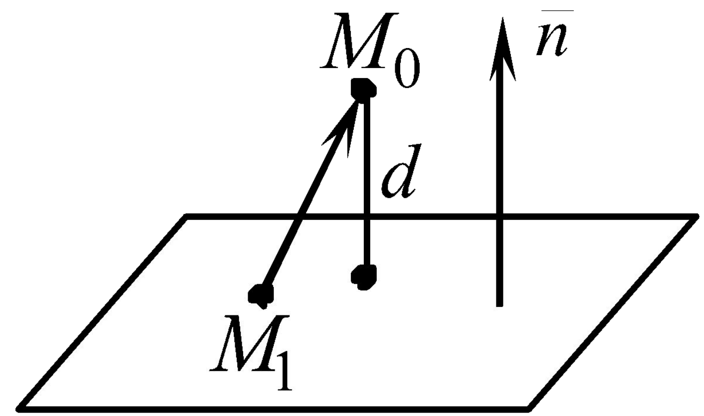


$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad \cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{\left|\overline{n}_1\right| \cdot \left|\overline{n}_2\right|} \qquad P_1 \perp P_2 \Rightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

8.2.8. Расстояние от точки до плоскости

<u>Дано</u>: $Ax + By + Cz + D = 0$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$.
<u>Найти</u>: расстояние от точки M_0 до плоскости.

$$d = \left| np_{\bar{n}} \overline{M_1 M_0} \right| = \left| \frac{\bar{n} \cdot \overline{M_1 M_0}}{|\bar{n}|} \right| =$$



$$= \left| \frac{(A, B, C) \cdot (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| =$$

$$= \frac{|Ax_0 - Ax_1 + By_0 - By_1 + Cz_0 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - \underbrace{\left(Ax_1 + By_1 + Cz_1\right)}_{-D}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

8.2.9. Уравнение плоскости, проходящей через точку

<u>Дано</u>: фиксированная точка плоскости $M_0(x_0, y_0, z_0)$, вектор нормали $\mathbf{n} = (A, B)$.

<u>Найти</u>: уравнение плоскости, проходящей через M_0 и перпендикулярной $\mathbf{n}$.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$

M_0 лежит на плоскости => $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

$$\boxed{\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

По другому: любой вектор M_0M лежит в плоскости P =>

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

Пример на нахождение уравнения плоскости через 3 точки

Дано: три точки $M_1(1;\ 1;\ 1)$, $M_2(2;\ -1;\ 0)$, $M_3(0;\ 3;\ 0)$.

Найти: общее уравнение плоскости, проходящей через M_1, M_2, M_3.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & -1-1 & 0-1 \\ 0-1 & 3-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1) + 2(y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow 2(x-1) + y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$$

Пример на нахождение угла между плоскостями

Дано: P_1: $2x + 3y - 4z + 5 = 0$, P_2: $y + 3 = 0$

Найти: угол между P_1 и P_2.

$\mathbf{n}_1 = (2; 4; -4) = (1; 2; -2)$, $\mathbf{n}_2 = (0; 1; 0)$.

$$\cos\varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0}{\sqrt{1+4+4} \cdot 1} = \frac{2}{3} \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{3}$$

Пример на нахождение уравнения плоскости через точку

Дано: плоскость P: $5x - 4y + 2z + 1 = 0$, точка $M(2; 3; -1)$.

Найти: уравнение плоскости, проходящей через M и параллельной P.

Первый способ:

$$\mathbf{n}_1 = (5; -4; 2) = \mathbf{n}_2$$

$$5x - 4y + 2z + D = 0$$

$$5x_0 - 4y_0 + 2z0 + D = 0$$

$$5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + D = 0$$

$$D = 4$$

$$5x - 4y + 2z + 4 = 0$$

Второй способ:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$5(x - x_0) - 4(y - y_0) + 2(z - z_0) = 0$$

$$5(x - 2) - 4(y - 3) + 2(z + 1) = 0$$

$$5x - 10 - 4y + 12 + 2z + 2 = 0$$

$$5x - 4y + 2z + 4 = 0$$

Пример на нахождение расстояния между параллельными пл-ми

Дано: P_1: $4x - 2y + 4z + 5 = 0$, P_2: $2x - y + 2z - 7 = 0$

Найти: расстояние между P_1 и P_2.

$\mathbf{n}_1 = (4; -2; 4)$, $\mathbf{n}_2 = (2; -1; 2)$ - коллинеарны.

Берём любую точку на P_1 и вычисляем расстояние от неё до P_2.

$x = 0$, $y = 0$ => $z = -5/4$ => $M_1(0; 0; -5/4)$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-5/4) - 7\right|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \left|\frac{-9,5}{3}\right| = \frac{19}{6}.$$